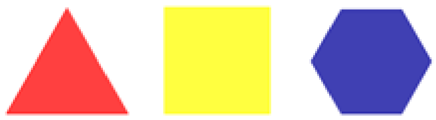
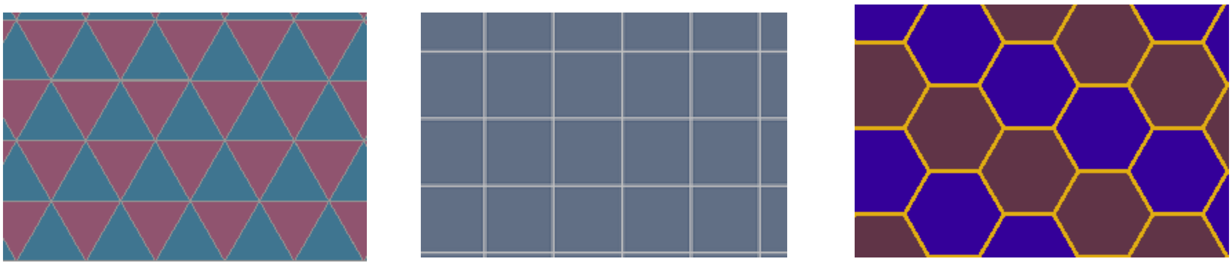


REGELMATIGE VLAKVULLINGEN

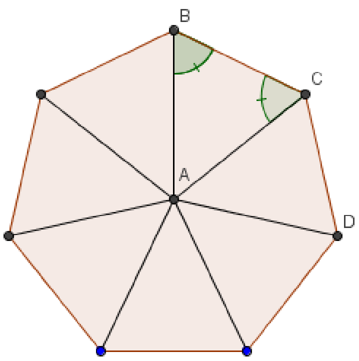
Een **regelmatige vlakvulling** of betegeling is een overdekking van het platte vlak met convexe en congruente regelmatige veelhoeken van één soort (driehoeken, vierhoeken ...). Deze komen in hun hoekpunten samen. De punten waar de hoekpunten samen komen noemen we de verdelingspunten. Rond ieder verdelingspunt liggen evenveel veelhoeken.

We bewijzen dat er maar drie soorten regelmatige betegelingen mogelijk zijn: met driehoeken, vierkanten en zeshoeken.



Figuur 1

We berekenen eerst de grootte van de hoeken van een regelmatige n-hoek. Hiervoor delen we de n-hoek op in n gelijke driehoekjes zoals in figuur 2.



Figuur 2

Dan is $B\hat{A}C = \frac{360°}{n}$, zodat $A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180° - \frac{360°}{n} = \frac{n.180°-360°}{n}$ en bijgevolg is

$$B\hat{C}D = \frac{n.180° - 360°}{n}.$$

Aangezien in het hoekpunt C k gelijke tegels (regelmatige veelhoeken) samenkomen, die perfect aaneensluiten zonder overlapping of tussenruimte, zal

$$k.\frac{n.180° - 360°}{n} = 360°.$$

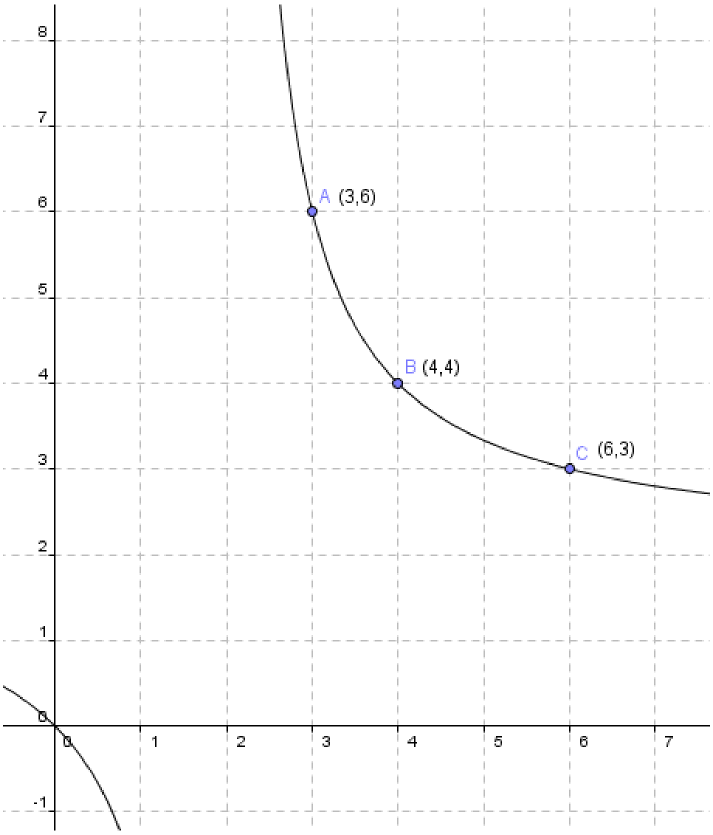
Hieruit volgt: $k.\frac{n-2}{n} = 2$, waaruit je na een klein beetje rekenwerk vindt dat

$$\frac{2k}{k-2} = n.$$

Het probleem komt er dus op neer om te bepalen voor welke natuurlijke getallen k groter dan 2 de breuk uit het linkerlid een natuurlijk getal n oplevert dat zelf ook groter is dan 2. Hiervoor bekijken we de grafiek van de functie met als voorschrift

$$y = f(x) = \frac{2x}{x-2}.$$

Met behulp van het GeoGebra hebben we hieronder de grafiek van deze functie geschetst:



Figuur 3

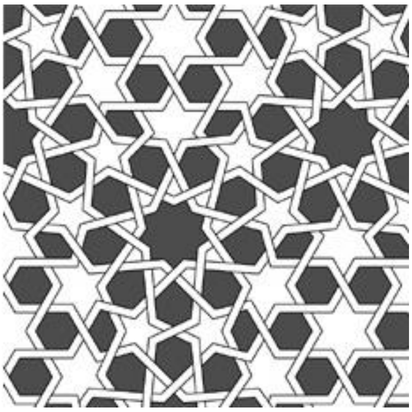
Hierop kan je aflezen dat er precies drie punten (k,n) liggen die aan de voorwaarde voldoen:

A(3,6) : levert een betegeling op met gelijkzijdige driehoeken, waarvan er 6 in elk hoekpunt samenkomen;

B(4,4) : levert een betegeling op met vierkanten, waarvan er 4 in elk hoekpunt samenkomen;

C(6,3) : levert een betegeling op met regelmatige zeshoeken, waarvan er 6 in elk hoekpunt samenkomen.

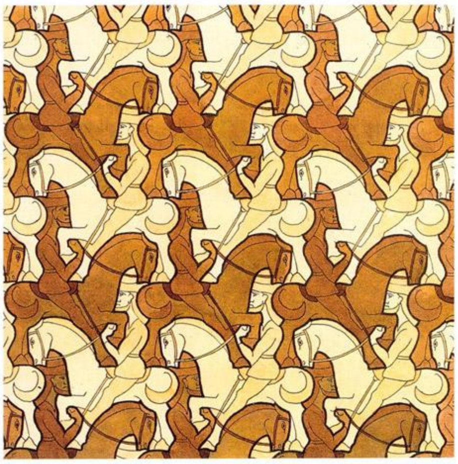
Uiteraard zijn er heel wat andere niet-regelmatige betegelingen mogelijk. In de Moorse kunst kom je schitterende voorbeelden hiervan tegen zoals bijvoorbeeld in het Alhambra in het Zuid-Spaanse Granada. Op figuur 4 zie je een voorbeeld hiervan.



Figuur 4

Je kunt zelf gaan experimenteren met behulp van het gratis Java-applet Taprats geschreven door Craig S. Kaplan: http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/washington/taprats/applet.html .
Wie meer wil weten over betegelingen, kan terecht op de website van Jos Hendriks:
http://www.kleurrijkewiskunde.nl/ .

Als we het hebben over vlakvullingen mogen we zeker de wereldvermaarde artistieke prenten van de Nederlandse graficus **Maurits Cornelis Escher** (1898 - 1972) niet vergeten. Hieronder staat één van zijn kunstwerkjes afgebeeld.



Figuur 5

En wist je dat **Peter Raedschelders** de 'Vlaamse Escher' genoemd wordt? Voor wie hierover meer wil weten en voor wie zelf een tekening wil maken in de stijl van Escher, verwijzen we naar www.gnomon.bloggen.be (zoekopdracht: Escher)

Luc Gheysens - 2012