Als men n kaartjes die genummerd zijn van 1 tot en met n in een willekeurige volgorde neerlegt, dan is de kans dat het getal op het k-de kaartje groter is dan het getal op alle vorige kaartjes gelijk aan $\frac{1}{k}$ (onafhankelijk van n).

GEVOLG. De kans dat alle kaartjes in de juiste volgorde liggen is $\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$, (EVIDENT!)

- Voor $k=1$ is dit TRIVIAAL.

  Immers voor het eerste kaartje dat men neerlegt, zijn er geen vorige kaartjes en bijgevolg is de gezochte kans $\frac{1}{1}$.

- Voor $k=2$.

  HULPFORMULE. $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ (gekende formule). met $n \geq 2$

  BEWIJS VAN DE EIGENSCHAP

	aantal gunstige gevallen
$\times\ 1\ \ldots$	0
$\times\ 2\ \ldots$	$1.(n-2)!$
$\times\ 3\ \ldots$	$2.(n-2)!$
$\ldots$	
$\times\ (n-1)\ \ldots$	$(n-2).(n-2)!$
$\times\ n\ \ldots$	$(n-1).(n-2)!$

getal op het 2de kaartje

$$\text{kans}=\frac{[1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)].(n-2)!}{n!}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$=\frac{n!}{2.n!}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

• voor $k=3$

HULPFORMULE $1.2+2.3+3.4+\dots+(n-2)(n-1)=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)\quad(n\geq 3)$

BEWIJS DOOR VOLLEDIGE INDUCTIE

- Basisstap: $n=3$ dan is $1.2=\frac{1}{3}.3.2.1.$ is OK!
- Inductiestap

GEGEVEN: $1.2+2.3+\dots+(p-2)(p-1)=\frac{1}{3}p(p-1)(p-2)$

TE BEWIJZEN: $1.2+2.3+\dots+(p-2)(p-1)+(p-1)p=\frac{1}{3}(p+1)p(p-1)$

BEWIJS:

$$\underline{1.2+2.3+\dots+(p-2)(p-1)}+(p-1)p\overset{(geg.)}{=}\underline{\frac{1}{3}p(p-1)(p-2)}+\frac{3p(p-1)}{3}$$

$$=\frac{1}{3}p(p-1)\left[p-2+3\right]$$

$$=\frac{1}{3}p(p-1)(p+1).$$

BEWIJS VAN DE EIGENSCHAP

	aantal gunstige gevallen
x x 1 ...	0
x x 2 ...	0
x x 3 ...	$2.C_2^2.(n-3)! = 1.2.(n-3)!$
x x 4 ...	$2.C_3^2.(n-3)! = 2.3.(n-3)!$
x x 5 ...	$2.C_4^2.(n-3)! = 3.4.(n-3)!$
...	...
x x p ...	$2.C_{p-1}^2(n-3)! = (p-1)(p-2)(n-3)!$
...	...
x x $(n-1)$ ...	$2\,C_{n-2}^2.(n-3)! = (n-3).(n-2).(n-3)!$
x x n ...	$(n-1)!$ (in alle gevallen OK) $=(n-2)(n-1).(n-3)!$

getal op het 3de kaartje

factor 2 wegens de mogelijkheid om de eerste 2 kaartjes om te wisselen

$$\text{kans}=\frac{\left[1.2+2.3+3.4+\dots+(n-3)(n-2)+(n-2)(n-1)\right].(n-3)!}{n!}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}n(n-1)(n-2).(n-3)!}{n!}$$

$$=\frac{n!}{3.n!}$$

$$=\frac{1}{3}$$

- Voor $k=4$

HULPFORMULE $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1) = \frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3)$ $(n \geq 4)$

BEWIJS DOOR VOLLEDIGE INDUCTIE

- Basisstap : $n=4$ dan is $1.2.3 = \frac{1}{4}.4.3.2.1$ is ok!
- Inductiestap

GEGEVEN : $1.2.3 + \ldots + (p-3)(p-2)(p-1) = \frac{1}{4} p(p-1)(p-2)(p-3)$

TE BEWIJZEN: $1.2.3 + \ldots + (p-2)(p-1)p = \frac{1}{4}(p+1)p(p-1)(p-2)$

BEWIJS.

$$\underline{1.2.3 + \ldots + (p-3)(p-2)(p-1)} + (p-2)(p-1)p \overset{(geg.)}{=} \frac{1}{4} p(p-1)(p-2)(p-3) + \frac{4(p-2)(p-1)p}{4}$$

$$= \frac{1}{4} p(p-1)(p-2)\left[p-3+4\right]$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)p(p-1)(p-2).$$

BEWIJS VAN DE EIGENSCHAP

	aantal gunstige gevallen
XXX 1 ...	0
XXX 2 ...	0
XXX 3 ...	0
XXX 4 ...	$3!\,(n-4)! = 3!\,C_3^3.(n-4)! = 1.2.3.(n-4)!$
XXX 5 ...	$3!\,C_4^3.(n-4)! = 3!\,\frac{1.2.3.4}{1.2.3}(n-4)! = 2.3.4\,(n-4)!$
...	
XXX $(n-1)$ ...	$3!\,C_{n-2}^3.(n-4)! = 3!\,\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{3!}.(n-4)! = (n-4)(n-3)(n-2)(n-4)!$
XXX n ...	$(n-1)!$ (in alle gevallen ok) $= (n-3)(n-2)(n-1).(n-4)!$

getal op het 4de kaartje.

factor 3! wegens de mogelijkheid om de eerste 3 kaartjes om te wisselen.

$$\text{Kans} = \frac{\left[1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + (n-4)(n-3)(n-2) + (n-3)(n-2)(n-1)\right].(n-4)!}{n!}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3).\,(n-4)!}{n!}$$

$$= \frac{n!}{4.n!}$$

$$= \frac{1}{4}$$

LUC GHEYSENS - www.gnomon.bloggen.be

• voor (algemeen) k

HULPFORMULE

$$1.2\ldots(k-1) + 2.3\ldots k + 3.4\ldots(k+1) + \ldots + (n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)$$
$$= \frac{1}{k}.\, n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad (n \geq k-1)$$

BEWIJS DOOR VOLLEDIGE INDUCTIE

. Basisstap : $n = k$ dan is $1.2\ldots(k-1) = \frac{1}{k}.\, k(k-1)\ldots 2.1$ is OK!

. Inductiestap

GEGEVEN : $1.2\ldots(k-1) + \ldots (p+1)(p+2)\ldots(k+p-1) = \frac{1}{k}(k+p)(k+p-1)\ldots(p+1)$

↓

formule geldig voor $n = k+p$

TE BEWIJZEN

↓

formule is geldig voor $n = k+p+1$

$$\underbrace{1.2\ldots(k-1) + \ldots + (p+1)(p+2)\ldots(k+p-1)}_{\text{gegeven}} + (p+2)(p+3)\ldots(p+k)$$

$$= \frac{1}{k}(k+p)(k+p-1)\ldots(p+1) + \frac{k(p+2)(p+3)\ldots(k+p)}{k}$$

$$= \frac{1}{k}(k+p)(k+p-1)\ldots(p+2)\,[(p+1)+k]$$

$$= \frac{1}{k}(k+p+1)(k+p)\ldots(p+2) \quad \text{wat te bewijzen is.}$$

BEWIJS VAN DE EIGENSCHAP aantal gunstige gevallen

$xx\ldots x \; k \ldots$ $\qquad (k-1)!\,(n-k)! = 1.2\ldots(k-1).(n-k)!$

$xx\ldots x \; (k+1)\ldots$ $\qquad (k-1)!\,C_k^{k-1}.(n-k)! = (k-1)!\frac{k!}{(k-1)!1!}(n-k)!$

$= k!\,(n-k)!$

$= 2.3\ldots k.(n-k)!$

$xx\ldots x \; (k+2)\ldots$ $\qquad (k-1)!\,C_{k+1}^{k-1}(n-k)! = (k-1)!\frac{(k+1)!}{(k-1)!2!}(n-k)!$

$= 3.4\ldots(k+1).(n-k)!$

$xx\ldots x \; (k+3)\ldots$ $\qquad (k-1)!\,C_{k+2}^{k-1}(n-k)! = (k-1)!\frac{(k+2)!}{(k-1)!3!}(n-k)!$

$= 4.5\ldots(k+2)(n-k)!$

...

$xx\ldots x \; n \ldots$ $\qquad (n-1)! = (k-1)!\,C_{n-1}^{k-1}.(n-k)!$

↑

getal op de k-de kaartje

$n! \geq \cancel{(k-1)!}\frac{(n-1)!}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}}.\cancel{(n-k)!}$

$$\text{Kans} \overset{\text{wegens hulpformule}}{=} \frac{\left[\frac{1}{k}\, n(n-1)\ldots(n-k+1)\right](n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k.n!} = \frac{1}{k}$$