

HET DUIVENHOKPRINCIPE

Fabien DECRUYENAERE

St-Amandscollege

Kortrijk

”Tien vermoeide reizigers
Zochten onderkomen voor nacht en regen
Maar bij de herberg aanbeland had de waard
niet meer kamers dan negen
De waard was echter akelig slim
Hij gaf elk een eigen stee:
De eerste twee bracht hij naar kamer I
De derde leidde hij naar II
De vierde kreeg kamer III
Naar kamer IV ging nummer vijf
In V werd nummer zes gestopt
Zeven kreeg VI als nachtverblijf
De achtste sliep in VII,
de negende in VIII
En terug naar I ging onze waard
Waar hij zoals gezegd
Twee reizigers had bewaard
Daarvan nam hij één, nummer tien en laatst
en bracht hem onder in kamer IX
Negen eenpersoonskamers werden zo
Is het geen wonder, opgemaakt voor tien!”

Naast de benaming 'Duivenhokprincipe' (Eng : Pigeonhole principle) wordt ook soms 'Ladenprincipe van Dirichlet'¹ (Eng : Dirichlet's Layer Principle, Fra : Principe des Tiroirs) gebruikt. Het is een zeer vanzelfsprekend principe en het ziet er zeer eenvoudig uit, in zoverre dat het lijkt alsof het niet van enige betekenis is. Niets is echter minder waar : in de Wiskunde blijkt het van groot belang te zijn, aangezien veralgemeningen ervan belangrijke toepassingen hebben in Discrete Wiskunde, meer bepaald in combinatoriek en getaltheorie (zie bv. [1]).

1 Theorie

1.1 Het Duivenhokprincipe

WANNEER $n + 1$ DUIVEN IN n HOKKEN NEERSTRIJKEN, DAN IS ER ALTIJD MINSTENS ÉÉN HOK MET MINSTENS TWEE DUIVEN ($n \in \mathbb{N}_0$).

1.2 Het Veralgemeende Duivenhokprincipe

WANNEER m DUIVEN IN n HOKKEN NEERSTRIJKEN, DAN IS ER ALTIJD MINSTENS ÉÉN HOK MET MINSTENS $\lceil \frac{m-1}{n} \rceil + 1$ DUIVEN ($m, n \in \mathbb{N}_0$).

Hierbij is de functie $\lceil \dots \rceil$ de Entier-functie van Legendre die met elk reëel getal het grootste geheel getal associeert dat kleiner is dan of gelijk aan dat reële getal.

Bewijs uit het ongerijmde : veronderstel dat er zich in alle n hokken hoogstens $\lceil \frac{m-1}{n} \rceil$ duiven zouden bevinden ; dan zouden er in totaal hoogstens $n \cdot \lceil \frac{m-1}{n} \rceil \leq n(\frac{m-1}{n}) = m - 1$ duiven zijn. Maar er is gegeven dat er m duiven zijn, een contradictie. QED

1.3 Voorbeelden

1. Wanneer 13 duiven in 5 hokken neerstrijken, dan is er altijd tenminste één hok met tenminste 3 duiven.
2. Wanneer 10 duiven in 5 hokken neerstrijken, dan is er altijd tenminste één hok met tenminste 2 duiven.
3. Wanneer 4 duiven in 5 hokken neerstrijken, dan is er altijd tenminste één hok met tenminste 1 duif.
4. Wanneer 871 duiven in 43 hokken neerstrijken, dan is er altijd tenminste één hok met tenminste 21 duiven.

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), wiens familie afkomstig was uit de omgeving van Luik ('Le jeune de Richelet') en dus niet uit Frankrijk zoals de Fransen graag beweren, werd beroemd door zijn bijdrage, samen met Adrien-Marie Legendre, tot het bewijs van de stelling van Fermat voor $n = 5$.

1.4 Het Duivenhokprincipe : sterke vorm

ZIJN $q_1, q_2, \dots, q_n$ NATUURLIJKE GETALLEN. ALS $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ DUIVEN IN n HOKKEN NEERSTRIJKEN, DAN DOET ZICH MINSTENS ÉÉN VAN VOLGENDE MOGELIJKHEDEN VOOR :

- ER ZITTEN MINSTENS q_1 DUIVEN IN HET EERSTE HOK
- ER ZITTEN MINSTENS q_2 DUIVEN IN HET TWEEDE HOK
- $\vdots$
- ER ZITTEN MINSTENS q_n DUIVEN IN HET n -DE HOK

Bewijs uit het ongerijmde : veronderstel dat er zich in alle n hokken hoogstens resp. $q_1 - 1, q_2 - 1, \dots, q_n - 1$ duiven zouden bevinden ; dan zouden er in totaal hoogstens $(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \dots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_n - n$ duiven zijn. Maar er is gegeven dat er $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ duiven zijn, een contradictie. QED

De bedoeling van deze tekst is zoveel mogelijk oefeningen te verschaffen die bijvoorbeeld in de vrije ruimte in richtingen met 6/8 uren Wiskunde, maar ook als keuze-onderwerp in richtingen met 3/4 uren gebruikt kunnen worden. Ik heb daarbij een poging gedaan om de oefeningen op te splitsen naar *onderwerp* (getallen, spelletjes, meetkunde, dagelijks leven) en naar *moeilijkheidsgraad*, van gemakkelijk en vindbaar voor de leerlingen zonder hulp van de leraar (*) over vindbaar mits hints (**) tot zeer moeilijk en nagenoeg onvindbaar zonder begeleiding van de leraar(* **).

2 Dagelijks Leven

1. * IN ELKE GROEP VAN 367 PERSONEN ZIJN ER TENMINSTE 2 MET DEZELFDE VERJAARDAG.
2. * IN ELKE GROEP VAN 44 PERSONEN ZIJN ER ZEKER 4 DIE IN DEZELFDE MAAND VERJAREN.

HOEVEEL PERSONEN MOETEN ER MINSTENS ZIJN OM ZEKER TE ZIJN DAT ER 10 PERSONEN ZIJN MET DEZELFDE VERJAARDAG? (Antwoord : $366 \times 9 + 1 = 3295$)

3. * ER ZIJN IN BELGIË ZEKER 50 VOLWASSENEN DIE NIET KAAL ZIJN MET HETZELFDE AANTAL HAREN OP HUN HOOFD.

Bewijs : elke niet-kale volwassen mens heeft tussen 1 en ongeveer 100000 haren op zijn hoofd. Daar er meer dan 5 miljoen volwassen Belgen zijn, volgt het resultaat uit DHP. QED

4. * IN ELKE GROEP ZIJN ER MINSTENS TWEE PERSONEN DIE EENZELFDE AANTAL PERSONEN IN DE GROEP KENNEN.

Bewijs : veronderstel dat er n personen in de groep zijn. Iedereen kent dan tussen 0 en $n - 1$ personen. Maar de gevallen 0 en $n - 1$ kunnen zich niet tegelijk voordoen : immers, als iemand $n - 1$ personen, m.a.w. alle personen van de groep, kent, dan is er niemand die geen enkele persoon kent (we gaan er uiteraard van uit dat '...kent ...')

een symmetrische relatie is!). Dus ofwel kent iedereen tussen 0 en $n - 2$ personen, ofwel kent iedereen tussen 1 en $n - 1$ personen : in beide gevallen zijn er $n - 1$ mogelijkheden (de hokken). Maar er zijn n personen (de duiven).

Door DHP zijn er dus minstens twee duiven in hetzelfde hok of dus minstens twee personen met hetzelfde aantal kennissen. QED

5. ** EEN ZAK BEVAT 6 RODE, 5 WITTE EN 7 BLAUWE KNIKKERS. WAT IS HET KLEINSTE AANTAL KNIKKERS DAT JE UIT DE ZAK MOET NEMEN OM ZEKER TE ZIJN DAT ER MINSTENS 3 RODE OF MINSTENS 4 WITTE OF MINSTENS 5 BLAUWE BIJ ZIJN.

Bewijs : je kan rechtstreeks de sterke vorm van DHP toepassen met $n = 3, q_1 = 3, q_2 = 4, q_3 = 5$ en verkrijgt als antwoord $3 + 4 + 5 - 3 + 1 = 10$. QED

6. **VIJFTIEN PERSONEN ZETTEN ZICH NEER AAN EEN RONDE TAFEL. VÓÓR ELKE ZITPLAATS LIGT ER EEN NAAMKAARTJE OP DE TAFEL. NEERGEZETEN CONSTATEREN DE AANWEZIGEN DAT NIEMAND VÓÓR ZIJN EIGEN NAAMKAARTJE ZIT. DAN KAN DE TAFEL ALTIJD ZO GEDRAAID WORDEN DAT MINSTENS TWEE PERSONEN VOOR HUN EIGEN NAAMKAARTJE ZITTEN.

Bewijs : zij p_i het aantal posities waarover de tafel in wijzerzin gedraaid moet worden opdat persoon i ($1 \leq i \leq 15$) vóór zijn eigen naamkaartje zou zitten. Dan geldt dat $1 \leq p_i \leq 14$. De personen zijn de duiven en de getallen p_i zijn de hokken. Aangezien er 15 duiven en hoogstens 14 hokken zijn, volgt uit het DHP dat minstens 2 duiven in eenzelfde hok terecht komen, m.a.w. dat minstens 2 personen de tafel in wijzerzin over eenzelfde aantal posities moeten draaien om vóór hun eigen naamkaartje te zitten. QED

7. ** DE 20 LEERLINGEN VAN EEN KLAS VERSTUREN IN DECEMBER ELK 10 WENSKAARTEN NAAR 10 VERSCHILLENDE KLASGENOTEN. DAN ZIJN ER STEEDS MINSTENS 2 LEERLINGEN DIE EEN KAART NAAR ELKAAR STUREN.

Bewijs : er worden in totaal $20 \times 10 = 200$ kaarten verstuurd, terwijl er in totaal slechts $\frac{20 \times 19}{2} = 190$ 'koppels' zijn. Als je deze 200 kaarten verdeelt over de 190 koppels, dan zijn er door DHP zeker 2 leerlingen die een kaart naar elkaar sturen. QED

BIJKOMENDE VRAAG : veronderstel dat in een klas met n leerlingen elke leerling m wenskaarten stuurt naar m verschillende klasgenoten. Hoe moeten m en n zijn opdat er zeker twee leerlingen een kaart naar elkaar zouden sturen?

Antwoord : door een analoge redenering vind je $m > \frac{n-1}{2}$.

8. **** DE STAAT DUIVENLAND GEEFT NUMMERPLATEN VOOR AUTO'S UIT, BESTAANDE UIT ZES CIJFERS (VAN 0 TOT 9). OM TE VEEL IDENTIFICATIEPROBLEMEN TE VOORKOMEN, MOETEN TWEE NUMMERPLATEN STEEDS OP MINSTENS TWEE PLAATSEN VAN ELKAAR VERSCHILLEN. ZO KUNNEN BV. '027532' EN '021532' NIET SAMEN IN OMLOOP WORDEN GEBRACHT. DAN KUNNEN ER MAXIMAAL 100 000 NUMMERPLATEN IN DUIVENLAND UITGEBRACHT WORDEN.

Bewijs :

- (a) Hoogstens 100 000 nummerplaten kunnen uitgebracht worden.

Veronderstel dat er meer dan 100 000 nummerplaten kunnen uitgebracht worden, d.w.z minstens 100 001. We vormen 10 hokken H_i door alle nummerplaten te nemen die beginnen met i ($0 \leq i \leq 9$). Door DHP is er dan minstens één hok, zeg H_{i_0} met minstens 10 001 nummerplaten. Binnen dit hok vormen we weer 10 hokken $H_{i_0,j}$ door alle nummerplaten te nemen die beginnen met i_0 en op de tweede plaats j hebben ($0 \leq j \leq 9$). Opnieuw door DHP bevat minstens één van deze hokken, zeg H_{i_0,j_0} , minstens 1001 nummerplaten. Als we ditzelfde proces nog drie keer overdoen, dan krijgen we een hok H_{i_0,j_0,k_0,l_0,m_0} met minstens twee nummerplaten. Dit is echter een contradictie want deze twee nummerplaten verschillen slechts op één plaats (de laatste).

- (b) Minstens 100 000 nummerplaten kunnen uitgebracht worden.

Beschouw enkel de nummerplaten van de vorm $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ met

$$\alpha_6 \equiv \sum_{i=1}^5 \alpha_i \pmod{10}.$$

Voor elke andere nummerplaat van die vorm $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha'_5\alpha'_6$ geldt dat, als $\alpha_5 \neq \alpha'_5$, dan $\alpha_6 \neq \alpha'_6$. We bewijzen dit door contrapositie : indien $\alpha_6 = \alpha'_6$, dan volgt dat $\sum_{i=1}^5 \alpha_i \equiv \sum_{i=1}^4 \alpha_i + \alpha'_5 \pmod{10}$ of dat $\alpha_5 \equiv \alpha'_5 \pmod{10}$: maar omdat α_5 en α'_5 getallen tussen 0 en 9 zijn, volgt dan dat $\alpha_5 = \alpha'_5$.

Ook als niet de vijfde maar één van de eerste vier posities verschillend is, volgt dat $\alpha_6 \neq \alpha'_6$.

We kunnen dus besluiten dat, van zodra $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ en $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4\alpha'_5\alpha'_6$ op juist één van de eerste vijf posities verschillen, dat ze dan ook op een tweede plaats (de zesde) verschillen. Ze mogen dus samen uitgebracht worden. Als beide nummerplaten op meer dan één van de eerste vijf posities verschillen, dan mogen ze sowieso samen uitgebracht worden.

De eerste vijf cijfers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ mogen dus vrij gekozen worden en bijgevolg kunnen er minstens 100 000 nummerplaten uitgebracht worden. QED

3 Getallen

1. * HOEVEEL ELEMENTEN MOET EEN DEELVERZAMELING VAN $\{1, 2, 3, \dots, 999\}$ MINSTENS HEBBEN OM ALLESZINS TWEE ELEMENTEN MET SOM 1000 TE HEBBEN.²

Bewijs : neem de partitie van de gegeven verzameling, bestaande uit volgende deelverzamelingen : $\{1, 999\}, \{2, 998\}, \{3, 997\}, \dots, \{498, 502\}, \{499, 501\}, \{500\}$. Dit zijn de 500 hokken. Als er nu 501 duiven (=getallen) gekozen worden, zullen er door DHP alleszins twee tot hetzelfde hok behoren en dus als som 1000 hebben. QED

2. ** ELKE DEELVERZAMELING MET 55 ELEMENTEN VAN DE VERZAMELING $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ BEVAT TWEE GETALLEN MET VERSCHIL 9.³

Bewijs : we maken een partitie van A , bestaande uit volgende deelverzamelingen : $\{1, 10, 19, \dots, 91, 100\}, \{2, 11, 20, \dots, 92\}, \{3, 12, 21, \dots, 93\},$
 $\{4, 13, 22, \dots, 94\}, \{5, 14, 23, \dots, 95\}, \{6, 15, 24, \dots, 96\},$
 $\{7, 16, 25, \dots, 97\}, \{8, 17, 26, \dots, 98\}, \{9, 18, 27, \dots, 99\}.$

Deze 9 deelverzamelingen zijn de hokken en de 55 getallen zijn de duiven. Uit DHP volgt dat er minstens 1 hok is met minstens 7 duiven.

Nu geldt : als je 7 elementen neemt uit een verzameling van 10 of 11 elementen (geordend van klein naar groot), dan zijn er minstens 2 opeenvolgende bij. Illustreer we dit op de eerste partitieklassie $P = \{1, 10, 19, \dots, 91, 100\}$. Beschouw de partitie van P bestaande uit volgende deelverzamelingen : $\{1, 10\}, \{19, 28\}, \{37, 46\}, \{55, 64\}, \{73, 82\}, \{91, 100\}$. Deze 6 deelverzamelingen zijn de hokken en de 7 getallen zijn de duiven. Uit DHP volgt dat er minstens 1 hok is met 2 duiven, m.a.w. dat er onder die 7 elementen van P twee opeenvolgende zijn, of nog anders gezegd, dat er onder die 7 getallen twee zijn met verschil 9. QED

3. ** IN EEN VERZAMELING VAN 2006 GETALLEN ZIJN ER ZEKER TWEE WAARVAN HET VERSCHIL DEELBAAR IS DOOR 2005.

Bewijs : deel elk van deze 2006 getallen Euclidisch door 2005 : de mogelijke resten zijn natuurlijke getallen tussen 0 en 2004. We nemen deze resten als hokken en de getallen als duiven. Door DHP zijn er dan twee getallen die dezelfde rest r hebben. Zijn a en b deze getallen : dan $a = 2005 \cdot q + r$ en $a = 2005 \cdot q' + r$. Bijgevolg $a - b = 2005 \cdot (q - q')$ en $a - b$ is dus deelbaar door 2005. QED

4. ** ZIJ B EEN WILLEKEURIGE DEELVERZAMELING MET 10 ELEMENTEN VAN $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. DAN BESTAAN ER ALTIJD TWEE DISJUNCTE NIET-LEGE DEELVERZAMELINGEN X EN Y VAN B ZODAT DE SOM VAN ALLE ELEMENTEN VAN X GELIJK IS AAN DE SOM VAN ALLE ELEMENTEN VAN Y .

Bewijs : de som van alle elementen van een dergelijke deelverzameling ligt tussen $1+2+3+\dots+10 = 55$ en $91+92+93+\dots+100 = 955$. Er zijn dus 901 dergelijke sommen (de hokken) mogelijk. De verzameling B heeft $2^{10} - 1 = 1023$ niet-lege deelverzamelingen (de duiven). Door DHP zijn er zeker 2 dergelijke deelverzamelingen X' en Y' met dezelfde som van al hun elementen.

De verzamelingen $X = X' \setminus (X' \cap Y')$ en $Y = Y' \setminus (X' \cap Y')$ voldoen dan. QED

²V.W.O.,1988-1989,1e ronde,vraag 27

³V.W.O.,1988-1989, finalevraag 1

5. *** ER BESTAAT EEN MACHT VAN DRIE DIE EINDIGT OP 001.

Bewijs : beschouw volgende machten van 3 : $1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{1000}$. Onder deze 1001 getallen zijn er door DHP zeker twee die dezelfde rest hebben bij deling door 1000. Noem deze getallen 3^n en 3^m ($n > m$). Dan is $3^n - 3^m = 3^m \cdot (3^{n-m} - 1)$ deelbaar door 1000 (zie oefening 3). Maar 3^m en 1000 hebben geen enkele gemeenschappelijke factor. Dus moet $3^{n-m} - 1$ deelbaar zijn door 1000 of m.a.w. eindigen op 000. Bijgevolg eindigt 3^{n-m} op 001. QED

6. *** STELLING VAN P. ERDÖS⁴

ALS $n + 1$ GETALLEN GENOMEN WORDEN UIT DE VERZAMELING $\{1, 2, \dots, 2n\}$, DAN IS TENMINSTE ÉÉN VAN DIE GETALLEN EEN DELER VAN ÉÉN VAN DE ANDERE GETALLEN.

Merk op : als we n getallen nemen uit $\{1, 2, \dots, 2n\}$, dan geldt de stelling niet meer : neem bv. de getallen $n + 1, n + 2, \dots, 2n$.

Bewijs : schrijf elk van die $n + 1$ getallen als het product van een macht van 2 en een oneven getal. Dit oneven getal is minstens 1 en hoogstens $2n - 1$: er zijn dus hoogstens n dergelijke oneven getallen. We beschouwen dit als de hokken. Door DHP hebben minstens twee van de $n + 1$ gegeven getallen dezelfde oneven factor : noteer deze getallen $a = 2^k \cdot q$ en $b = 2^l \cdot q$, met q oneven, $k, l \in \mathbb{N}$ en $k < l$. Bijgevolg $\frac{b}{a} = 2^{l-k} \in \mathbb{N}$ en dus is a een deler van b . QED

7. *** ZIJ $f(x)$ EEN VEELTERM MET GEHELE COËFFICIËNTEN. ALS ER DRIE VERSCHILLENDE GEHELE GETALLEN a, b EN c BESTAAN ZODAT $f(a) = f(b) = f(c) = 2$, DAN KAN VOOR GEEN ENKEL GEHEEL GETAL z DE FUNCTIEWAARDE $f(z)$ GELIJK ZIJN AAN 3.

Bewijs : zij $f(x) = z_n x^n + z_{n-1} x^{n-1} + \dots + z_1 x + z_0$ met $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n \in \mathbb{Z}$.

We merken eerst op dat voor alle gehele getallen p en q geldt dat $f(p) - f(q)$ deelbaar is door $p - q$: inderdaad, $f(p) - f(q) = z_n(p^n - q^n) + z_{n-1}(p^{n-1} - q^{n-1}) + \dots + z_1(p - q)$ en aangezien elk verschil van machten van p en q in het rechterlid deelbaar is door $p - q$, volgt het resultaat.

We bewijzen nu de stelling uit het ongerijmde : veronderstel dat er een geheel getal d bestaat zodat $f(d) = 3$; uit voorgaande en uit het gegeven volgt dan dat

$$\begin{aligned} d - a \mid f(d) - f(a) &= 3 - 2 = 1 \\ d - b \mid f(d) - f(b) &= 3 - 2 = 1 \\ d - c \mid f(d) - f(c) &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

De drie verschillen $d - a$, $d - b$ en $d - c$ zijn dus een deler van 1 ; maar 1 heeft slechts twee delers, nl. 1 en -1 . Door DHP moeten dus minstens twee van de drie verschillen gelijk zijn aan elkaar, bv. $d - a = d - b$. Maar dan $a = b$, een contradictie. QED

⁴Paul Erdős (1913-1996) schreef honderden wiskundige artikels in veel verschillende disciplines. Nagenoeg elke huidige Wiskundige die ooit een artikel gepubliceerd heeft, heeft een eindig Erdős getal.

4 Spelletjes

1. * EEN ROUND-ROBIN TORNOOI IS EEN TORNOOI WAARIN ELKE SPELER JUIST ÉÉN KEER TEGEN ELKE ANDERE SPELER SPEELT. VERONDERSTEL DAT ELKE SPELER MINSTENS ÉÉN KEER WINT. DAN ZIJN ER MINSTENS TWEE SPELERS MET EENZELFDE AANTAL OVERWINNINGEN.

Bewijs : als er n spelers zijn, dan is het aantal overwinningen van elke speler een natuurlijk getal tussen 1 en $n - 1$. Beschouw deze getallen als de hokken en de spelers als de duiven en pas DHP toe. QED

2. ** KIES IN HET (x, y) -VLAK 5 ROOSTERPUNTEN, DAN ZIJN ER ZEKER TWEE ZODAT HET LIJNSTUK BEPAALD DOOR DEZE TWEE PUNTEN OOK EEN ROOSTERPUNT BEVAT.

Bewijs : het midden van het lijnstuk bepaald door de roosterpunten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ is het punt $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$: dit punt M is ook een roosterpunt als en slechts als $x_1 + x_2$ even is en $y_1 + y_2$ even is.

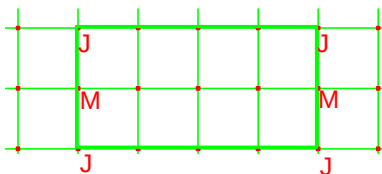
Er zijn vier mogelijkheden voor de pariteit van de coördinaatgetallen van een roosterpunt: (E,E),(E,O),(O,E),(O,O). Bij vijf roosterpunten zijn er dus door DHP zeker twee met dezelfde pariteit van hun coördinaatgetallen. Van het lijnstuk bepaald door die twee roosterpunten zal door voorgaande het midden dus ook een roosterpunt zijn. QED

Een Java applet van deze oefening (en een illustratie dat het misloopt bij vier punten) vind je op <http://www.maa.org/editorial/knot/pigeonhole.html>.

3. ** IN EEN KLASLOKAAL ZITTEN 21 LEERLINGEN IN 3 RIJEN VAN 7. ER KAN ALTIJD EEN RECHTHOEK GEVONDEN WORDEN VAN BREEDTE EN LENGTE MINSTENS 2 ZODAT DE LEERLINGEN IN DE VIER HOEKEN ALLE VAN HETZELFDE GESLACHT ZIJN.

Bewijs : op elke van de 7 kolommen zitten drie leerlingen. De meisjes en jongens op zo'n kolom kunnen op 8 mogelijke manieren verdeeld worden :

jjj,jjm,jmj,jmm,mjj,mjm,mmj,mmm. Door DHP zijn er dus 2 kolommen met dezelfde configuratie van de geslachten, bv. de tweede en de zesde kolom zouden de configuratie jmj kunnen hebben : in dat geval vorm je de rechthoek bepaald door de tweede en zesde kolom en door de eerste en derde rij. QED



4. ** EEN SCHAAKMEESTER DIE 11 WEKEN HEEFT OM EEN TORNOOI VOOR TE BEREIDEN, WIL IN DEZE PERIODE ELKE DAG TENMINSTE 1 PARTIJ SPELEN. MAAR OM ZICH NIET UIT TE PUTTEN, WIL HIJ NIET MEER DAN 12 WEDSTRIJDEN PER WILLEKEURIGE WEEK (D.W.Z. 7 OPEENVOLGENDE DAGEN) SPELEN. DAN IS ER EEN OPEENVOLGING VAN DAGEN TIJDENS DEWELKE DEZE SCHAAKMEESTER PRECIES 21 WEDSTRIJDEN SPEELT.

Bewijs : noem a_i het aantal gespeelde partijen t.e.m. dag i ($1 \leq i \leq 77$). Beschouw deze 77 getallen a_i en ook de 77 getallen $a_i + 21$. Dit geeft in totaal 154 getallen ; elk van de getallen a_i ligt tussen 1 en $12 \times 11 = 132$ en elk van de getallen $a_i + 21$ tussen $1 + 21 = 22$ en $132 + 21 = 153$. We hebben dus 154 getallen die alle tussen 1 en 153 liggen ; door DHP zijn er zeker twee van die getallen gelijk. Maar de getallen a_i zijn zeker onderling verschillend omdat de schaakmeester elke dag minstens één partij speelt. Uiteraard zijn dan ook de getallen $a_i + 21$ onderling verschillend. Bijgevolg moet $a_j = a_i + 21$ voor $1 \leq i < j \leq 77$. Dus vanaf dag $i + 1$ t.e.m. dag j speelt hij precies 21 partijen. QED

5. ** ALS JE WILLEKEURIG VIER GETALLEN UIT DE VERZAMELING $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ KIEST, KAN JE, OFWEL MET ÉÉN VAN DEZE GETALLEN, OFWEL DOOR ER MEERDERE OP TE TELLEN, STEEDS EEN VEELVOUD VAN VIER VORMEN

Bewijs : noem de vier getallen a, b, c en d . Beschouw nu de sommen $a, a + b, a + b + c$ en $a + b + c + d$ en deel deze Euclidisch door 4 : de vier resten zijn getallen tussen 0 en 3.

Geval 1 : Eén van deze resten is 0.

Dan is de stelling bewezen.

Geval 2 : Alle resten zijn ofwel 1, 2 of 3.

Door DHP hebben minstens 2 van de 4 sommen dan dezelfde rest. Onderstel bv. dat $a + b$ en $a + b + c + d$ dezelfde rest hebben ; dan is hun verschil $c + d$ deelbaar door 4 en is de stelling ook in dat geval bewezen. QED

SPEL : DE EINSTEINCODE ([3]).

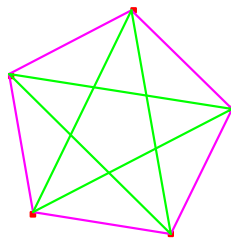
Voorgaande resultaat is de basis voor het kaartspel DE EINSTEINCODE van L. Gheysens : bij dat spel, dat gespeeld wordt door 2, 3 of 4 spelers, is het de bedoeling de code van de tegenstrever(s) te raden. Deze code bestaat uit een permutatie van de verzameling codekaarten $\{x, y, z, t\}$ (Einstein!). Om beurten nemen de spelers 4 kaarten van een stapel van 38 speelkaarten, bestaande uit 4 keer de cijfers 1 t.e.m. 9 in 4 kleuren en uit 2 Einsteinjokers. Met deze 4 kaarten proberen ze een veelvoud van 4 te vormen en kunnen ze één van de codekaarten van een tegenstrever proberen te raden : ze wijzen een codekaart van iemand aan en proberen te raden welke kaart het is : als ze 4 gevormd hebben, mogen ze gokken op x ; hebben ze 8 gevormd, dan mogen ze gokken op y , 12 komt overeen met z en 16 met t . De tegenstrever toont aan iedereen deze codekaart: als de gok juist is, blijft ze gedraaid en is deze codeletter gekraakt ; in het andere geval, wordt ze opnieuw omgedraaid. Als iemand een joker trekt, dan mag hij zijn eigen nog niet gekraakte codekaarten permuteren. Winnaar is wie de vierde codeletter van de laatst overblijvende medespeler kraakt.

6. ** IN ELKE GROEP VAN 6 PERSONEN ZIJN ER ALTIJD 3 DIE ELKAAR KENNEN OF 3 DIE ELKAAR NIET KENNEN. DIT IS NIET NOODZAKELIJK WAAR IN EEN GROEP VAN 5 PERSONEN.

Bewijs : Noemen we de 6 personen A(nja), B(ert), C(hris), D(irk), E(rik) en F(ilip). We maken een onderscheid tussen de personen die A kennen of niet : zij die A kennen mogen in het salon en zij die A niet kennen worden in de garage gestopt (A zelf blijft in haar eigen kamer). Uit DHP volgt dan dat er zich ofwel in het salon, ofwel in de garage minstens 3 personen bevinden.

- Onderstel dat er zich in het salon minstens 3 mensen bevinden waaronder, zeg, B, C, en D. Nu zijn er 2 mogelijkheden :
 - Geval 1 :** alle drie de personen B, C en D kennen elkaar niet : in dit geval zijn er dus 3 personen die elkaar niet kennen en is de stelling bewezen.
 - Geval 2 :** twee van de personen B, C en D kennen elkaar wel, bv. B en C. Maar dan kennen A, B en C elkaar en is de stelling ook bewezen.
- Onderstel dat er zich in de garage minstens 3 mensen bevinden waaronder, zeg, B, C, en D. Nu zijn er weer 2 mogelijkheden :
 - Geval 1 :** alle drie de personen B, C en D kennen elkaar : in dit geval zijn er dus 3 personen die elkaar kennen en is de stelling bewezen.
 - Geval 2 :** twee van de personen B, C en D kennen elkaar niet, bv. B en C. Maar dan kennen A, B en C elkaar niet en is de stelling ook bewezen. QED

Dat dit niet altijd het geval is voor 5 personen, kan je als volgt zien : we stellen de 5 personen voor door de hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. Als 2 personen elkaar kennen, dan verbinden we de overeenkomstige hoekpunten door een volle lijn en als ze elkaar niet kennen, door een stippellijn. We moeten dus een volledige vijfhoek tekenen (met alle diagonaallijnen) waarin we geen driehoek kunnen ontwaren die volledig uit volle lijnen bestaat, maar ook geen driehoek kunnen vinden die volledig uit stippellijnen bestaat. Dit kan gemakkelijk als volgt :



SPEL

In dit verband kan men de leerlingen twee per twee het volgende spelletje laten spelen: je tekent de hoekpunten van een regelmatige zeshoek. De leerlingen verbinden nu om beurten de punten met een lijnstuk, de ene gebruikt rood, de andere groen. Zodra er een driehoek in het groen verschijnt, wint de speler met rood, en omgekeerd.

Voorgaande kadert in een wiskundige theorie, genaamd RAMSEY-THEORIE⁵, waarover we even uitweiden :

Definitie

Zijn $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, dan definieert men het RAMSEY-GETAL $R(a, b)$ als het minimum aantal personen nodig om onder hen zeker a personen te hebben die elkaar kennen of zeker b personen die elkaar niet kennen.

Equivalent, $R(a, b)$ = het kleinste natuurlijk getal n zodat, als je een volledige regelmatige n -hoek tekent en elke lijn vol of in stippellijn tekent, je steeds een volledige a -hoek hebt bestaande uit allemaal volle lijnen of een volledige b -hoek hebt bestaande uit allemaal stippellijnen.

Eigenschappen

- (a) $\forall a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : R(a, b) = R(b, a)$
- (b) $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : R(a, 2) = R(2, a) = a$
- (c) $R(3, 3) = 6$.

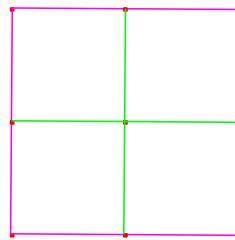
Het bepalen van andere Ramsey-getallen blijkt echter een niet zo eenvoudige aangelegenheid! In 1955 bewezen Greenwood en Gleason dat $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$ en $R(4, 4) = 18$. Maar dat $R(4, 5) = 25$ werd pas in 1995 ontdekt door McKay en Radziszowski ([5]) : daarbij werd volop grafentheorie gebruikt en voor hun twee cruciale algoritmes benodigden ze een computertijd van maar liefst 3,2 en 6 jaar waarbij liefst 110 computers tegelijk werden gebruikt! Voor de meeste andere Ramsey-getallen kent men op dit ogenblik enkel een onder- en bovengrens : zo weet men sinds 1995 dat $43 \leq R(5, 5) \leq 49$ en dat $35 \leq R(4, 6) \leq 41$. En van $R(10, 10)$ bv. weet men enkel dat het tussen 798 en 23556 ligt (sinds 2002). Voor een overzicht, zie [4].

⁵Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), Cambridge, master van het Magdalene College was vooral actief in logica (On a problem of formal logic, 1930), in economie (in de school van J.M. Keynes) en in filosofie (notoir kenner van Wittgenstein)

5 Meetkunde

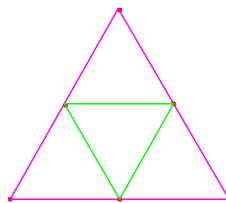
1. ** ALS WE IN EEN VIERKANT MET ZIJDE TWEE CM NEGEN PUNTEN NEMEN, DAN ZIJN ER ONDER DIE NEGEN PUNTEN ZEKER DRIE DIE DE HOEKPUNTEN VORMEN VAN EEN DRIEHOEK MET OPPERVLAKTE KLEINER DAN OF GELIJK AAN $0,5 \text{ cm}^2$.

Bewijs : verdeel het gegeven vierkant in vier kleinere vierkanten zoals op de figuur: dit zijn de hokken. Door DHP is er dan zeker één van deze kleinere vierkanten met minstens 3 punten. De driehoek gevormd door deze 3 punten heeft een oppervlakte die zeker kleiner is dan of gelijk aan de helft van de oppervlakte van zo'n vierkantje, dus $0,5 \text{ cm}^2$. QED



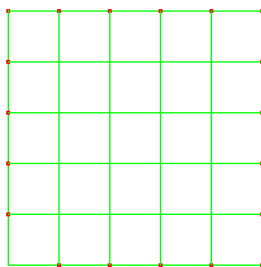
2. ** ALS JE IN EEN GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK MET ZIJDE 1 VIJF PUNTEN KIEST, DAN ZIJN ER ALTIJD TWEE DIE OP EEN AFSTAND KLEINER DAN OF GELIJK AAN $0,5$ VAN ELKAAR LIGGEN.

Bewijs : verdeel de driehoek in vier kleinere driehoeken zoals op onderstaande figuur: dit zijn de hokken. Door DHP is er dan zeker één van deze kleinere driehoeken met minstens 2 punten. Aangezien de maximale afstand tussen 2 punten in zo'n kleine driehoek $0,5$ bedraagt, is de stelling bewezen.



3. ** ALS IN HET EENHEIDSVIERKANT 51 PUNTEN GEGEVEN ZIJN, DAN IS ER EEN CIRCELSCHIJF MET STRAAL $1/7$ DIE MINSTENS DRIE VAN DEZE PUNTEN BEVAT.

Bewijs : door DHP volstaat het aan te tonen dat we het eenheidsvierkant kunnen bedekken met 25 cirkelschijfjes met straal kleiner dan of gelijk aan $1/7$. Daartoe verdelen we het eenheidsvierkant in 25 kleinere vierkantjes zoals op de figuur. Elk vierkantje heeft diagonaal $\sqrt{\frac{2}{25}}$ waardoor de omschrijvende cirkelschijf straal $\sqrt{\frac{1}{50}}$ heeft. Daar $\frac{1}{7} < \sqrt{\frac{1}{50}}$, volgt het resultaat. QED



6 Enkele goocheltrucs

1. **** STELLING VAN P. ERDÖS EN G. SZEKERES ([2])

ALS $a_1, a_2, \dots, a_{n^2}, a_{n^2+1}$ EEN RIJ VAN $n^2 + 1$ VERSCHILLENDE NATUURLIJKE GETALLEN IS, DAN HEEFT DIE RIJ EEN (STRIKT) STIJGENDE DEELRIJ MET $n + 1$ ELEMENTEN OF EEN (STRIKT) DALENDE DEELRIJ MET $n + 1$ ELEMENTEN.

Voorbeeld : als 13, 20, 12, 19, 14, 21, 1, 3, 2, 7 de rij is ($n = 3, n^2 + 1 = 10$), neem dan bv. 13, 12, 3, 2.

Merk op : de stelling geldt niet voor n^2 elementen : neem bv. $n = 4$ met de rij 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13.

Bewijs : We associëren met elk getal a_i het getal t_i = de lengte van een zo lang mogelijke strikt stijgende rij die met a_i begint.

Geval 1 : $\exists i \in \{1, \dots, n^2 + 1\} : t_i \geq n + 1$

In dit geval is de stelling bewezen

Geval 2 : $\forall i \in \{1, \dots, n^2 + 1\} : t_i \leq n$

De getallen t_i nemen dan enkel natuurlijke waarden aan tussen 1 en n : we beschouwen dit als de hokken en de $n^2 + 1$ gegeven getallen als de duiven. Door het DHP zitten er dus minstens $\lceil \frac{n^2+1-1}{n} \rceil + 1 = n + 1$ duiven in hetzelfde hok, d.w.z. minstens $n + 1$ van de getallen t_i zijn gelijk. We beweren nu dat de getallen a_i , geassocieerd met deze t_i een strikt dalende deelrij vormen : inderdaad, veronderstel bv. dat $t_6 = t_{11}$, dan moet zeker $a_6 > a_{11}$, want indien $a_6 < a_{11}$, dan zou zeker $t_6 > t_{11}$. Dit bewijst de stelling in geval 2. QED

2. TOEPASSING

De benodigdheden : 10 kaarten met op de ene zijde de getallen 1 tot en met 10 en een assistent(e).

Het spel : iemand uit het publiek legt de kaarten naast elkaar in een bepaalde volgorde met de getallen naar boven. De assistent draait 4 van de kaarten om. Vervolgens komt de goochelaar erbij en zegt onmiddellijk welke die kaarten zijn.

De truc : neem in vorige stelling $n = 3$: in elke rij van 10 getallen is er een stijgende of is er een dalende deelrij van 4 getallen. Dit zijn de getallen die de assistent omdraait: indien het een stijgende deelrij is, draait hij de kaarten met zijn linkerhand om en als het een dalende deelrij is, draait hij de kaarten met zijn rechterhand om. Zo weet de

goochelaar (die van ver een oogje in het zeil houdt) meteen welke van de overblijvende getallen op welke plaats liggen.

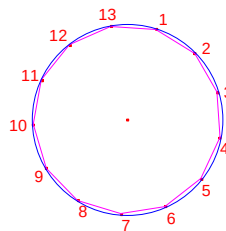
3. TRUC : RAAD EENS EEN KAART

De benodigdheden : een spel van 52 kaarten en een (snelrekenende) assistent(e).

Het spel : de goochelaar vraagt aan iemand uit het publiek om lukraak 5 kaarten te nemen uit een spel van 52 kaarten. De persoon uit het publiek geeft vervolgens de vijf kaarten aan de assistent. De assistent geeft hem één kaart terug en geeft de overige vier kaarten aan de goochelaar (zonder oogcontact en zonder te spreken!). De goochelaar zegt onmiddellijk welke de ontbrekende kaart is.

De truc :

- Vooraleer we aan de uitleg beginnen, definiëren we een orde op de verzameling van de 52 kaarten. We nummeren de kaarten van 1 tot 52 als volgt : om te beginnen maken we een volgorde in de soorten en doen dit alfabetisch, eerst harten ♡, dan klaveren ♣, dan ruiten ◇ en tenslotte schoppen ♠. Vervolgens nummeren we binnen elke soort van aas (eerste), twee (tweede) tot boer (elfde), vrouw (twaalfde) en heer (dertiede). Dus bv. $1 = \heartsuit$ aas, $16 = \clubsuit 3$, $30 = \diamondsuit 4$ en $52 = \spadesuit$ heer.
- In elke greep van 5 kaarten (de duiven) zijn er door DHP minstens twee van dezelfde soort (de hokken : harten, klaveren, ruiten, schoppen). Neem 2 kaarten van zo'n soort. De kaart die de assistent aan de persoon uit het publiek terug geeft is één van deze 2 kaarten. Hij zorgt er tevens voor dat de tweede kaart van die soort de eerste is van die 4 kaarten die hij aan de goochelaar geeft.
- Cruciaal is welke van de twee gekozen kaarten de assistent nu aan de man uit het publiek geeft. Om dit te snappen, definiëren we een (asymmetrische) afstand tussen 2 kaarten van dezelfde soort. We kunnen best zien hoe dit werkt als we (de nummers van) de kaarten voorstellen op een cirkel :



We definiëren voor elke $A, B \in \{1, 2, \dots, 13\}$: $d(A \rightarrow B)$ = de afstand in wijzerzin tussen A en B (of $B - A$ in $\mathbb{Z}_{13}$). Bv. $d(\text{Aas} \rightarrow \text{Tien}) = d(1 \rightarrow 10) = 9$ maar $d(\text{Tien} \rightarrow \text{Aas}) = d(10 \rightarrow 1) = 4$. Zo ook $d(\text{Heer} \rightarrow \text{Vier}) = d(13 \rightarrow 4) = 4$, terwijl $d(\text{Vier} \rightarrow \text{Heer}) = d(4 \rightarrow 13) = 9$. In het algemeen zal voor elke A en B , $d(A \rightarrow B) + d(B \rightarrow A) = 13$ en zal bijgevolg, ofwel $d(A \rightarrow B) \leq 6$, ofwel $d(B \rightarrow A) \leq 6$ (maar dus niet beide tegelijk!).

Als we de twee gekozen kaarten van dezelfde soort A en B noemen, dan geeft de assistent aan de goochelaar die kaart A zodat $d(A \rightarrow B) \leq 6$. Bv. als hij de keuze moet maken tussen Harten Tien en Harten Aas, dan zal hij de Aas aan de persoon uit het publiek geven, en als hij de keuze moet maken tussen Schoppen Vier en Schoppen Heer, dan zal hij hem de Vier geven.

- (d) Hoe kan de goochelaar nu de ontbrekende kaart (B uit voorgaande) raden? De soort kent hij al want het is dezelfde soort als de eerste kaart van de vier die hij krijgt. Hij moet eigenlijk enkel nog $d(A \rightarrow B)$ te weten komen. Uit voorgaande volgt dat dit een getal tussen 1 en 6 is. Om dit getal te bepalen, gebruikt hij de overige drie kaarten. Deze kunnen op $3! = 6$ manieren onderling gepermuteerd worden. Als we de kaart met het kleinste nummer in de hierboven gedefinieerde orde noteren met a , die met het tweede grootste nummer met b en die met het grootste nummer met c , dan kunnen we de permutaties als volgt noteren : abc , acb , bac , bca , cab , cba . We associeren aan alle zes de permutaties een getal van 1 tot 6 volgens de alfabetische ordening, als volgt :

abc	1
acb	2
bac	3
bca	4
cab	5
cba	6

De assistent moet nu zorgen dat de overige drie kaarten in een dusdanige volgorde zitten dat de overeenkomstige permutatie overeenkomt met het getal $d(A \rightarrow B)$.

- (e) We verduidelijken alles met een voorbeeld. Veronderstel dat de man uit het publiek volgende greep van vijf maakt : ♣ Heer, ♦7, ♠3, ♣2 en ♣10.

De assistent kiest de kaarten ♣2 en ♣10 en daar $d(\clubsuit 10 \rightarrow \clubsuit 2) = 5$, geeft hij dus ♣2 aan de persoon uit het publiek.

Van de overige drie kaarten is ♣ Heer de kleinste (a) en ♠3 de grootste (c). ♦7 is de middelste (b). De permutatie geassocieerd aan het getal 5 is cab . Bijgevolg geeft hij aan de goochelaar de overige 4 kaarten in de volgorde : ♣10, ♠3, ♣ Heer, ♦7.

De goochelaar weet dus dat de kaart die hij moet raden een ♣ is (zelfde soort als eerste gekregen kaart) en weet dat hij 5 (nummer van de permutatie gevormd door de laatste drie kaarten) moet 'optellen' bij de eerste kaart, ♣10, om de kaart te raden : het is dus ♣2.

Referenties

- [1] V.K. Balakrishnan, *Introductory Discrete Mathematics*. Prentice Hall, New Jersey, 1991
- [2] Pal Erdos and George Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*. Compositio Math. 2, pp. 463–470 (1935)
- [3] L.Gheysens, *De Einsteincode*. Die Keure, Brugge, 2005
- [4] S. Radziszowski, *Small Ramsey Numbers, revision 1*, Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Surveys DS1, revisions 1 through 10, 1994-2004, Dept. of Computer Science, Rochester Institute of Technology, (1993).
- [5] S. Radziszowski and B. McKay, $R(4,5)=25$, Journal of Graph Theory 19, pp. 309–322 (1995)