Complexe getallen en Meetkunde

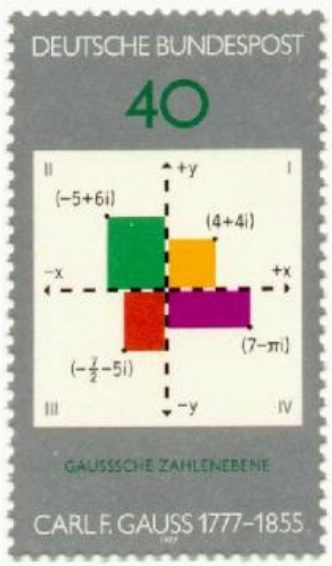
Gert Treurniet

met dank aan

Bert Boon en

Jurjen Feitsma

voor toestemming voor gebruik van hun "syllabus complexe getallen"



Het ontstaan van de complexe getallen

De vergelijking $x^2=-1$ heeft geen reële getallen als oplossing.

Daarom is $\mathbb{R}$ uitgebreid met nieuwe getallen: de oplossingen van de vergelijking $x^2=-1$ zijn i en $-i$ genoemd. Er geldt dus: $i^2=-1$.

Getallen van de vorm $b\cdot i$, met $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, heten **imaginaire getallen**.
Samen met de reële getallen vormen ze de **complexe getallen**, aangegeven met $\mathbb{C}$.

Een complex getal α is van de vorm
$a+b\cdot i$, met $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$.
a heet het **reële deel** van α, $\mathrm{Real}(\alpha)$
b heet het **imaginaire deel** van α, $\mathrm{Imag}(\alpha)$.
Opmerking: Het imaginaire deel is dus een reëel getal.

Het rekenen met complexe getallen

Je rekent met complexe getallen net zoals met reële getallen.

Optellen:

$a+b\cdot i+c+d\cdot i=a+c+(b+d)\cdot i$

Aftrekken:

$a+b\cdot i-(c+d\cdot i)=a-c+(b-d)\cdot i$

Vermenigvuldigen:

$(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)=a\cdot c+(b+d)\cdot i-b\cdot d$

Delen:

$$\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}=\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}\cdot\frac{c-d\cdot i}{c-d\cdot i}=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}\cdot i$$

Opdracht: rekenen met complexe getallen

Bereken de volgende opgaven zonder rekenmachine. Maak gebruik van $i^2=-1$. Schrijf de antwoorden in de vorm $a+b\cdot i$

$(2-3\cdot i)+(5+4\cdot i)$

$(2-3\cdot i)-(5+4\cdot i)$

$(2-3\cdot i)\cdot(5+4\cdot i)$

$$\frac{24-10\cdot i}{3-2\cdot i}$$

Controleer de uitkomsten met de rekenmachine.

Het complexe vlak

Met de reële getallen zit de getallenlijn vol.

Vermenigvuldig je elk reëel getal met i, dan vind je alle imaginaire getallen. Die kun je op een tweede lijn zetten.

Zet je beide getallenlijnen loodrecht op elkaar, dan krijg je een assenstelsel:

het complexe vlak of **Gauss-vlak**.

De horizontale as heet de **reële as**; de verticale as heet de **imaginaire as**.

Opmerking: Op de kruising van de assen ligt het getal 0, niet het getallenpaar (0,0).

Getallen in het complexe vlak

Hiernaast is het complexe vlak afgebeeld. Beweeg het getal α door het open punt te verslepen.

Let daarbij op de de waarde van α.

Opdracht:

Plaats het punt achtereenvolgens op de volgende getallen:

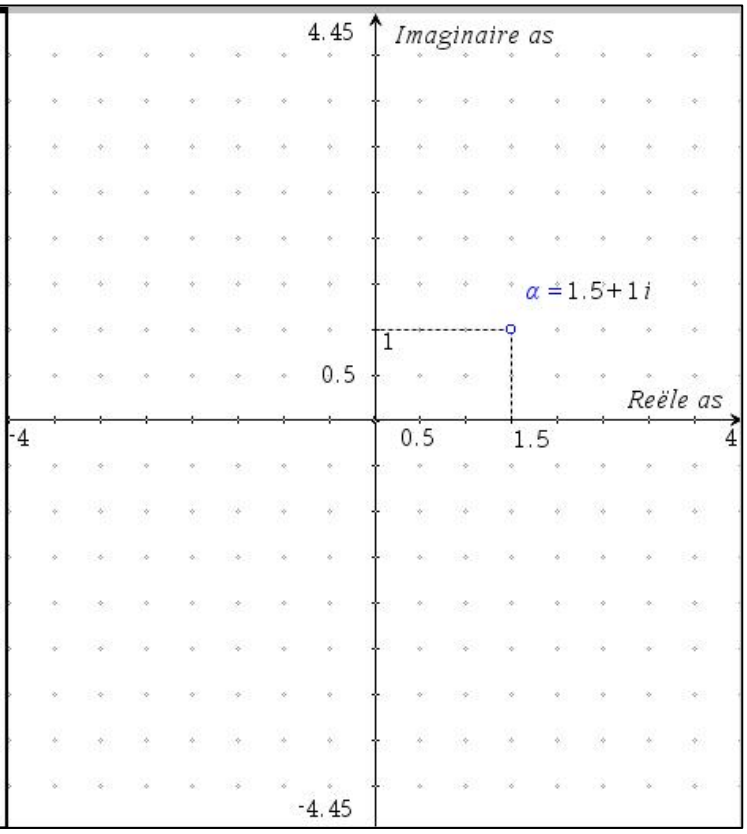
0

1

i

$1+i$

$-1-3i$



De afstand van een complex getal tot 0

$\alpha = a + b \cdot i$, notatie $|\alpha|$, is de afstand van α tot 0.

We noemen dat de **absolute waarde** of **modulus** van een complex getal

Voorbeeld:

Als $\alpha = 1.4+1.3 \cdot i$, dan geldt

$|\alpha| = |a+b \cdot i| = \sqrt{a^2+b^2} \approx 1.89$

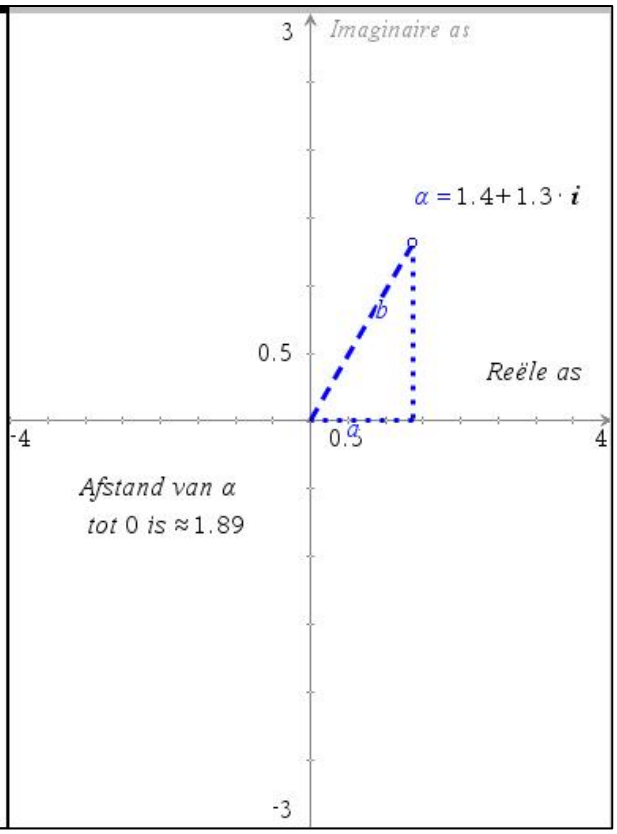
Opdracht 1:

Versleep α en bekijk de afstand van α tot 0.

Opdracht 2:

Waar kan α liggen als $|\alpha| = 2$?

Opdracht 3: Verklaar dat deze formule klopt met de bekende absolute waarde van reële getallen.



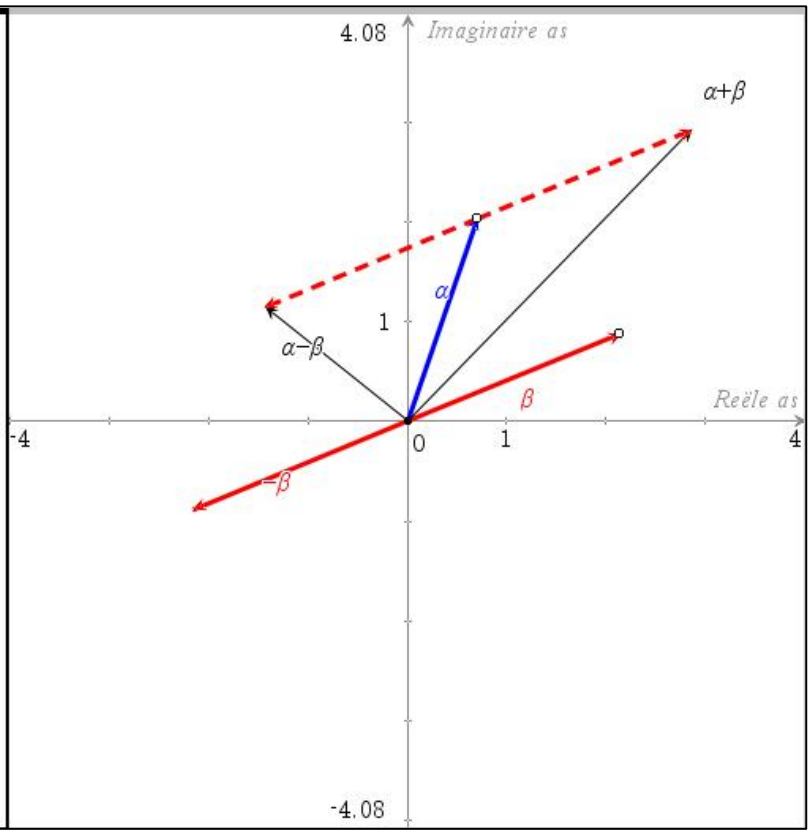
Het grafisch optellen van complexe getallen

Het optellen van complexe getallen ziet er in het Gaussvlak uit als een verschuiving.

De plaats van $\alpha + \beta$ is gelijk aan de over β verschoven plaats van α (of andersom).

De plaats van $\alpha - \beta$ is gelijk aan de over $-\beta$ verschoven plaats van α.

Opmerking: Bedenk dat de optelling van reële getallen ook past binnen deze uitbreiding.



Poolcoördinaten

De plaats van een complex getal α ligt op een andere manier vast door

– zijn afstand $r = |\alpha|$ tot 0 **en**

– de hoek ϕ die de plaatsvector van α maakt met de positieve reële as.

Deze hoek wordt **argument** van α

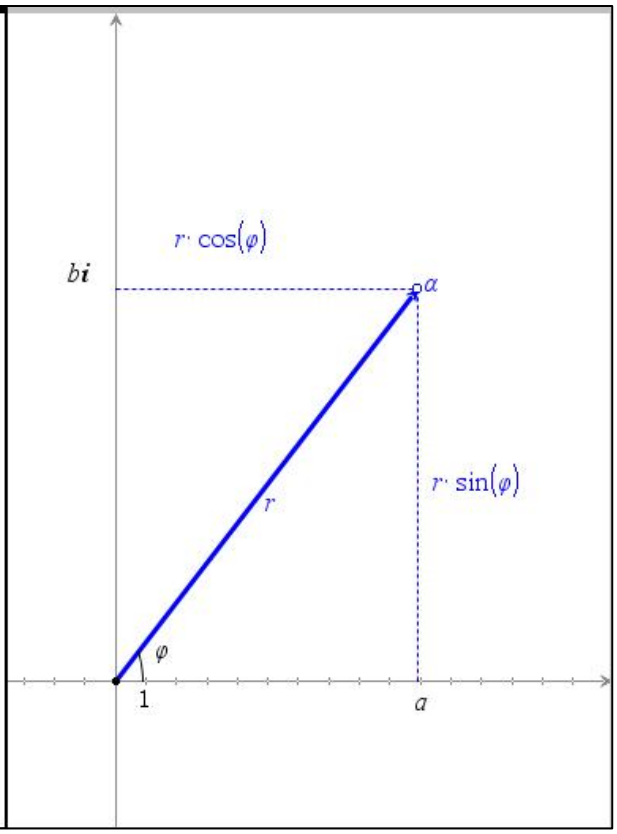
(**(arg**(α)) genoemd.

Afstand en hoek van een complex getal worden de **poolcoördinaten** genoemd.

Voor $\alpha = a+b\cdot \boldsymbol{i}$ geldt

$a = r\cdot\cos\phi$ en $b = r\cdot\sin\phi$.

$\alpha = r\cdot(\cos\phi + \boldsymbol{i}\cdot\sin\phi)$ is de **poolvoorstelling** van α.



Het rekenen met poolcoördinaten

Voor het product van twee complexe getallen α en β geldt:

$|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ en $\arg(\alpha) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$.

Voor het quotiënt van twee complexe getallen α en β geldt:

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ en $\arg(\alpha) = \arg(\alpha) - \arg(\beta)$.

In woorden staat hier: De afstanden tot 0 worden vermenigvuldigd/gedeeld, de hoeken worden opgeteld/afgetrokken.

Meetkunde met complexe getallen beschreven

Om meetkunde te beschrijven met complexe getallen plaats je een figuur in een complex vlak.

Dan hoort bij een punt A een getal $\alpha = a + b \cdot i$ uit het complexe vlak. Meetkundige begrippen/bewerkingen worden vertaald in complexe getallen en/of bewerkingen met complexe getallen.

Hierna volgen enkele begrippen uit het 'woordenboek'.

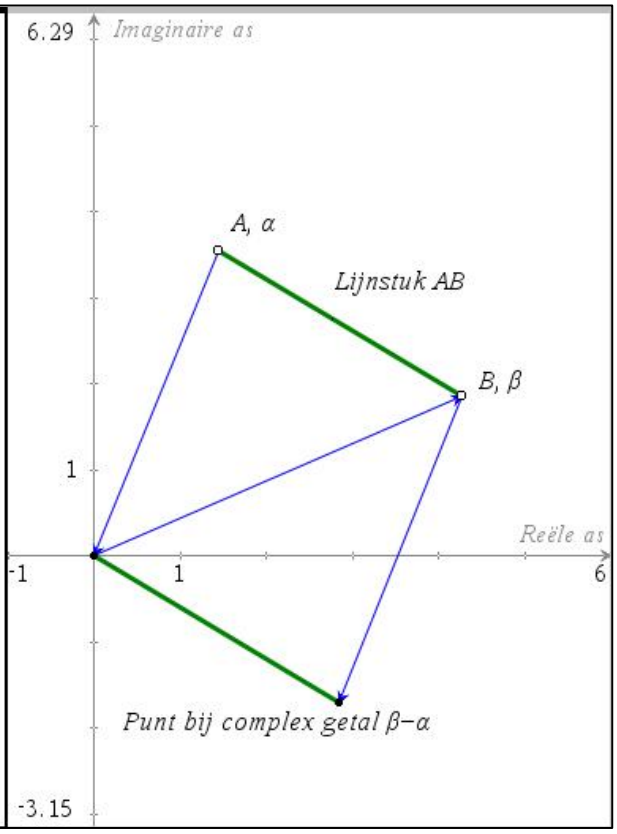
De afstand tussen 2 punten en de lengte van een lijnstuk

Een lijnstuk AB is even lang als de afstand tussen de complexe getallen α en β.

Deze lengte kan worden berekend als

$|\beta - \alpha|$ (of $|\alpha - \beta|$)

Hiernaast staat een grafische toelichting. Daarbij is AB verschoven over $-\alpha$.

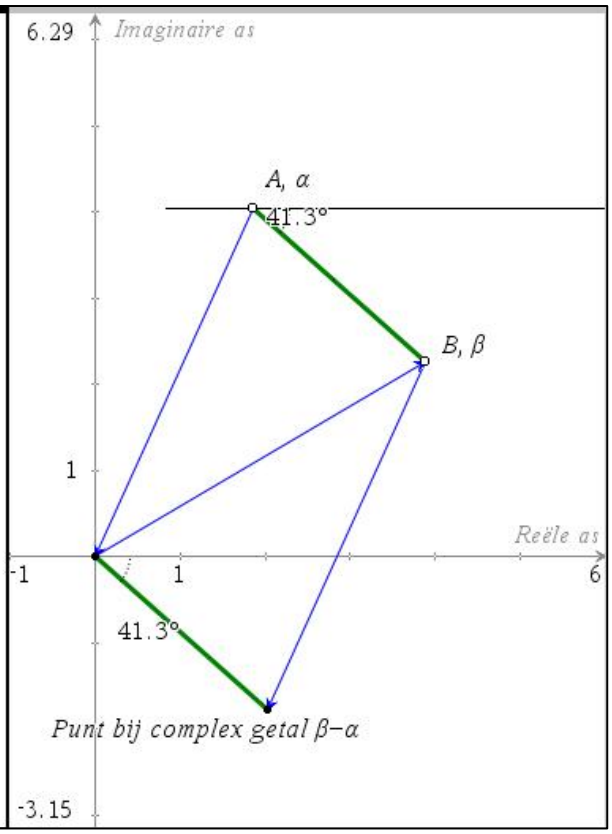


De richting van een lijnstuk

Een lijnstuk AB heeft dezelfde richting als het complexe getal $\beta - \alpha$ en tegengestelde richting als het complexe getal $\alpha - \beta$.

Hiernaast staat een grafische toelichting. Daarbij is AB verschoven over $-\alpha$.

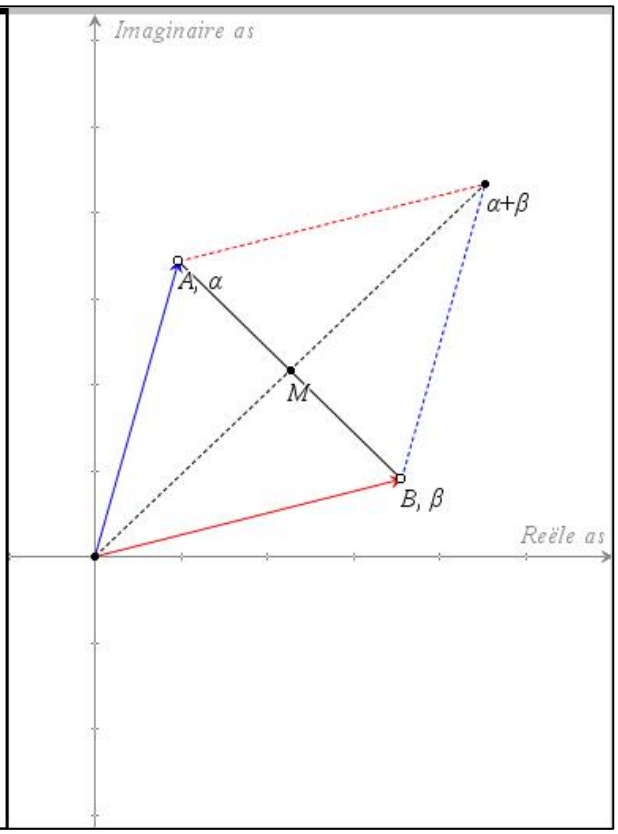
De lijnstukken AB en CD zijn dus evenwijdig als $\beta - \alpha$ en $\delta - \gamma$ een reëel veelvoud van elkaar zijn.



Het midden van een lijnstuk

Bij het midden van het lijnstuk AB hoort het getal $\frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$.

Zie hiernaast voor een toelichting.



Spiegelen in de reële as

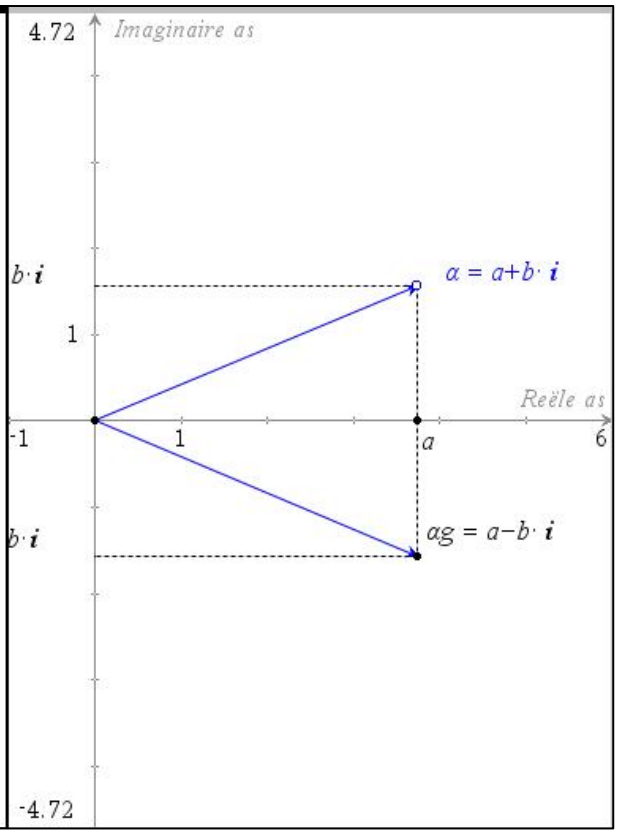
Spiegelen van A in de reële as, betekent dat het imaginaire deel van α tegengesteld wordt.

Deze bewerking heet de geconjugeerde nemen van α.

De geconjugeerde van

$\alpha = a + b \cdot \boldsymbol{i}$ is $\alpha_g = a - b \cdot \boldsymbol{i}$.

Zie hiernaast voor een toelichting.



Verschuiven

Verschuiven is optellen. Eerder in dit document is daarop al een toelichting gegeven.

Vergroten/verkleinen en draaien

Deze meetkundige draaivermenigvuldiging is de complexe vermenigvuldiging.

Er gebeurt dus het volgende:

- Er wordt vermenigvuldigd met de modulus ten opzichte van 0 EN
- Er wordt gedraaid over het argument (de hoek) om 0.

De draaivermenigvuldiging

Hiernaast is de draaivermenigvuldiging grafisch weergegeven. De getallen α en β kunnen worden veranderd door bijbehorend punt te verslepen.

Opdrachten:

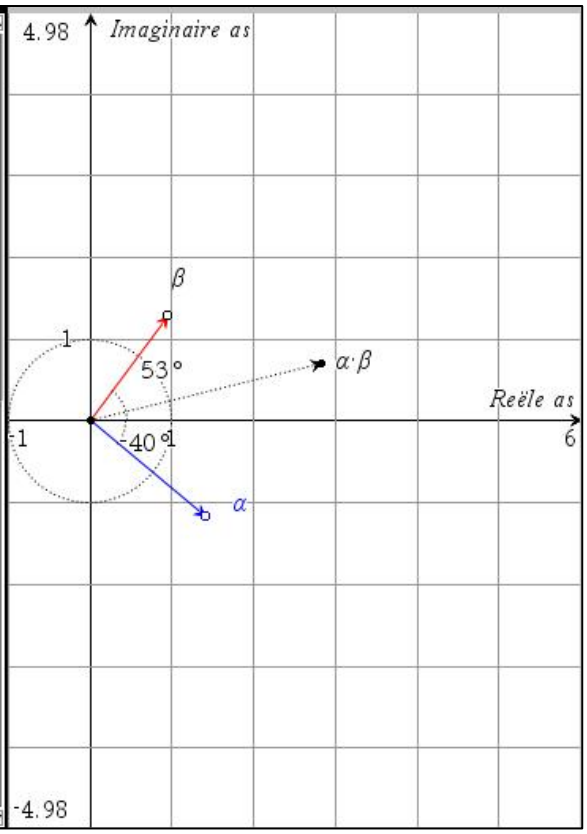
Neem α = 2, β= 3 en bekijk de uitkomst.

Neem α = 1 en bekijk wat er met α·β gebeurt.

Neem α = i, versleep β en bekijk wat er met α·β gebeurt.

Neem α en β op de eenheidscirkel en verplaats α over de eenheidscirkel.

Dus vermenigvuldigen met i is dus draaien om 0 over 90° (tegen de klok in).



1. Enkele meetkundige bewerkingen

Vertaal naar bewerkingen met complexe getallen.

a Spiegelen in de y−as.

b Spiegelen in 0.

c Draaien om 0 over 45°.

d Draaien om 0 over 60° (aangegeven met Griekse letter ρ (rho)).

e Draaien om 0 over 120°. Laat zien dat $\rho^2=\rho-1$.

2. Een lijnstuk in drie delen

Op lijnstuk *AB* liggen de punten *C* en *D*, zo dat *AC* = *CD* = *DB*.

Welke complexe getallen horen bij *C* en *D*?

3. Zwaartelijnen in een driehoek

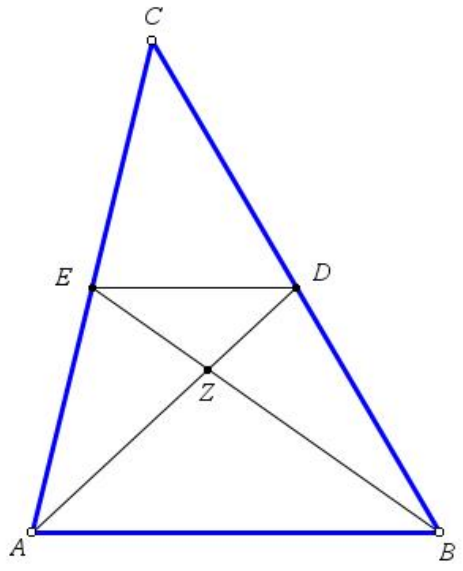
In ΔABC is D het midden van BC en E het midden van AC.

Bij A, B en C horen de complexe getallen α, β en γ.

a. Bewijs dat $DE \parallel AB$ en $DE = \frac{1}{2} \cdot AB$.

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AZB en DZE volgt $AZ = 2 \cdot ZD$.

b Welk complex getal hoort bij Z?

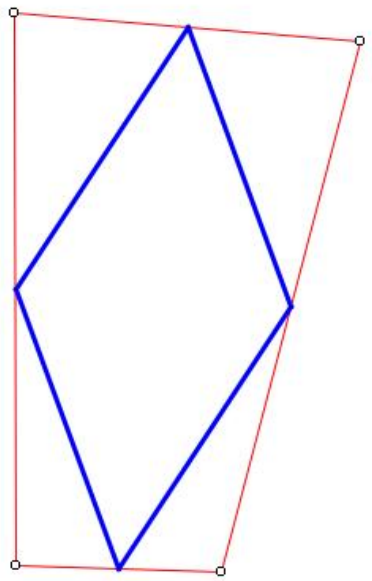


4. Vierhoek met parallellogram

Vier complexe getallen α, β, γ en δ horen bij de hoekpunten van een vierhoek $ABCD$.

P, Q, R en S zijn de middens van de zijden.

Bewijs dat vierhoek $PQRS$ een parallellogram is.



5. Parallellogram

A, B en C zijn hoekpunten van een parallellogram.

Bewijs dat voor het vierde hoekpunt D geldt: $\delta = \alpha + \gamma - \beta$.

6. Draaien om een punt

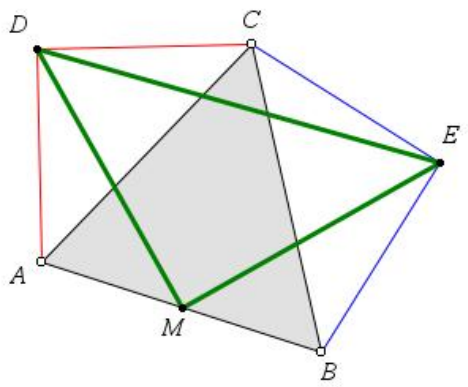
Gegeven zijn twee punten A en B met bijbehorende complexe getallen α en β. B wordt 90° om A gedraaid.

Welk complex getal hoort bij het beeldpunt B'?

7. Gelijkbenige driehoek

Op twee zijden van ΔABC zijn gelijkbenige rechthoekige driehoeken geplaatst. Het punt M is het midden van zijde AB.

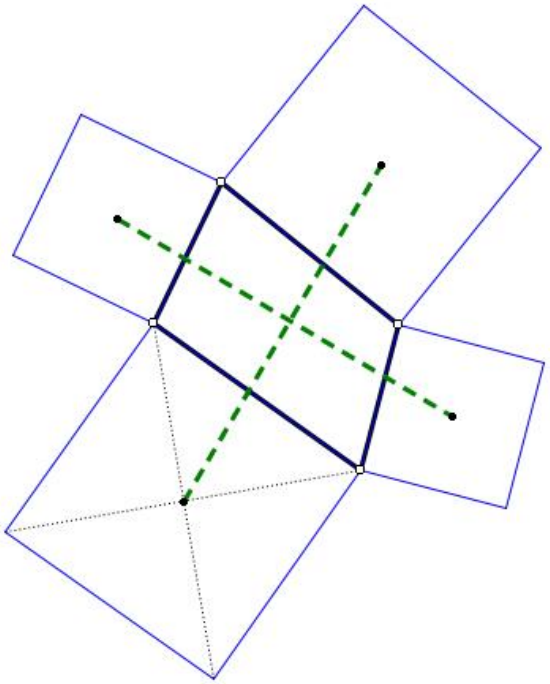
Bewijs dat ΔMDE ook gelijkbenig rechthoekig is.



De stelling van Van Aubel – vermoeden

Gegeven is een vierhoek *ABCD* . Op elke zijde wordt een vierkant geplaatst.

Ontwikkel een vermoeden over de onderbroken groene lijnen.



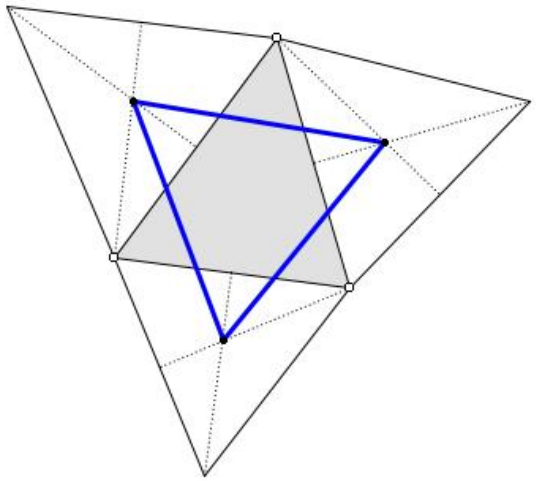
8. De stelling van Van Aubel – bewijzen

Bewijs dat de verbindingslijnstukken van de middelpunten van de overstaande vierkanten staan loodrecht op elkaar staan en even lang zijn (in de figuur: $PR \perp QS$ en $PR = QS$).

Van Aubel

De stelling is genoemd naar H. H. van Aubel, geboren in 1830 te Maastricht en overleden in 1906 te Antwerpen. Van Aubel was leraar wiskunde aan het Koninklijk Atheneum te Antwerpen.

9. Stelling van Napoleon

Op de zijden van ΔABC zijn naar buiten toe gelijkzijdige driehoeken getekend.

Bewijs dat de zwaartepunten van die driehoeken de hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek.