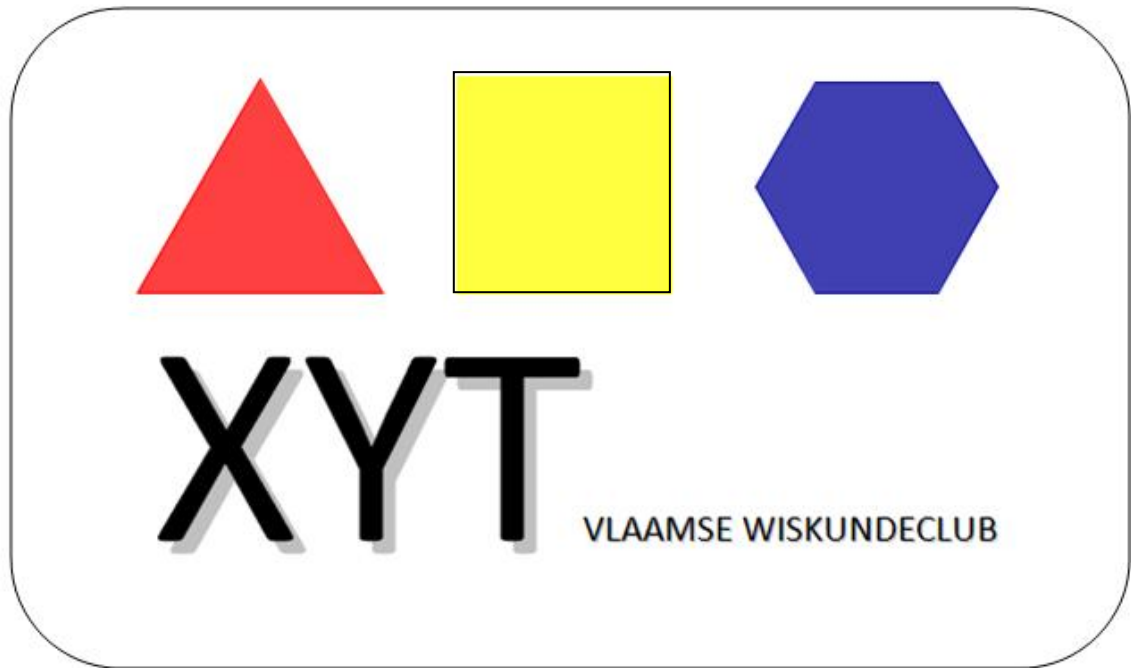




PROPOSITIELOGICA

fundament voor wiskundig redeneren

Dr. Luc Gheysens

PROPOSITIELOGICA

Een *propositie* of *logische uitspraak*, verder weergegeven door een letter $p, q, r \dots$ is een uitspraak die in een vastgelegde context waar of vals is. We zeggen dat de propositie p *waarheidswaarde* 1 heeft als p waar is en waarheidswaarde 0 als p vals is. Om de waarheidswaarde op een visueel overzichtelijke manier voor te stellen gebruikt men zogenaamde waarheidstabellen.

Voorbeelden.

p = “2 is oneven” is een valse propositie

q = “ga onmiddellijk zitten” is geen propositie

r = “het regent” is een propositie, die ofwel waar is ofwel vals al naargelang het tijdstip en de plaats

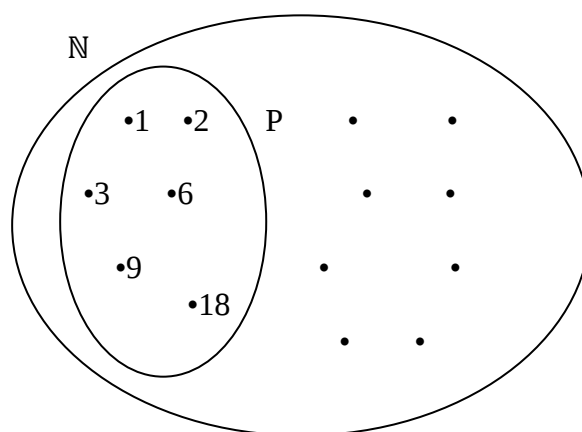
s = “elk vierkant is een rechthoek” is een ware propositie.

In de wiskunde kan men aan heel wat proposities een waarheidsdomein associëren. Dit is de verzameling waarin alle elementen zitten waarvoor de propositie waar is. Men moet daarbij de referentieverzameling kennen, dit is de verzameling van alle elementen waaruit men mag kiezen.

Voorbeelden.

p = “ x is een deler van 18”. Als de referentieverzameing $E = \mathbb{N}$ is, dan is het waarheidsdomein van de propositie p de verzameling $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Als de referentieverzameling $E = \mathbb{Z}$ is, dan is het waarheidsdomein $P = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

We kunnen dit weergeven met behulp van een Venndiagram (genoemd naar de Engelse wiskundige John Venn (1834 – 1923)):



q = “ x is een deler van 24” heeft bij de referentieverzameling $E = \mathbb{N}$ als waarheidsdomein $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

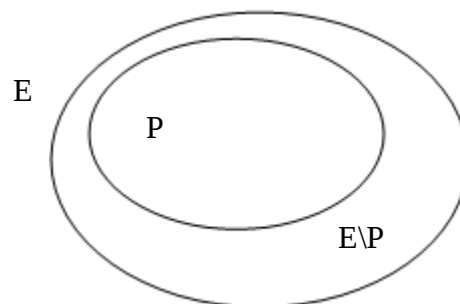
Op proposities kan men ‘bewerkingen’ uitvoeren:

uitspraak	in symbolen	naam
niet p	$\neg p$	negatie
p en q	$p \wedge q$	conjunctie
p of q	$p \vee q$	disjunctie

- Voor de **negatie** (ontkenning) van de propositie p wordt naast de notatie $\neg p$ ook soms $\sim p$ gebruikt. De negatie verandert de waarheidswaarde van een propositie, zoals blijkt uit de onderstaande waarheidstabel:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Als P het waarheidsdomein van de propositie p is, dan is $E \setminus P = P^C$ (het complement van P t.o.v. de referentieverzameling E) het waarheidsdomein van $\neg p$.



- Voor de **conjunctie** van de proposities p en q gebruikt men naast de notatie $p \wedge q$ ook soms p & q. De (samengestelde) propositie $p \wedge q$ is enkel waar als zowel p en q waar zijn. Dit blijkt uit de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Als P het waarheidsdomein is van de propositie p en Q het waarheidsdomein van q, dan is de doorsnede $P \cap Q$ het waarheidsdomein van $p \wedge q$.

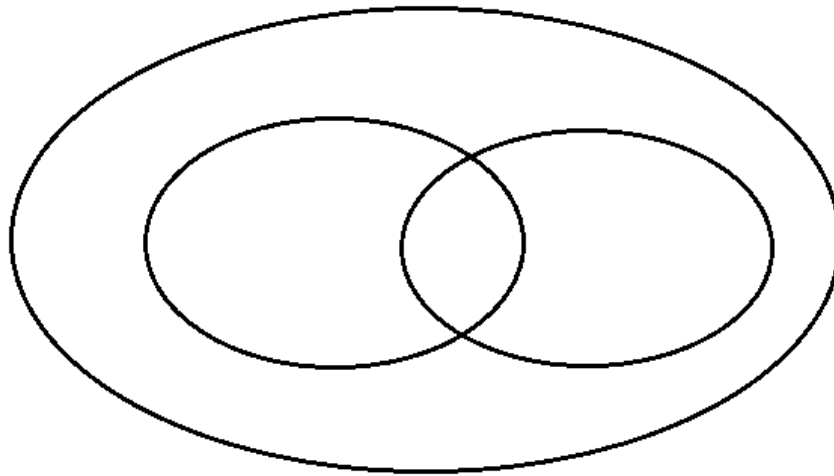
Voorbeeld.

p = “x is een deler van 18” ;

q = “x is een deler van 24”;

$p \wedge q$ = “x is een deler van 18 en van 24”.

➤ **Opgave 1.** Stel $P \cap Q$ voor op het onderstaande Venndiagram.



- Voor de **disjunctie** van de proposities p en q gebruikt men de notatie $p \vee q$. Met “ p of q ” bedoelt men hier de zogenaamde *inclusieve of*, m.a.w. $p \vee q$ is waar als ofwel p waar is, ofwel q of als p en q allebei waar zijn. Zo kan iemand korting krijgen in Kinopolis als hij een studentenkaart heeft of als hij medewerker is bij Kinopolis. Een medewerker die student is, geniet dan van dezelfde korting. In dit geval ziet de waarheidstabel er als volgt uit:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Als P het waarheidsdomein is van de propositie p en Q het waarheidsdomein van q , dan is de unie $P \cup Q$ het waarheidsdomein van $p \vee q$.

.

Voorbeeld.

p = “ x is een deler van 18”

q = “ x is een deler van 24”

$p \vee q$ = “ x is een deler van 18 of van 24”.

➤ **Opgave 2.** Geef het waarheidsdomein $P \cup Q$ dat hoort bij de bovenstaande propositie $p \vee q$ via opsomming:

$P \cup Q =$

Tussen proposities bestaan er ook relaties, zoals de implicatie (als ..., dan ...) en de dubbele implicatie of equivalentie (... als en alleen als ... wat men ook soms afkort met ...asa ...).

uitspraak	in symbolen	naam
als p dan q	$p \Rightarrow q$ (of $p \rightarrow q$)	implicatie
p als en alleen als q	$p \Leftrightarrow q$ (of $p \leftrightarrow q$)	dubbele implicatie, equivalentie

- Een implicatie $p \Rightarrow q$ is de bewering dat als een propositie p waar is, dat dan ook de propositie q waar is. Men leest dit als “p impliceert q” of gewoonweg “als p, dan q” of nog “q volgt uit p”.

We stellen vast dat er een verschil is tussen beweringen van het type “als ..., dan ...” in de gewone omgangstaal en in de logica. We illustreren dit met een concreet voorbeeld.

Als de vader van Bruno zegt: “Als onze zoon met zijn eindexamen 80 % haalt, dan krijgt hij een brommer”, dan zal Bruno ongetwijfeld aanvoelen dat deze belofte enkel niet ingelost wordt in het geval dat hij 80 % haalt en toch geen brommer krijgt. Dit betekent dus ook dat de belofte waar is als Bruno geen 80 % haalt in juni en toch een brommer krijgt.

We plaatsen de mogelijke scenario's in het onderstaande schema:

scenario		de belofte is
p is waar Bruno haalt 80 % in juni	q is waar Bruno krijgt een brommer	waar
p is waar Bruno haalt 80 % in juni	q is onwaar Bruno krijgt geen brommer	onwaar
p is onwaar Bruno haalt geen 80 % in juni	q is waar Bruno krijgt een brommer	waar
p is onwaar Bruno haalt geen 80 % in juni	q is onwaar Bruno krijgt geen brommer	waar

p wordt wel eens het antecedens of de hypothese genoemd en q het consequens of de conclusie. De waarheidstabel voor $p \Rightarrow q$ is de volgende:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

De volgende twee beweringen zijn bijgevolg (volgens de propositielogica) waar:

- “Als een hagedis een vogel is, dan is $1 + 1 = 2$ ”.
- “Als een merel een reptiel is, dan is $1 + 1 = 3$ ”.

Als P het waarheidsdomein is van de propositie p en Q het waarheidsdomein van de propositie q en $p \Rightarrow q$, dan zal P een deelverzameling zijn van Q: $P \subset Q$.

Voorbeeld.

$p = \text{"x is een deler van 12"}$

$q = \text{"x is een deler van 36"}$.

➤ **Opgave 3.** Ga na dat bij het bovenstaande voorbeeld geldt dat $P \subset Q$.

In de context van implicaties hanteert men vaak de termen “nodige voorwaarde” en “voldoende voorwaarde”. Als de implicatie $p \Rightarrow q$ waar is, dan zegt men dat p een voldoende voorwaarde is voor q , of nog: opdat q zou gelden is het voldoende dat p geldt. Een alternatieve manier om dit uit te drukken is zeggen dat q een nodige voorwaarde is voor p (q volgt noodzakelijkerwijze uit p) of nog: opdat p zou gelden is het nodig dat q geldt. Immers, als q niet geldt, dan kan p onmogelijk waar zijn.

Voorbeeld.

Beschouw de bewering “opdat een natuurlijk getal n een viervoud zou zijn, is het nodig dat n even is”. Hier is $p = \text{"n is een viervoud"}$ en $q = \text{"n is even"}$. Dan geldt de implicatie $p \Rightarrow q$. Het is dus voldoende dat n een viervoud is opdat n zou even zijn. De nodige voorwaarde “ n is even” is echter geen voldoende voorwaarde (want 6 is even maar geen viervoud)!

In de spreektaal trekt men vaak de verkeerde conclusie dat uit $p \Rightarrow q$ volgt dat als p niet waar is, dan ook q niet waar zal zijn. Als vader zegt: “Als het zondag mooi weer is, gaan we fietsen aan zee”, dan zal het dochtertje hieruit wellicht besluiten dat als het geen goed weer is, ze niet zullen gaan fietsen aan zee.

- De implicatie $q \Rightarrow p$ is de omkering van de implicatie $p \Rightarrow q$. Als beide implicaties gelden, dan zeggen wat de p en q equivalent zijn. De equivalentie wordt genoteerd met $p \Leftrightarrow q$.

Dus $p \Leftrightarrow q$ betekent $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

De waarheidstabel voor $p \Leftrightarrow q$ is de volgende:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

In wiskundige bewijzen spreekt men $p \Leftrightarrow q$ uit als “ p als en slechts als q ” of afgekort: “ p asa q ”. In dit geval is p een nodige en voldoende voorwaarde voor q en is ook omgekeerd q een nodige en voldoende voorwaarde voor p .

Voorbeelden.

Een driehoek ABC is gelijkbenig asa driehoek ABC twee even grote hoeken heeft.

Een natuurlijk getal n is deelbaar door 6 asa n deelbaar is door 2 en door 3.

Twee rechten in een vlak snijden elkaar asa ze precies één punt gemeen hebben.

Om aan te tonen dat twee verzamelingen gelijk zijn, toont men aan dat ene een deelverzameling is van de andere en omgekeerd, m.a.w. $P = Q \Leftrightarrow P \subset Q \wedge Q \subset P$.

Opmerking. Wanneer men te maken heeft met meer ingewikkelde beweringen dan zal men bij voorkeur voor de duidelijkheid haakjes gebruiken. Zo bedoelen we met $\neg p \Rightarrow q \wedge r$ in feite $(\neg p) \Rightarrow (q \wedge r)$ en zorgen haakjes voor meer duidelijkheid.

Tautologieën

We stellen nu de waarheidstabel op van een aantal logische uitdrukkingen. De cijfertjes in de onderste rij van de tabel staan in het vetjes gedrukt en verwijzen naar de volgorde waarin men de cijfers 1 (voor waar) en 0 (voor onwaar) invult. Het eindresultaat staat in een rechthoekje (met onderaan het in vetjes afgedrukte cijfer 4).

Voorbeeld 1. De logische uitdrukking $(p \wedge q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$

p	q	(p ∧ q)			∨	(¬p ⇒ q)		
1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	2	3	2	4	2	3	2

Een bewering samengesteld uit verschillende proposities is een **tautologie** of **logische stelling** als haar waarheidswaarde altijd 1 (waar) is onafhankelijk van de waarheidswaarde van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

Een **contradictie** of **tegenspraak** is een samengestelde bewering waarvan de waarheidswaarde altijd 0 (onwaar) is, voor alle mogelijke waarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

De bewering in voorbeeld 1 is dus geen tautologie en ook geen contradictie. In dit geval spreekt men van een **contingentie**.

Voorbeeld 2. De wet van de **contrapositie**: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

p	q	(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)		
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	0
1	1	2	3	2

Dit is een belangrijke tautologie die men vaak gebruikt bij wiskundige redeneringen en bewijzen. Zo kan een oneven getal nooit een viervoud zijn want als een getal een viervoud is, is het ook deelbaar door 2. Een driehoek ABC waarvan de drie hoeken een verschillende grootte hebben, kan niet gelijkbenig zijn, omdat elke gelijkbenige driehoek twee even grote hoeken heeft.

De wet van de contrapositie kan men ook ‘vertalen’ naar de verzamelingenleer:

$$P \subset Q \Leftrightarrow Q^C \subset P^C.$$

Voorbeeld 3. **De eerste wet van De Morgan** (Augustus De Morgan, een Britse wiskundige en logicus, 1806 – 1871).

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

lees dit als: de negatie van (p en q) is (niet p of niet q).

Als het bijvoorbeeld niet waar is dat Lieselot een fiets heeft en een bromfiets, dan betekent dit dat ze geen fiets heeft of geen bromfiets (of geen van beide).

p	q	$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$						
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	4	2	3	2	5	2	4

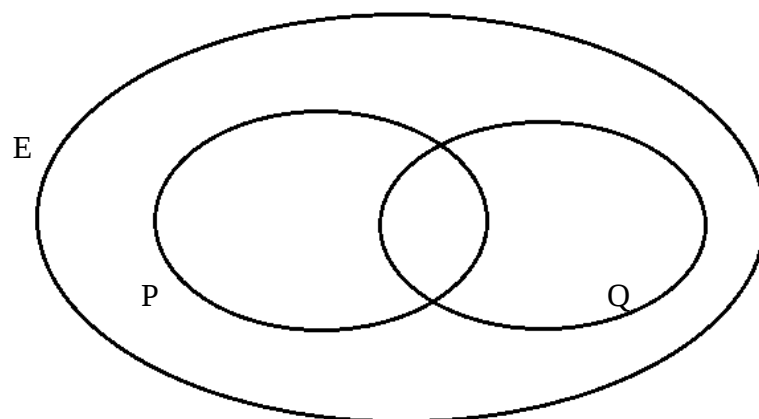
Men kan deze wet ook vertalen naar de verzamelingenleer:

$$(P \cap Q)^C = P^C \cup Q^C$$

lees dit als: het complement van de doorsnede is gelijk aan de unie van de complementen.

➤ Opgave 4

Toon deze laatste gelijkheid voor verzamelingen aan op het onderstaande Venndiagram.



Voorbeeld 4. **De tweede wet van De Morgan**

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

lees dit als: de negatie van (p of q) is (niet p en niet q).

Als het bijvoorbeeld niet waar is dat Lieselot een hond heeft of een kat, dan betekent dit dat ze geen hond heeft en geen kat.

p	q	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$							
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	4	2	3	2	5	2	4	2

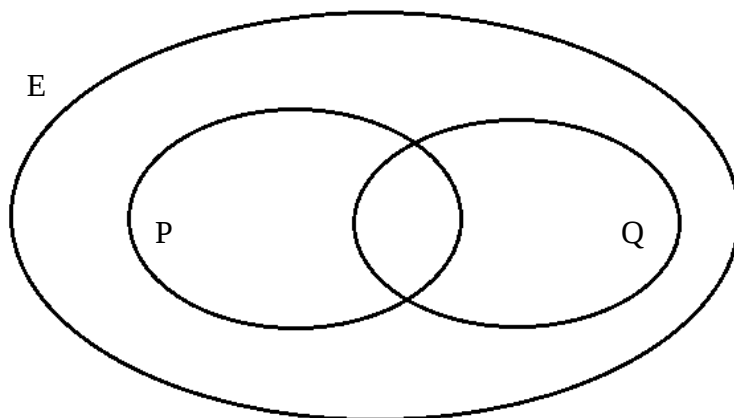
Men kan deze wet ook vertalen naar de verzamelingenleer:

$$(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$$

lees dit als: het complement van de unie is gelijk aan de doorsnede van de complementen.

➤ Opgave 5

Toon deze laatste gelijkheid voor verzamelingen aan op het onderstaande Venndiagram.



Opgave 6

Hieronder staan een aantal logische wetten (tautologiën).

Toon bij de wetten waarbij een (*) staat telkens aan met behulp van een waarheidstabel dat het om een tautologie gaat.

Opmerking.

Vaak gebruikt men enkel de symbolen $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ in het geval dat men met een tautologie te maken heeft. In het algemeen gebruikt men dan eerder $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$.

1. De modus ponens: $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
2. De dubbele negatie: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. De implicatie en de negatie van de implicatie: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) (*)$
 $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) (*)$
4. Syllogisme (transitiviteit van de implicatie): $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) (*)$
 Als 'typevoorbeeld' van een syllogisme vindt men in de literatuur de volgende redenering:

Alle mensen zijn sterfelijk
 Socrates is een mens
 Socrates is sterfelijk.

In de 'ludieke logica' vindt men enkele leuke varianten hierop:

Ik kan in mijn jas
 Mijn jas kan in mijn valies
 Ik kan in mijn valies.

Alle zeldzame dingen zijn duur
 Een paard dat 50 euro kost is zeldzaam
 Een paard van 50 euro is duur.

5. Redenering uit het uitgerijmde: $q \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p)) (*)$
6. De wet van de uitgesloten derde: $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p (*)$
7. Commutativiteit van conjunctie en disjunctie: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
 $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
8. Associativiteit van conjunctie en disjunctie: $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
 $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
9. Distributiviteit van de conjunctie t.o.v. de disjunctie:

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) (*)$$

Distributiviteit van de disjunctie t.o.v. conjunctie:

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

10. Bewijs van equivalentie ('de pijl in twee richtingen' of nodig en voldoende voorwaarde):

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) (*)$$

Opgave 7

Toon de geldigheid van de wet van de gevalsonderscheiding aan:

$$((p \vee q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$$

Kan je dit illustreren met een voorbeeld?

Controleer jouw antwoord met behulp van de waarheidstabulator die je vindt op <http://www.opener2.ou.nl:8080/opener/spinoza/lia/javascript/proptab/index.html>

Opgave 8

Beschouw de volgende uitspraak: “Als ik te snel rijd, krijg ik een boete”.

Welke van de volgende uitspraken zijn hiermee gelijkwaardig?

- (a) Als ik een boete krijg, dan heb ik te snel gereden.
- (b) Als ik geen boete krijg, dan heb ik niet te snel gereden.
- (c) Als ik niet te snel rijd, dan krijg ik geen boete.
- (d) Ik rijd niet te snel of ik krijg een boete.

Referenties

A. Roodhardt, M. Doorman, *Logisch redeneren*, Lesmateriaal voor experimenten Wiskunde C voor de vernieuwing van wiskunde in de tweede fase per 2011, commissie toekomst wiskundeonderwijs, 2009.

http://www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/VWO%20Wiskunde%20C/Logisch%20Redeneren/oudeversies/20081029_redeneren_deel1.pdf .

Uitwiskeling, jaargang 27, nummer 2.

Zomercursus Wiskunde, K. U. Leuven Campus Kortrijk, Academiejear 2010-2011.

J. van Benthem, *Logica in actie*, met gratis cursusmateriaal op de volgende website: www.spinoza.ou.nl/johan-van-benthem/logica-in-actie/cursusmateriaal .