

Vergelijkingen en ongelijkheden van de tweede graad

1. Vergelijkingen van de tweede graad in x = vierkantsvergelijkingen

$$a x^2 + b x + c = 0 \text{ met } a \neq 0$$

Hoe oplossingen (wortels) bepalen:

1) **Onvolledige** vierkantsvergelijking, als $b = 0$ of $c = 0$

$$1) a x^2 + b \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (a x + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ of } a x + b = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ of } x = -\frac{b}{a}$$

$$2) a \cdot x^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \text{geen oplossingen}$$

$$\Rightarrow -\frac{c}{a} > 0 \rightarrow \text{twee oplossingen} \rightarrow x = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ of } x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Voorbeelden:

- $2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ of } 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ of } x = \frac{5}{2}$
- $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ of } x = -\frac{3}{2}$
- $3x^2 + 7 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow \text{geen oplossingen}$

2) **Volledige** vierkantsvergelijking: $a x^2 + b x + c = 0$

Bepaal de discriminant $D = b^2 - 4ac$

- Als $D > 0 \Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
- Als $D = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$: dubbele wortel
- Als $D < 0 \Rightarrow \text{geen oplossingen}$

Voorbeelden:

- $3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$
De oplossingen zijn: $x = \frac{5 + \sqrt{49}}{6} = \frac{5 + 7}{6}$ of $x = \frac{5 - \sqrt{49}}{6} = \frac{5 - 7}{6}$
en dus: $x = 2$ of $x = -\frac{1}{3}$
- $4x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$
De oplossing is $x = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$
- $x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0 \rightarrow \text{geen oplossingen}$

2. Som en product van de oplossingen van een vierkantsvergelijking:

Voor een vierkantsvergelijking die x_1 en x_2 als oplossingen heeft geldt:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

→ handig om de oplossingen van een vierkantsvergelijking uit het hoofd te bepalen:

Voorbeeld: $x^2 - x - 42 = 0 \rightarrow S = 1$ en $P = -42 \rightarrow x_1 = 7$ en $x_2 = -1$

De vierkantsvergelijking is dan: $x^2 - Sx + P = 0$ of $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

Voorbeeld: stel een vierkantsvergelijking op waarvan de wortels 2 en 3 zijn.

$S = 2 + 3 = 5$, $P = 2 \cdot 3 = 6$, vierkantsvergelijking: $x^2 - 5x + 6 = 0$

3. Ontbinden in factoren

$ax^2 + bx + c$: bepaal de discriminant $D = b^2 - 4ac$

- Als $D > 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Als $D = 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
- Als $D < 0 \rightarrow ax^2 + bx + c$ is onontbindbaar

Voorbeelden:

- $6x^2 + 5x - 4$ $D = 25 + 96 = 121 > 0$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{12} \text{ en dus: } x_1 = -\frac{4}{3} \text{ en } x_2 = \frac{1}{2}$$

$$6x^2 + 5x - 4 = 6\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{3x+4}{3}\right)\left(\frac{2x-1}{2}\right) = (3x+4)(2x-1)$$

- $4x^2 + 12x + 9$ $D = 144 - 144 = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

$$4x^2 + 12x + 9 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 2^2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left[2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)\right]^2 = (2x+3)^2$$

- $x^2 + x + 1$ $D = 1 - 4 = -3 < 0$ $x^2 + x + 1$ is onontbindbaar

4. Bikwadratische vergelijkingen

Algemene gedaante: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

Stel $x^2 = t$. De vergelijking wordt dan: $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$

Nadien keert men terug naar de onbekende x .

Voorbeeld: $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

$$\text{Stel } x^2 = t \rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \rightarrow D = 1 + 8 = 9$$

$$t = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow t = \frac{2}{4} \text{ of } t = -1$$

$$x^2 = \frac{2}{4} \text{ of } x^2 = -1 \quad x^2 = -1 \text{ is onmogelijk}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ of } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. Gebroken vergelijkingen: de onbekende x komt voor in de noemer van een breuk

Voorbeeld:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{-x^2}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = 0$$

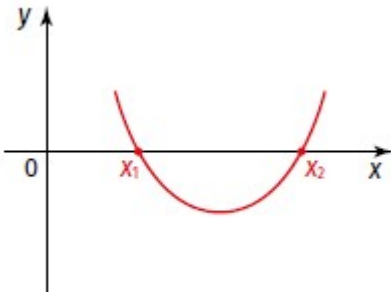
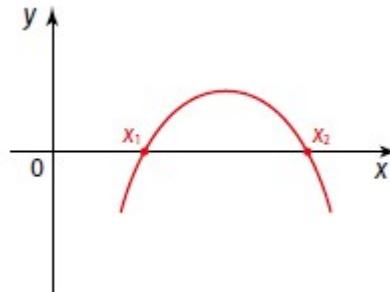
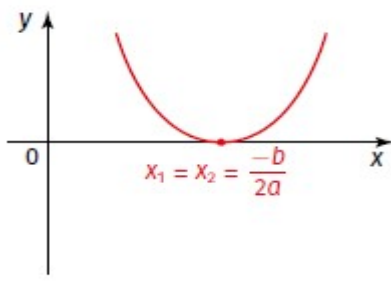
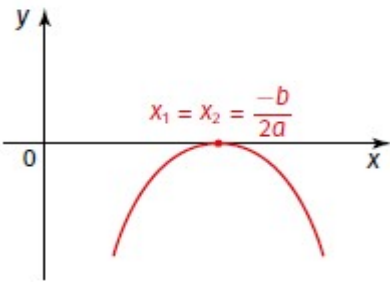
$$\frac{1}{x+2}(x^2-4) + \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x+2)} + \frac{x^2 \cdot (x^2-4)}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$x-2+x^2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ of } x=-2$$

MAAR: voor $x = -2$ wordt in de gegeven vergelijking gedeeld door 0.

1 is de enige oplossing van de oorspronkelijke vergelijking.

6. Tekentabel van een tweedegraadsfunctie

	$a > 0$	$a < 0$																																				
$D > 0$	 <table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> Algemeen:<table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>teken van a</td><td>0</td><td>teken van -a of: tegengesteld teken van a</td><td>0</td><td>teken van a</td></tr></table>	x		x_1		x_2		f(x)	+	0	-	0	+	x		x_1		x_2		f(x)	teken van a	0	teken van -a of: tegengesteld teken van a	0	teken van a	 <table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		x_1		x_2		f(x)	-	0	+	0	-
x		x_1		x_2																																		
f(x)	+	0	-	0	+																																	
x		x_1		x_2																																		
f(x)	teken van a	0	teken van -a of: tegengesteld teken van a	0	teken van a																																	
x		x_1		x_2																																		
f(x)	-	0	+	0	-																																	
$D = 0$	 <table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> Algemeen:<table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>teken van a</td><td>0</td><td>teken van a</td></tr></table>	x		x_1		f(x)	+	0	+	x		x_1		f(x)	teken van a	0	teken van a	 <table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		x_1		f(x)	-	0	-												
x		x_1																																				
f(x)	+	0	+																																			
x		x_1																																				
f(x)	teken van a	0	teken van a																																			
x		x_1																																				
f(x)	-	0	-																																			

$D < 0$						
Algemeen:	<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>teken van a</td></tr></table>		x		$f(x)$	teken van a
x						
$f(x)$	teken van a					

De nulpunten van de tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn de oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$

Voorbeeld: Onderzoek het teken van $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Berekening van de nulwaarden:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - 4}{-2} = 3, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + 4}{-2} = -1$$

x		-1		3	
f(x)	-	0	+	0	-
	grafiek ligt onder de x-as		grafiek ligt boven de x-as		grafiek ligt onder de x-as

7. Ongelijkheden van de tweede graad oplossen

Methode:

- 1) De ongelijkheid herleiden op 0 tot de vorm $f(x) < 0$ ($\leq, >, \geq$)
- 2) Nulpunten bepalen van de verkregen kwadratische functie
- 3) Tekentabel opstellen
- 4) Oplossingsverzameling aflezen

Voorbeeld: $x^2 - 7x - 30 > 0$

Onderzoek waar de functie $f(x) = x^2 - 7x - 30$ strikt positief is

Bepaal eerst de nulpunten: $x^2 - 7x - 30 = 0 \rightarrow D = 49 + 120 = 169 = 13^2$

$$\rightarrow x = \frac{7 \pm 13}{2} \rightarrow x = -3 \text{ of } x = 10$$

Tekentabel van $x^2 - 7x - 30$:

x		-3		10	
f(x)	+	0	-	0	+

De oplossing is: $x \in]-\infty, -3[\cup]10, +\infty[$