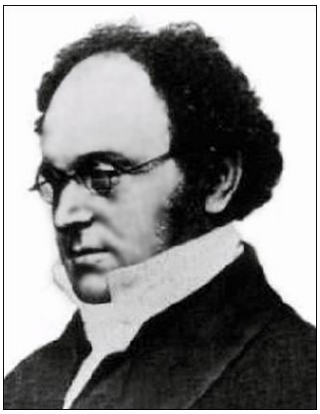
LOGICA OP HET MENU
DEEL 2

Dr. Luc Gheysens en Daniël Tant



Augustus De Morgan (1806 – 1871) was een Britse wiskundige die vooral bekend is gebleven voor zijn werk op het gebied van de logica en meerbepaald door de naar hem genoemde 'Wetten van De Morgan'. Hij zou ook de eerste wiskundige zijn die een bewijs door volledige inductie (zie verder in dit artikel) kon hard maken.

Voor twee proposities p en q luiden de wetten:

niet (p en q) = (niet p) of (niet q)
niet (p of q) = (niet p) en (niet q).

We illustreren deze wetten aan de hand van enkele voorbeelden.

- Als het niet waar is dat Lode een fiets heeft en een bromfiets, dan betekent dit dat hij geen fiets heeft of geen bromfiets (of geen van beide).
- Als het niet waar is dat Lieselot een hond heeft of een kat, dan betekent dit dat ze geen hond heeft en geen kat.
- In de tweede ronde van de JWO-wedstrijd van 2014-2015 was dit vraag 27.

Als het in Knokke minstens 27°C én zonnig is, dan zit het strand overvol. Op 21 juli 2014 zat het strand niet overvol. Wat kan je dan besluiten over het weer op die dag?

(A) Als het minstens 27°C was, dan was het zonnig.

(B) Als het minder dan 27°C was, dan was het zonnig.

(C) Als het minder dan 27°C was, dan was het niet zonnig.

(D) Het was minder dan 27°C en het was niet zonnig.

(E) Het was minder dan 27°C of het was niet zonnig.

Wie de wetten van De Morgan kent zal onmiddellijk weten dat (E) het juiste antwoord is.

Puzzelaars weten logica-problemen zeker te waarderen en met een logisch raadsel heb je vast en zeker succes bij wiskundigen. Wiskundelessen bieden heel wat kansen tot logisch redeneren via bewijsvormen: een bewijs uit het ongerijmde, een bewijs door contrapositie, het belang van een tegenvoorbeeld, een bewijs door volledige inductie, een direct bewijs, een bewijs met een nodige en voldoende voorwaarde … Dat heel wat studenten hier toch enige moeite mee hebben, kunnen we o.a. besluiten over hoe goed (lees: slecht) logica-vragen werden opgelost in de voorbije 30 edities van de Vlaamse Wiskunde Olympiade (VWO voor leerlingen van de derde graad en JWO = Junior Wiskunde Olympiade voor leerlingen van de tweede graad). Vandaar dat een aantal leerkrachten toch weer teruggrijpen naar de elementaire propositielogica om zo het wiskundig redeneren toch wat te funderen. Een zaak die we zeker kunnen aanmoedigen. Met wat elementaire logica, gekruid met een leuke paradox kan een wiskundeleraar in elk geval 'scoren' bij een groot aantal leerlingen.

We bieden de lezer daarom graag een LOGICAMENU aan:

APERITIEF: een uitdagend logica-raadsel

VOORGERECHT: een vleugje propositielogica

HOOFDGERECHT: 5 meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie

NAGERECHT: een wiskundige bewijsvorm in de kijker

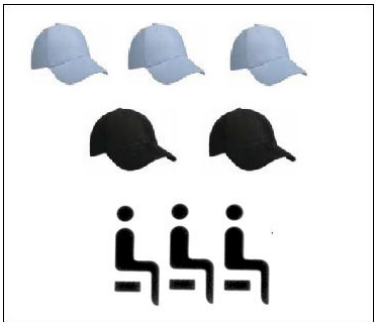
AFZAKKERTJE: een logische paradox

SMAKELIJK!

Een uitdagend logicaraadsel.

Op een rij staan drie stoelen en drie snuggere studenten nemen elk op één van deze stoelen plaats. Een vriend van hen zegt dat hij 5 petjes bij zich: twee blauwe en drie zwarte. Hij zet bij elk van hen een petje op, maar ze hebben alle drie niet gezien welk petje ze zelf op hebben. De achterste ziet de petjes van de twee vrienden die voor hem zitten. De middelste ziet enkel het petje van de eerste op de rij, die zelf geen enkel petje ziet.

Aan de achterste student wordt gevraagd: "Weet jij welke kleur van pet je op hebt?"
Hij kijkt naar de twee petjes voor zich, denkt even na en zegt dan: "Nee."
Vervolgens wordt dit aan de middelste gevraagd. Die ziet maar één petje voor zich,
denkt na en antwoordt ook ontkennend.
De voorste is even stil en zegt: "Dan weet ik de kleur van mijn petje!" Welke kleur is dat?



Oplossing. De derde (achterste) ziet geen twee blauwe petjes, want anders weet hij direct dat hij zelf een zwarte petje op heeft. Er zijn dus drie mogelijkheden voor het petje van de middelste (M) en van de voorste (V): (M,V) = (blauw, zwart) of (M,V) = (zwart, blauw) of (M,V) = (zwart, zwart). Als de voorste dus een blauw petje zou op hebben (wat de middelste kan zien), dan zou de middelste met zekerheid weten dat hij zelf een zwart petje op heeft. Maar aangezien hij het antwoord schuldig blijft, weet de voorste dat ofwel (M,V) = (blauw, zwart) ofwel (M,V) = (zwart, zwart) en bijgevolg moet hij een zwart petje op hebben.

Een beetje propositielogica.

Op proposities kan men 'bewerkingen' uitvoeren:

uitspraak	in symbolen	naam
niet p	$\neg p$	negatie
p en q	$p \wedge q$	conjunctie
p of q	$p \vee q$	disjunctie

- Voor de **negatie** (ontkenning) van de propositie p wordt naast de notatie $\neg p$ ook soms $\sim p$ gebruikt. De negatie verandert de waarheidswaarde van een propositie, zoals blijkt uit de onderstaande waarheidstabel:

p	$\neg p$
1	0
0	1

- Voor de **conjunctie** van de proposities p en q gebruikt men naast de notatie $p \wedge q$ ook soms p & q. De (samengestelde) propositie $p \wedge q$ is enkel waar als zowel p en q waar zijn. Dit blijkt uit de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- Voor de **disjunctie** van de proposities p en q gebruikt men de notatie $p \vee q$. Met "p of q" bedoelt men hier de zogenaamde *inclusieve of* , m.a.w. $p \vee q$ is waar als ofwel p waar is, ofwel q ofwel allebei. Zo kan iemand korting krijgen in Kinepolis als hij een studentenkaart heeft of als medewerker is bij Kinepolis. Een medewerker die student is, geniet dan van dezelfde korting. In dit geval ziet de waarheidstabel er als volgt uit:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Hiermee stellen we nu de waarheidstabel op voor de wetten van De Morgan. De cijfertjes in de onderste rij van de tabel staan in het vetjes gedrukt en verwijzen naar de volgorde (voor de kolommen) waarin men de cijfers 1 (voor waar) en 0 (voor onwaar) invult. Het eindresultaat staat in een rechthoekje (met onderaan het in vetjes afgedrukte cijfer 5). Aangezien deze slotkolom telkens uitsluitend het cijfer 1 bevat, hebben we te maken met een **tautologie** (een geldige logische wet).

De eerste wet van De Morgan

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

de negatie van (p en q) is (niet p of niet q)

p	q	$\neg$	(	p	$\wedge$	q	)	$\Leftrightarrow$	(	$\neg$ p	$\vee$	$\neg$ q)
1	1	0	1	1	1		1		0	0		0
1	0	1	1	0	0		1		0	1		1
0	1	1	0	0	1		1		1	1		0
0	0	1	0	0	0		1		1	1		1
1	**1**	**4**	**2**	**3**	**2**		**5**		**2**	**4**		**2**

De tweede wet van De Morgan

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

de negatie van (p of q) is (niet p en niet q)

p	q	¬ (p ∨ q)				⇔	(¬ p	∧	¬ q)
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	**1**	**4**	**2**	**3**	**2**	**5**	**2**	**4**	**2**

Zeven meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie.

© Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

We dagen je uit om deze zeven vragen op te lossen. Op het einde vind je – ter controle – de juiste antwoorden.

VRAAG 1 – VWO 1997-1998 – tweede ronde – vraag 24

In een proces zijn er vier beklaagden. Er staat vast dat

- als A schuldig is, dan is B ook schuldig;
- als B schuldig is, dan volgt dat C ook schuldig is of dat A onschuldig is;
- als D onschuldig is, dan volgt dat A schuldig is en dat C onschuldig is;
- als D schuldig is, dan is A ook schuldig.

Het aantal schuldigen is dus gelijk aan

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) niet te bepalen uit de gegevens.

VRAAG 2 – VWO 1998-1999 – eerste ronde – vraag 6

Vijf sympathieke leerlingen willen voor hun lerares wiskunde een verjaardagscadeautje kopen.

- Gunther denkt dat ze 38 wordt op 16 maart.
- Kris denkt dat ze 40 wordt op 17 april.
- Luk denkt dat ze 38 wordt op 17 april.
- Olivier denkt dat ze 38 wordt op 17 maart.
- Steven denkt dat ze 40 wordt op 16 maart.

Als we aannemen dat één van hen gelijk heeft en de anderen niet volledig ongelijk (d.w.z. ze hebben minstens de leeftijd of de dag of de maand correct), wie heeft dan gelijk?

(A) Gunther	(B) Kris	(C) Luk	(D) Olivier	(E) Steven

VRAAG 3 – VWO 2003-2004 – eerste ronde – vraag 22

- Kwik zegt: "We zijn alledrie leugenaars."
- Kwek antwoordt: "Jij bent hier de enige leugenaar."
- Kwak zegt: "Jullie zijn allebei leugenaars."

Als elk van hen ofwel altijd liegt, ofwel altijd de waarheid spreekt, wie spreekt dan de waarheid?

(A) geen van de drie	(B) alleen Kwik	(C) alleen Kwek
(D) alleen Kwak	(E) alledrie	

VRAAG 4 – VWO 2009-2010 – tweede ronde – vraag 2

Alle katten met blauwe ogen zijn sloom. Een slome kat kan geen muizen vangen. Alle witte katten hebben blauwe ogen. Ik zag mijn kat Bourbaki een muis vangen. Wat kan je zeker besluiten?

(A) Bourbaki had voordien nog nooit een muis gevangen.
(B) Bourbaki is sloom.
(C) Bourbaki is niet wit.
(D) Bourbaki heeft blauwe ogen.
(E) Bourbaki heeft bruine ogen.

VRAAG 5 – VWO 2010-2011 – eerste ronde – vraag 4

De leraar wiskunde zegt: "Iedereen behaalde minstens 8 op 10", maar achteraf blijkt dat niet waar te zijn. Dit betekent:

(A) Alle leerlingen behaalden minder dan 8 op 10.
(B) Minstens één leerling behaalde minder dan 8 op 10.
(C) Alle leerlingen behaalden meer dan 8 op 10.
(D) Minstens één leerling behaalde meer dan 8 op 10.
(E) Sommigen behaalden minder dan 8 op 10 en sommigen behaalden meer dan 8 op 10.

OPLOSSINGEN

VRAAG 1. Antwoord: D.

Er is gegeven dat:
(1) als A schuldig is, dan is B ook schuldig;
(2) als B schuldig is, dan volgt C ook schuldig is of dat A onschuldig is;
(3) als D onschuldig is, dan volgt dat A schuldig is en dat C onschuldig is;
(4) als D schuldig is, dan is A ook schuldig.

Stel dat D onschuldig is. Dan volgt uit (3) dat A schuldig is en dat C onschuldig is. We besluiten uit (1) dat B schuldig is en dan volgt uit (2- dat A onschuldig is of dat C schuldig is. Dit is telkens in strijd met eerdere resultaten. De veronderstelling dat D onschuldig is, is dus foutief zodat we moeten concluderen dat D schuldig is. Uit (4) volgt dan dat A schuldig is. Wegens (1) is ook B schuldig en wegens (2) is ook C schuldig. Het aantal schuldigen is dus gelijk aan 4.

VRAAG 2. Antwoord: D.

Stel G = {38, 16, maart} (de bewering van Gunther) en analoog voor de andere beweringen K = {40, 17, april}, L = {38, 17, april}, O = {38, 17, maart}, S = {40, 16, maart}. Enkel de verzameling O heeft dan met de andere verzamelingen telkens één element gemeenschappelijk.

VRAAG 3. Antwoord: D.

We duiden de uitspraken aan met I, II en III en we gaan alle mogelijkheden na om te zien of er een tegenspraak is met de drie uitspraken. Met W duiden we ‘de waarheid spreken’ aan en met L ‘liegen’.

Kwik	Kwek	Kwak	in tegenspraak met
W	W	W	I, II en III
W	W	L	I en II
W	L	W	I en III
W	L	L	I
L	W	W	III
L	W	L	II
L	L	W	geen enkele tegenspraak
L	L	L	I en III

VRAAG 4. Antwoord: C.

Veronderstel even dat Bourbaki wél wit is. Dan heeft hij blauwe ogen en is hij ook sloom. Daat een slome kat geen muizen vangt en Boubaki dat wel doet, is onze veronderstelling fout. Bourbaki is bijgevolg zeker niet wit.

VRAAG 5. Antwoord: B.

Als niet iedereen minstens 8 op 10 behaalde, betekent dit dat ten minste één leerling minder dan 8 op 10 behaalde.

Een wiskundige bewijsvorm: een bewijs door volledige inductie.

Om aan te tonen dat een uitspraak E_n geldig is voor alle natuurlijke getallen $n \geq m$ (met m zelf een natuurlijk getal), gaat men als volgt te werk.

- Basisstap: toon aan dat E_m geldig is.
- Inductiestap: neem aan dat E_p geldig is voor een natuurlijk getal p met $p \geq m$ en bewijs dat E_{p+1} geldig is.

Dan volgt hieruit dat E_n geldig is voor alle natuurlijke getallen $n \geq m$.

We illustreren dit principe aan de hand van een voorbeeld.

EIGENSCHAP: Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt dat

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

BEWIJS.

- Basisstap: de formule is correct voor n = 1.
  Men verifieert direct dat $1^2 = \frac{1.2.3}{6}$.
- Inductiestap.
  Gegeven: de formule is correct voor de waarde $p \geq 1$, m.a.w.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}. \qquad (1)$$

Te bewijzen: de formule is ook correct voor de waarde p + 1, m.a.w.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 + (p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}. \qquad (2)$$

Bewijs.
Om (2) te bewijzen vervangen we in het linkerlid van (2) de waarde van $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2$ door de waarde in het rechterlid van de formule (1) en vinden zo dat

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(p+1)(2p^2 + p + 6p + 6)}{6}$$

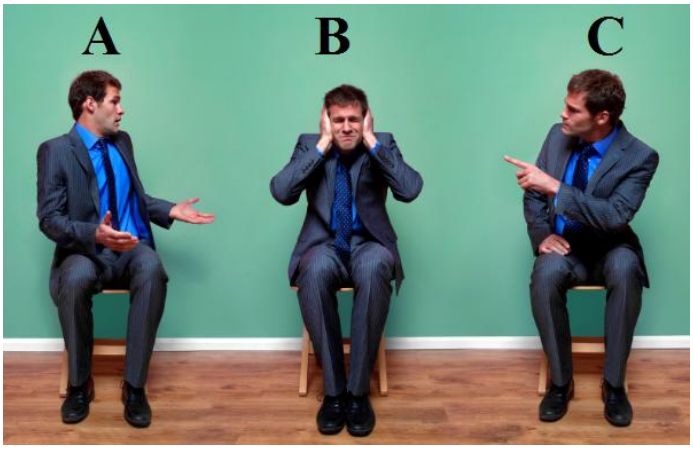
$$= \frac{(p+1)(2p^2 + 7p + 6)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Uitdaging voor de lezer. Toon de volgende eigenschap aan via een bewijs door volledige inductie:

EIGENSCHAP.
Voor alle natuurlijke getallen n met $n \geq 1$ geldt dat $3^{n+1} + 2^{n-1}$ deelbaar is door 7.

Een logische paradox: de paradox van Condorcet



Deze paradox is genoemd naar de Franse wiskundige en filosoof Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1785).

Veronderstel dat er bij verkiezingen drie kandidaten zijn, André (A), Bernard (B) en Charles (C) en 300 kiesgerechtigden. De kiezers wordt gevraagd dat ze elk op een briefje de letters A, B en C in de volgorde van hun voorkeur zetten: de meest geschikte kandidaat eerst, dan de tweede en als laatste wie ze als de minst geschikte aanzien.

Bij het tellen van de uitgebrachte stemmen blijkt het volgende:

- 100 mensen kozen als volgorde A – B – C.
- 100 mensen kozen als volgorde B – C – A.
- 100 mensen kozen als volgorde C – A – B.

Wie van de drie kandidaten kan de verkiezingsoverwinning opeisen?

A zeker niet, want C behaalde bij tweederden van de kiezers een betere score. C zeker ook niet, want B behaalde bij tweederden van de kiezers een betere score. Dan zou je denken dat B het haalt, maar dan blijkt weer dat A bij tweederden van de kiezers een betere score haalt dan B …

Luc Gheysens <lucgheysens@yahoo.com>
Populierenlaan 10, 8520 Kuurne
ere-pedagogisch adviseur wiskunde

Daniël Tant <tant.daniel@telenet.be>
Beekstraat 61, Oedelem,
is tevens hoofdredacteur van dit tijdschrift

REFERENTIES

1. **W. Berkelmans**, Logica waar of onwaar, Faculteit der Wetenschappen, Vrije Universiteit Amsterdam, 2005.
2. **M. Roelens, P. Tytgat**, Logica (onder de loep), Uitwiskeling**,** jaargang 27 nummer 2, lente 2011.
3. **S. Verwulgen, E. Soetens,** Wiskunde voor de beginnende bachelor, Academia Press, 2008.