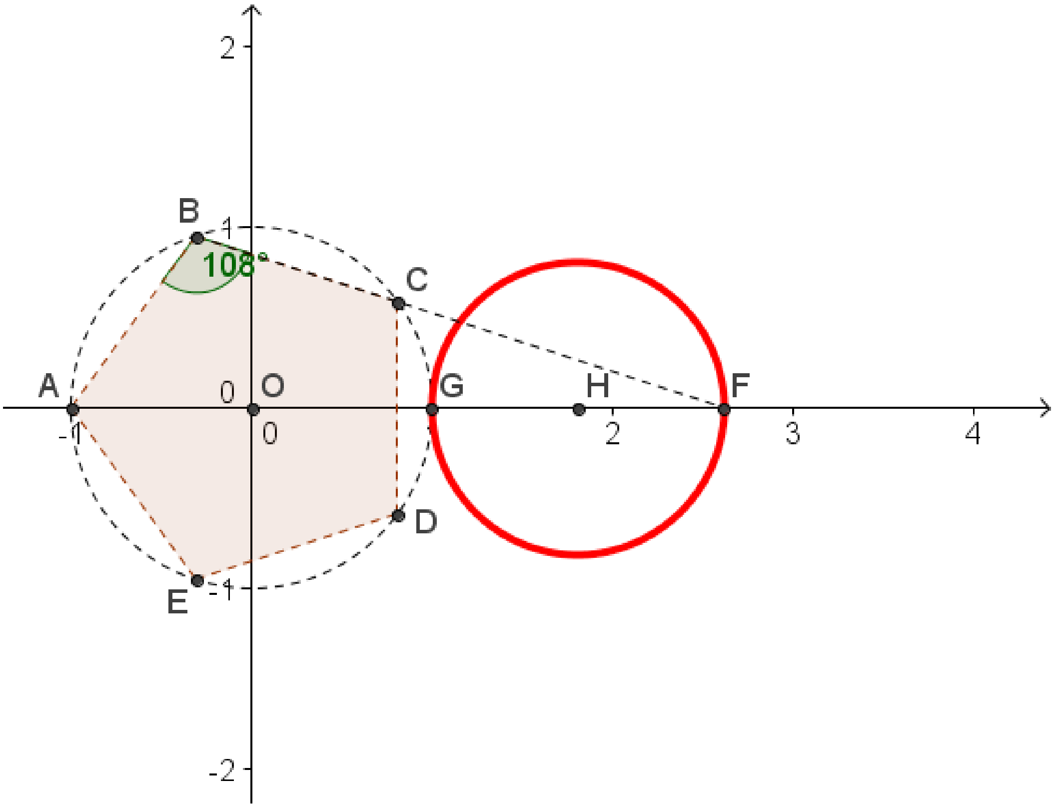
DE PI.PHI-cirkel

de perfecte cirkel



De cirkel met middelpunt O(0,0) en straal 1 snijdt de x-as in de punten A en G. In deze cirkel construeren we de regelmatige vijfhoek ABCDE zoals op de bovenstaande figuur. De rechte BC snijdt de x-as in het punt F en H is het midden van [FG].

EIGENSCHAP. De cirkel met middelpunt H en straal |GH| heeft als omtrek $\pi\phi$, waarbij

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (het getal van de gulden snede).}$$

Bewijs.

Omdat ABCDE een regelmatige vijfhoek is, is $\widehat{ABF} = 108°, \widehat{GOB} = 108°, \widehat{OAB} = 54°$ en $\widehat{BAF} = 18°$. Dan is de coördinaat van het punt B (cos 108°, sin 108°) = (- cos 72°, sin 72°). De rechte BF heeft dan als vergelijking:

BF: $y - \sin 72° = -\tan 18° \, (x + \cos 72°)$.

Het snijpunt van deze rechte met de x-as is het punt F(x_F, 0) met

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{\sin 72° - \tan 18° \,.\cos 72°}{\tan 18°} \\ &= \frac{sin^2 72° - cos^2 72°}{\cos 72°} \quad \left(want \tan 18° = \frac{sin 18°}{cos 18°} = \frac{cos 72°}{sin 72°}\right) \\ &= -\frac{cos 144°}{\cos 72°} \; (want \cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha) \\ &= \frac{\cos 36°}{\cos 72°} \quad (supplementaire\ hoeken) \\ &= \frac{(\cos 72° + cos 108°) + cos 36°}{cos 72°} \; (want \cos 72° + \cos 108° = 0) \\ &= \frac{\cos 72° + (\cos 108° + \cos 36°)}{\cos 72°}. \end{aligned}$$

Via de formule van Simpson $\cos\alpha + cos\beta = 2. cos\frac{\alpha+\beta}{2}. cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ vinden we dan dat

$$x_F = \frac{\cos 72° + 2\, cos 72°.cos 36°}{cos 72°}$$

$$= 1 + 2.\cos 36°\,.$$

Aangezien

$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\phi}{2}$$

vinden we dat $x_F = 1 + \phi$.

Bijgevolg is |FG|= ϕ en heeft de cirkel met middelpunt H en straal $|GH| = \frac{\phi}{2}$ als omtrek πϕ. Omdat in deze uitzonderlijke formule de twee 'beroemde' getallen π en ϕ samen voorkomen, beschouwen we deze cirkel als de 'perfecte cirkel' (de pi.phi-cirkel).

Opmerking.
Het punt C bepaalt de gulden snede op het lijnstuk [BF], d.w.z.

$$\frac{|CF|}{|BC|} = \frac{|BF|}{|CF|} = \phi.$$

Bewijs.
Dit laten we 'met een gerust geweten' over aan de lezer die graag 'speelt' met goniometrische formules.
Gebruik de coördinaat van B(- cos 72°, sin 72°), van C (cos 36°, sin 36°) en van F(1 + 2cos 36°, 0) en de analytische formule voor de afstand tussen twee punten.
Dan blijkt dat

$$\frac{|CF|}{|BC|} = \frac{cos 18°}{\cos 54°} = 2. cos 36° = \phi.$$