Het principe van Mamikon en de oppervlakte onder één cycloïdeboog

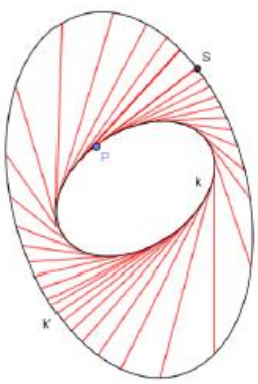
Riggy Van de Wiele en Jef De Langhe

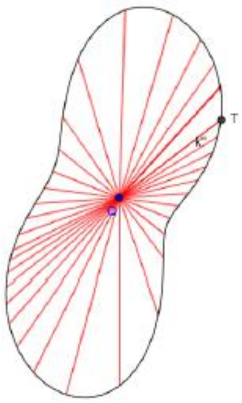
We kunnen de oppervlakte van een cycloïdeboog uiteraard met integraalrekening berekenen.

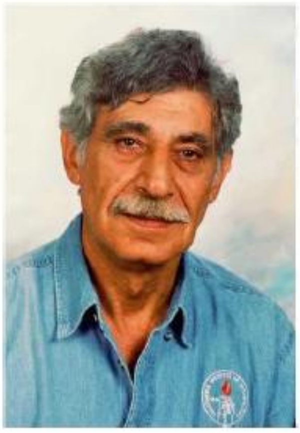
$$A = \int_{t=0}^{t=2\pi} y\,dx = \int_{0}^{2\pi} r^2(1-\cos t)^2\,dt = [r^2(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t]_0^{2\pi} = 3\pi r^2$$

De oppervlakte is dus gelijk aan 3 maal de oppervlakte van de genererende cirkel.

De Armeense wiskundige Mamikon Mnatsakanian bedacht echter in 1959 een elegante methode om de oppervlakte te berekenen zonder integralen. Daartoe ontwikkelde hij het zgn. "principe van Mamikon", dat enige verwantschap toont met principe van Cavalieri. Mamikon gaf een exact bewijs van zijn principe in 1981.

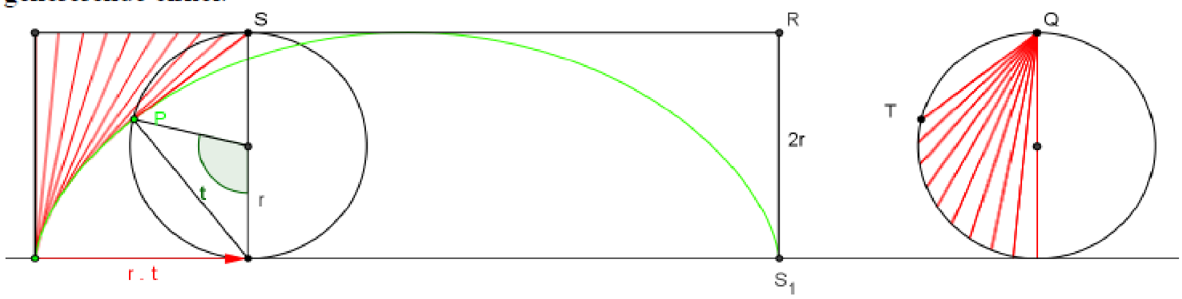






Om de oppervlakte tussen 2 krommen k en k' te bepalen, nemen we een willekeurig punt P op de kromme k. We tekenen in P de raaklijn die de kromme k' snijdt in S. We nemen nu een vast punt Q en verschuiven het lijnstuk $[PS]$ naar $[QT]$. Als P de kromme k doorloopt zal T een kromme k'' doorlopen. Mamikon stelde vast dat de oppervlakte tussen k en k' gelijk is aan de oppervlakte binnen de kromme k''. [6]

Passen we dit toe op de cycloïde, dan zien we dat T een cirkel doorloopt die congruent is met de genererende cirkel.



$$\textit{Oppervlakte boven de cycloïdeboog} = \textit{Oppervlakte cirkel} = \pi r^2$$

$$\textit{Oppervlakte onder de cycloïdeboog} = (2\pi r).(2r) - \pi r^2 = 3\pi r^2$$

[6] Meer over het principe van Mamikon leest u in Uitwiskeling, jaargang 27, nr. 4, pag. 49-54. Daar wordt ook verwezen naar de website www.mamikon.com.