Het onderstaande artikel verscheen in Wiskunde & Onderwijs nr. 159 (2014)

Ceva's Stelling

Jan Guichelaar

Dit artikel verscheen reeds in het januarinummer van 2014 van Pythagoras, Nederlands wiskundetijdschrift voor jongeren.

De stelling van Ceva geeft een prachtig criterium wanneer drie lijnen vanuit de drie hoekpunten van een driehoek elkaar snijden in één punt. Uit de stelling kunnen heel veel standaardeigenschappen van de driehoek worden afgeleid, zoals bijvoorbeeld het feit dat de hoogtelijnen van een driehoek elkaar in één punt snijden. Het is leuk om te proberen zelf een gevolg van deze stelling te bedenken.

Giovanni Ceva (1647 - 1734) was een Italiaans wiskundige en waterbouwkundige, professor in Mantua. Zijn belangrijkste werk, uit 1678, is *De lineis rectis* (Latijn voor *Over rechte lijnen*). In 1711 publiceerde hij *De re nummaria* (*Over geldzaken*), een van de eerste werken over wiskundige economie.

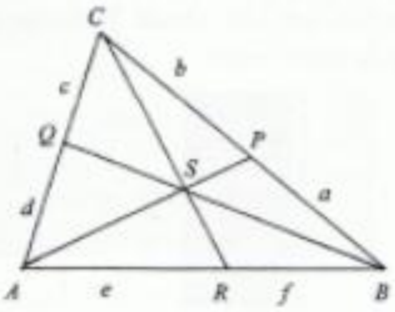
De volgende stelling is naar Ceva vernoemd ; hij publiceerde de stelling in zijn boek uit 1678. Het gaat om een herontdekking, want al in de elfde eeuw werd de stelling bewezen door de Arabische wiskundige Yusuf ibn Ahmad al-Mu'taman ibn Hud. En wie weet kenden de Oude Grieken de stelling ook al.

Stelling van Ceva

Beschouw driehoek ABC in figuur 1. Kies willekeurig een punt S binnen de driehoek. Trek vanuit A, B en C de lijnstukken AP, BQ en CR die alle door S gaan. De punten P, Q en R verdelen de zijden van de driehoek in de stukken a, b, c, d, e en f, en er geldt :

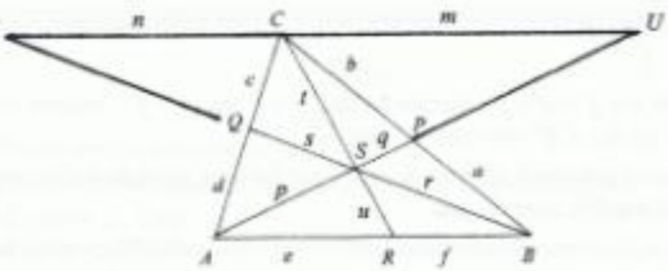
$$\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = 1.$$

Het omgekeerde geldt ook : als de gelijkheid geldt, dan gaan AP, BQ en CR door één punt.



Figuur 1

Het bewijs



Figuur 2

Zie figuur 2.

Trek door C een lijn evenwijdig aan AB.

Verleng AP en BQ tot zij de lijn door C snijden in U en V.

Er gelden de volgende gelijkvormigheden (vanwege de evenwijdigheid van AB en UV zijn de hoeken van elk tweetal driehoeken gelijk) :

- $\Delta\, UCP \sim \Delta\, ABP$,
- $\Delta\, VCQ \sim \Delta\, BAQ$,
- $\Delta\, UCS \sim \Delta\, ARS$,
- $\Delta\, VCS \sim \Delta\, BRS$.

Hieruit volgen de volgende evenredigheden :

- $\dfrac{m}{e+f}=\dfrac{b}{a}$,
- $\dfrac{n}{e+f}=\dfrac{c}{d}$,
- $\dfrac{m}{e}=\dfrac{t}{u}$,
- $\dfrac{n}{f}=\dfrac{t}{u}$.

Kruiselings vermenigvuldigen van de laatste twee geeft $mu=te$ en $nu=tf$, waarmee

$$\frac{m}{n}=\frac{mu}{nu}=\frac{te}{tf}=\frac{e}{f}.$$

Dan krijgen we :

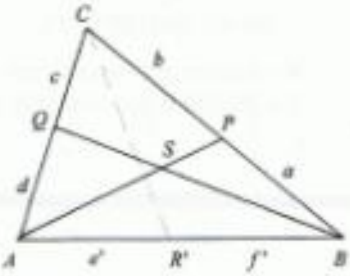
$$\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{e+f}{m}\times\frac{n}{e+f}\times\frac{m}{n}=1.$$

Bekijk figuur 3 voor het bewijs van de omkering.

Stel dat CR' niet door het snijpunt S van AP en BQ gaat en stel dat

$$\frac{a\times c\times e'}{b\times d\times f'}=1.$$

Dan volgt uit de stelling van Ceva met CR door S en de zojuist opgeschreven gelijkheid het volgende :



Figuur 3

$$\frac{e'}{f'} = \frac{e}{f}.$$

Met $e+f=e'+f'$ hebben we dan $e=e'$ en $f=f'$, waaruit volgt dat R' samenvalt met R en dus CR' wél door S gaat.

Deze tegenspraak leidt tot de conclusie dat onze veronderstelling onjuist was en dat CR' dus wel degelijk door S gaat.

Veel driehoekeigenschappen kunnen met Ceva makkelijk worden bewezen.

In de kadertjes zie je een aantal voorbeelden.

Deellijnen

Een deellijn (of bissectrice) deelt een hoek middendoor.

Voor de deellijnen in een driehoek geldt :

$$\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}$$

$$=\frac{a}{\sin\frac{1}{2}\hat{A}}\frac{\sin\frac{1}{2}\hat{A}}{b}\frac{c}{\sin\frac{1}{2}\hat{B}}\frac{\sin\frac{1}{2}\hat{B}}{d}\frac{e}{\sin\frac{1}{2}\hat{C}}\frac{\sin\frac{1}{2}\hat{C}}{f}$$

$$=\frac{e+f}{\sin\hat{P}}\frac{\sin\left(180°-\hat{P}\right)}{c+d}\frac{a+b}{\sin\hat{Q}}\frac{\sin\left(180°-\hat{Q}\right)}{e+f}\frac{c+d}{\sin\hat{R}}\frac{\sin\left(180°-\hat{R}\right)}{a+b}=1$$

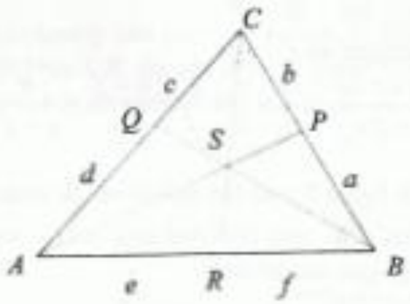
We hebben hier gebruik gemaakt van de sinusregel :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

en van de eigenschap dat

$$\sin\delta=\sin\left(180°-\delta\right).$$

We kunnen nu concluderen dat de drie deellijnen door één punt gaan.



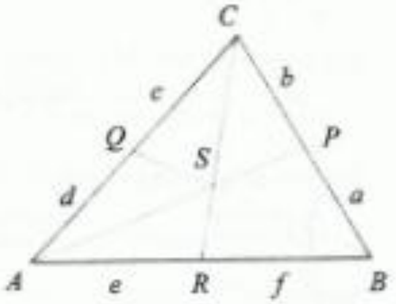
Zwaartelijnen

De zwaartelijnen in een driehoek gaan door één punt.

Omdat de zwaartelijnen de overstaande zijden middendoor delen (per definitie), geldt $a=b$, $c=d$ en $e=f$. Dus

$$\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}=\frac{a\times c\times e}{a\times c\times e}=1.$$

Uit de omgekeerde stelling van Ceva volgt dan dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.



Hoogtelijnen

De hoogtelijnen in een driehoek staan (per definitie) loodrecht op de overstaande zijden. Deze lijnen gaan door één punt.

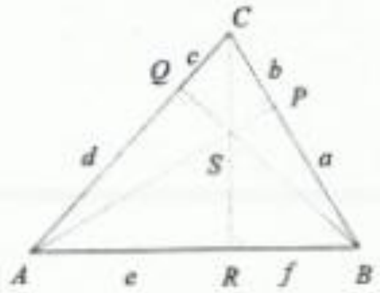
Er geldt namelijk :

- $\cos\hat{A}=\dfrac{c}{c+d}=\dfrac{d}{e+f}$,
- $\cos\hat{B}=\dfrac{a}{e+f}=\dfrac{f}{a+b}$,
- $\cos\hat{C}=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{b}{c+d}$.

Hieruit volgt dat

$$\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}=1,$$

en dus gaan de drie hoogtelijnen door één punt.



Toegift

We kunnen een aardig extra stellinkje afleiden, waarvan ik de naam niet ken.

Er geldt in de driehoek in figuur 2 :

$$\frac{t}{u}=\frac{b}{a}+\frac{c}{d}.$$

Om dit te bewijzen, gebruiken we opnieuw de volgende evenredigheden :

$$\frac{m}{e+f}=\frac{b}{a} \text{ en } \frac{n}{e+f}=\frac{c}{d}. \qquad (*)$$

Wegens gelijkvormige driehoeken geldt :

$$\frac{t}{u}=\frac{m+n}{e+f}.$$

Samen met (*) volgt nu :

$$\frac{t}{u}=\frac{m+n}{e+f}=\frac{\frac{b(e+f)}{a}+\frac{c(e+f)}{d}}{e+f}=\frac{b}{a}+\frac{c}{d}.$$

Je kunt natuurlijk nog twee gelijkheden opschrijven voor de twee andere lijnstukken door S. Dit zijn

$$\frac{p}{q}=\frac{d}{c}+\frac{e}{f} \text{ en } \frac{r}{s}=\frac{a}{b}+\frac{f}{e}.$$

Hiermee leren we ook enkele eigenschappen van de verdeling van de lijnstukken door S kennen.

Een mooie driehoek waarin alle lijnstukken gehele getallen zijn, zie je hiernaast.

Jan Guichelaar <jan@pythagoras.nu>
Pedro de Medinalaan 162
1086 XR Amsterdam.