
Inleiding

Het document dat voorligt is opgesteld door ere-pedagogisch begeleider Walter De Volder. Onze bijzondere dank en waardering gaan dan ook volledig naar hem: van zijn vele uren opzoekingswerk en denkwerk kunnen wij nu mee genieten.

De tekst gaat over de Gulden Snede en de getallenrij van Fibonacci. Een onderwerp dat wiskundigen al eeuwen lang boeit. Ook vandaag nog blijft het onderwerp bijzonder actueel, en daar zullen hulpmiddelen zoals grafische rekentoestellen en computers ongetwijfeld niet vreemd aan zijn.

Het onderwerp lijkt bijzonder geschikt om leerlingen aan te bieden als module in de “Vrije Ruimte” van de derde graad of in het kader van Begeleid Zelfstandig Leren. Het gaat om een heel mooi stukje wiskunde en bovendien kennen de Gulden Snede en de getallenrij van Fibonacci toepassingen in de kunst, in de wetenschap, in de natuur. Meteen vakoverschrijdend dus.

Op het internet is heel wat bijkomend materiaal te vinden over dit onderwerp. We vermelden een tweetal URL's:

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>

<http://www.home.zonnet.nl/LeonardEuler/fiboe1.htm>

Dominiek Ramboer

Paul Decuypere

DEEL I – DE GULDEN SNEDE

1.1 Definitie en constructie

De Griekse wiskundige Euclides (ongeveer 300 v. Chr.) schreef de *Elementen*, d.i. een verzameling van 13 Boeken. In Boek 6 behandelt hij de verdeling van een lijnstuk in uiterste en middelste reden. Hij bedoelt hiermee de verdeling van een lijnstuk in twee stukken zodat de verhouding van het *grootste* deel tot het *kleinste* deel gelijk is aan de verhouding van het *gehele* lijnstuk tot het *grootste* deel (die verhouding wordt de gulden snede genoemd, notatie $\Phi = p$)

Andere benamingen: de goddelijke verhouding, de gulden snede.



Het komt er dus op aan op $[AB]$ een punt G te bepalen zodat:

$$\frac{|AG|}{|GB|} = \frac{|AB|}{|AG|} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Uit $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ volgt $a^2 = ab + b^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} + 1$

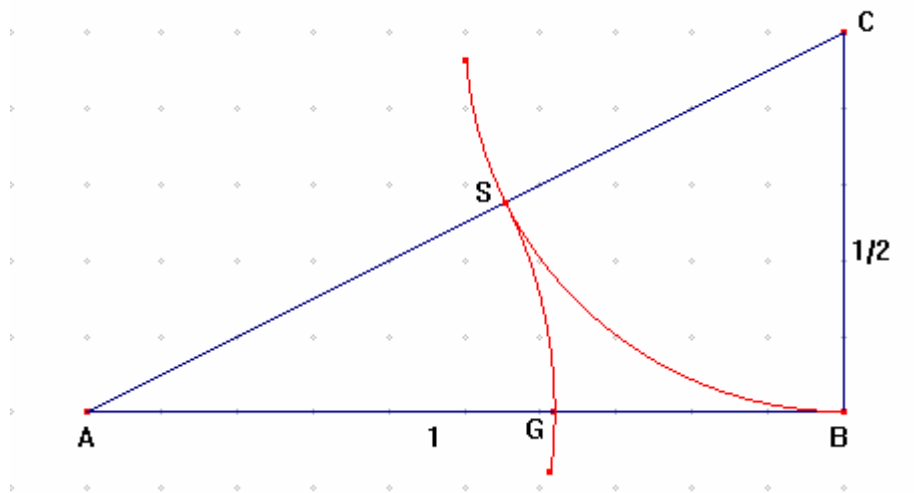
zodat $p = \frac{a}{b}$ een oplossing is van de vergelijking $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

De positieve oplossing daarvan is $p = \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

De negatieve oplossing is $p' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ waarbij (product $p \cdot p' = -1$) $p' = -\frac{1}{p}$

De notatie Φ werd in 1914 ingevoerd door Théodore Cook ter ere van de klassieke beeldhouwer Phidias die het Parthenon in Athene met beelden gedecoreerd heeft. In 1996 werd Φ door computers berekend op 10.000.000 decimalen in een tijd van 29 min. 16 sec. In mei 2000 werd Φ berekend op 1.5 miljard decimalen in minder dan 3 uur tijd.

Constructie van G



we zoeken een punt G op [AB] zo dat $\frac{|AG|}{|GB|} = p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

of: we zoeken een punt G op [AB] zo dat $\frac{|GB|}{|AG|} = \frac{1}{p} = -p' = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

In de constructie zien we:

$$|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{en verder} \quad |AG| = |AS| = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = -p'$$

1.2 Phi is irrationaal (Bewijs uit het ongerijmde)

Stel dat $p = \text{Phi}$ kan geschreven worden als een breuk en stel dat a / b de onvereenvoudigbare vorm is van die breuk. Dan hebben de natuurlijke getallen a en b alleen de factor 1 gemeen.

Uit $p^2 = p + 1$ (1) volgt

$$a^2/b^2 = a/b + 1$$

waaruit onderstaande twee gelijkheden

$$a^2 = ab + b^2 \quad a^2 - ab = b^2$$

of

$$a^2 = b(a+b) \quad a(a-b) = b^2$$

waaruit

$$b \mid a^2 \quad (2) \quad a \mid b^2 \quad (3)$$

Omdat a en b natuurlijke getallen zijn die alleen maar 1 als gemeenschappelijke factor hebben, hebben b en a^2 ook alleen 1 als gemeenschappelijke factor. Uit (2) volgt dan $b = 1$. Analoog volgt uit (3) dat $a = 1$.

Maar dan is $p = 1/1 = 1$. Dit voldoet niet aan (1) en dus is de onderstelling dat p kan geschreven worden als een breuk vals. p kan dus niet geschreven worden als een breuk of nog p is irrationaal

Phi met 500 decimalen

	Dps :
1.61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576	50
28621 35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374	100
84754 08807 53868 91752 12663 38622 23536 93179 31800 60766	
72635 44333 89086 59593 95829 05638 32266 13199 28290 26788	200
06752 08766 89250 17116 96207 03222 10432 16269 54862 62963	
13614 43814 97587 01220 34080 58879 54454 74924 61856 95364	300
86444 92410 44320 77134 49470 49565 84678 85098 74339 44221	
25448 77066 47809 15884 60749 98871 24007 65217 05751 79788	400
34166 25624 94075 89069 70400 02812 10427 62177 11177 78053	
15317 14101 17046 66599 14669 79873 17613 56006 70874 80710	500

1.3 Phi als kettingbreuk

Wij definieerden Phi als de positieve wortel van de vergelijking

$$p^2 = p + 1$$

Als we beide leden van de vergelijking delen door p dan komt er

$$p = 1 + 1/p$$

Vandaar een andere definitie van p : het getal dat 1 meer is dan zijn omgekeerde. Waar we p ook zien, wij dit mogen vervangen door $1 + 1/p$.

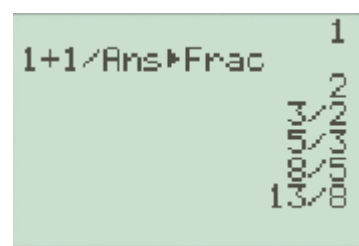
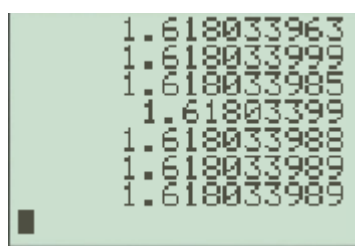
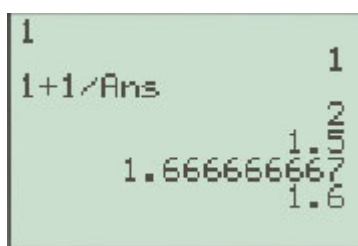
Dus

$$p = 1 + 1/(1 + 1/p).$$

Als we dit steeds maar herhalen dan komt er dat p kan geschreven als de oneindig doorlopende kettingbreuk:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Met een grafisch rekentoestel vinden we



Of met Derive

```
#1: ITERATES(1 + 1/x, x, 1, 20)
#2: [1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, 144/89, 233/144, 377/233, 610/377, 987/610, 1597/987, 2584/1597, 4181/2584, 6765/4181, 10946/6765, 17711/10946]
#3: [1, 2, 1.5, 1.666666666, 1.6, 1.625, 1.615384615, 1.619047619, 1.617647058, 1.618181818, 1.617977528, 1.618055555, 1.618025751, 1.618037135, 1.618032786, 1.618034447, 1.618033813, 1.618034055, 1.618033963, 1.618033998, 1.618033985]
```

Phi = p kan nog op een andere manier benaderd worden.

Uitgaande van $p^2 = 1 + p$

komt er:

$$\begin{aligned}
 p &= \text{sqr}(1+p) & \text{sqr} &= \sqrt{} \\
 &= \text{sqr}(1 + \text{sqr}(1+p)) \\
 &= \text{sqr}(1 + \text{sqr}(1 + \text{sqr}(1+p))) \\
 &= \dots = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}
 \end{aligned}$$

Met een grafisch rekentoestel

```

√(1)
1
√(1+Ans)
1.414213562
1.553773974
1.598053182
1.611847754

```

```

1.61803394
1.618033974
1.618033984
1.618033987
1.618033988
1.618033989
1.618033989

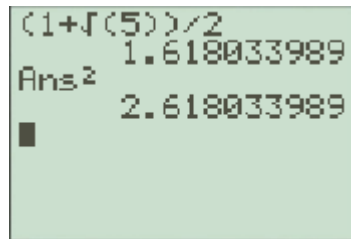
```

Met Derive

```
#4: ITERATES(√(1 + x), x, √1, 20)
```

```
#5: [1, 1.414213562, 1.553773974, 1.598053182, 1.611847754, 1.616121206, 1.617442798, 1.617851290, 1.617977530, 1.618016542, 1.618028597,
1.618032322, 1.618033473, 1.618033829, 1.618033939, 1.618033973, 1.618033984, 1.618033987, 1.618033988, 1.618033988, 1.618033988]
```

1.4 Het decimaal deel van een getal en van zijn kwadraat



Stel vast dat p en p^2 (in elk geval al tot aan het negende cijfer) hetzelfde decimaal deel hebben. Is dit ook zo voor de oneindig veel decimalen die we niet in beeld krijgen?

Het antwoord is ja want: $p^2 = 1 + p$ of $p^2 - p = 1$

Zijn er nog andere positieve getallen met deze eigenschap. Voor de natuurlijke getallen is het uiteraard zo ($5 = 5.00000\dots$ $25 = 25.00000\dots$). Zijn er (echte) rationale getallen met die eigenschap, zijn er nog irrationale getallen? De algebra van de tweedegraadsfunctie brengt hier de oplossing.

Zij x een getal met hetzelfde decimale deel als zijn kwadraat, dan is:

$$x^2 - x = n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

De positieve oplossing van deze vierkantsvergelijking is:

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4n})$$

Voor $n = 1$ komt er:

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \text{Phi}$$

$$n = 2$$

$$x = 2 \quad (\text{triviaal})$$

$$n = 3$$

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$$

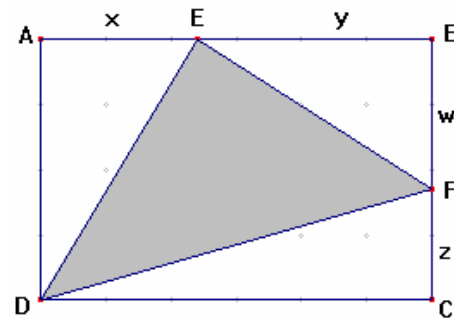
$$n = 4$$

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$$

Men kan steeds verder gaan. Men vindt ofwel irrationale getallen, ofwel natuurlijke getallen. Men vindt nooit echte breuken. Immers als $1 + 4n$ een volkomen kwadraat is, dan is het een oneven getal en de wortel daaruit is ook oneven. Telt men daar 1 bij en deelt men het resultaat door 2 dan is het resultaat een natuurlijk getal.

1.5 De verdeling van een rechthoek

Construeer een driehoek binnen een gegeven rechthoek zo, dat als men de driehoek wegneemt, er drie driehoeken overblijven met dezelfde oppervlakte.



Het komt er op aan de punten E en F te bepalen zodat:

$$\text{Opp}(\triangle DAE) = \text{Opp}(\triangle EBF) = \text{Opp}(\triangle FCD)$$

$$\frac{1}{2}x(w+z) = \frac{1}{2}yw = \frac{1}{2}(x+y)z$$

Uit de gelijkheid van het eerste en het derde lid volgt $xw = yz$ of $w/z = y/x$. (1)
Beide zijden van de rechthoek worden verdeeld in stukken met dezelfde verhouding. Welke verhouding?

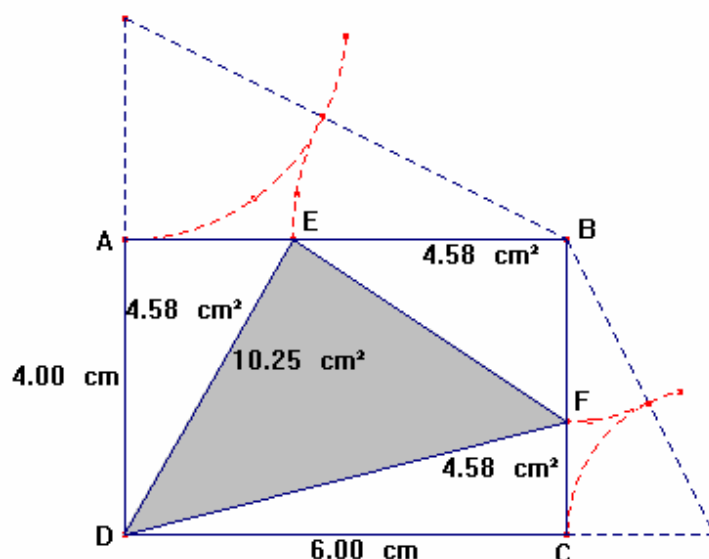
Uit de gelijkheid van de eerste twee leden volgt:

$$(w+z)/w = y/x \quad \text{of} \quad 1 + z/w = y/x. \quad (2). \quad \text{Stel } y/x = p \text{ en vervang (1) in (2).}$$

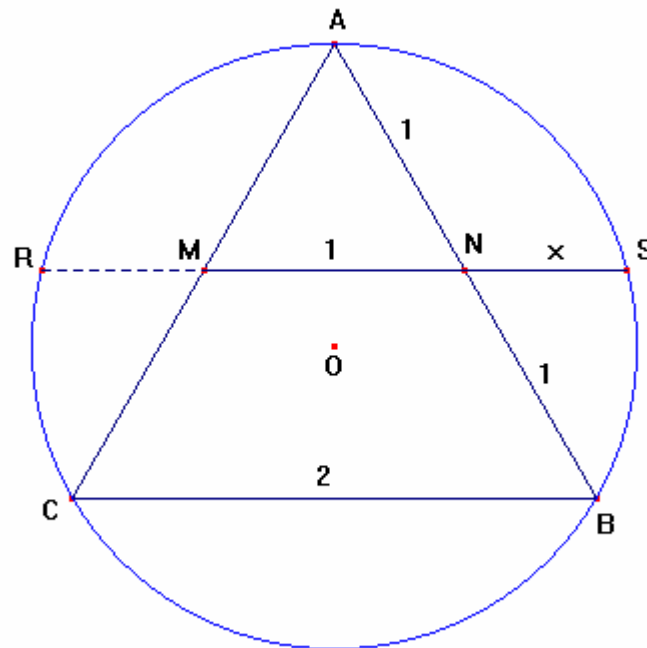
$$\text{Er komt } 1 + 1/p = p \quad \text{of} \quad p + 1 = p^2 \text{ en dus is } p = \text{Phi.}$$

$$\text{Maar dan is } y = p \cdot x \quad \text{en} \quad w = p \cdot z$$

E en F worden dus bepaald door de gulden snede uit te voeren op [AB] en [CD].
In de onderstaande Cabri-figuur werden E en F geconstrueerd.
Met Cabri kun je de proef maken: de drie oppervlakten zijn gelijk.



1.6 Phi en de gelijkzijdige driehoek



Opgave: De gelijkzijdige driehoek ABC is beschreven in de cirkel (O). MN is middenparallel. Verlengt men MN naar rechts, dan wordt de cirkel gesneden in een punt S.

Er is te bewijzen dat N het lijnstuk [MS] verdeelt in uiterste en middelste reden.

Bewijs:

Stel de zijde van de driehoek gelijk aan 2. Dan is $|MN| = |NB| = |NA| = 1$

Verleng MN ook naar links; het snijpunt met de cirkel noemen we R.

Stel $|NS| = |MR| = x$

Het te bewijzen komt neer op: $x / 1 = 1 / (1+x)$ of $x^2 + x = 1$

Door gebruik te maken van de eigenschap '*macht van een punt t.o.v. een cirkel*' komt er: $|NR|.|NS| = |NA|.|NB|$ of $(1+x).x = 1.1$ of $x + x^2 = 1$.

Bedenking

Als men deze eigenschap ook analytisch wil bewijzen, gaat men beseffen dat in sommige situaties de synthetische meetkunde een zeer krachtig en efficiënt instrument is.

1.7 Kanttekeningen bij de Gulden Snede

1.7.1

Fra Luca Pacioli leefde in de tijd dat Columbus Amerika ontdekte.

Hij was minderbroeder en wiskundige. Vanaf 1496 was hij werkzaam als wiskundeleraar aan het hof van de hertog van Milaan: Ludovicus Sforza. Daar raakte hij bevriend met Leonardo da Vinci, die veel interesse had voor wiskunde. In 1498 schrijft Pacioli zijn *De Divina Proportione*. De tekeningen zijn van de hand van da Vinci, die de "goddelijke verhouding" ook in zijn kunstwerken heeft toegepast. *De Divina Proportione* bevat de stellingen van Euclides in verband met de gulden snede en een studie van de regelmatige veelhoeken. Hij maakt echter ook beschouwingen van esthetische en mystische aard.

Pacioli heeft ook werk gepubliceerd i.v.m. het oplossen van vergelijkingen van de derde en vierde graad. Hij wordt ook nog wel de "vader van het boekhouden" genoemd.

Et Euclide s'en tiendra à cette théorie, sans aucune application pratique.
Ce n'est finalement qu'au XIX^e siècle, qu'un professeur de philosophie, Adolf ZEISING, élaborait une théorie sur l'esthétique des objets beaux et utilisa le terme de section d'or pour désigner ce rapport. Et ainsi naquit le 'Nombre d'or'. Puis vers 1930, le Roumain Matila Ghyka voit du nombre d'or partout: les spirales des coquillages, la disposition des feuilles des plantes, le nombre de pétales,...Et aussi dans les oeuvres d'art, vases anciens, peinture, le Parthénon, etc. C'est à se demander s'il suffit de savoir ce que l'on cherche pour le trouver; ou de fixer les hypothèses de façon à pouvoir atteindre son but.
En ce qui concerne le Parthénon par exemple, d'autres études ont démontré que les Grecs s'en tenaient à des nombres entiers et ont relevé entre autres que la largeur de la façade correspondait au triple de la hauteur d'une colonne.

Schilders als Dali en Picasso en architect Le Corbusier verwerken de gulden snede in hun werken.

1.7.2

Suis-je bien proportionné(e)?

Avouons-le: chacun(e) d'entre nous s'est posé(e) cette question. Tout au moins du temps de son adolescence.

En feuilletant d'anciennes notes de cours (mathématiques pur sucre), je retrouve une proposition de test très simple à effectuer sur votre personne.

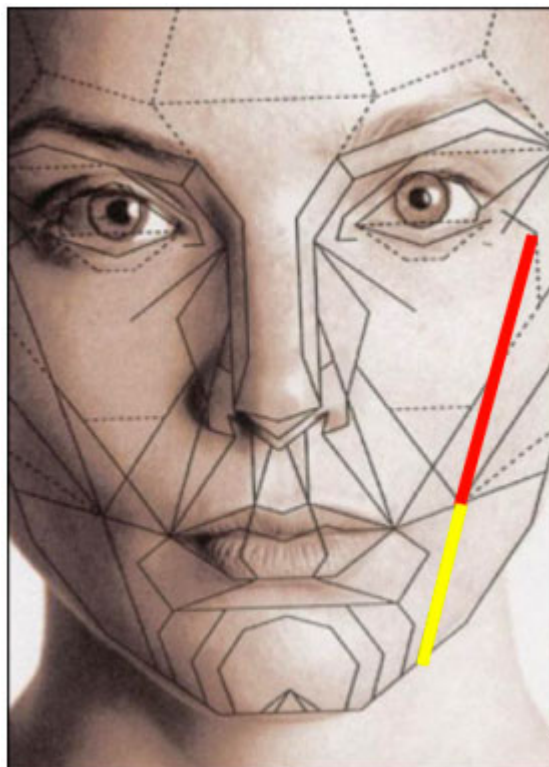
Pour savoir si vous avez les proportions d'un Apollon, procédez ainsi :

calculer le **distance sol à nombril / distance nombril à**
 rapport **tête**
 et aussi **votre hauteur / distance sol à nombril**

Plus le résultat de ces deux calculs sera proche de 1,618..., mieux vous serez proportionné. Je dois, sans fausse modestie, avouer que ce test me semble très valable...

Par contre, je n'ai rien à proposer pour le tour de taille.

Als je zo'n gezicht wilt dan moet je er ook een gulden snede in je portemonnee bijnemen!



DEEL II – DE RIJ VAN FIBONACCI

2.1 Wie was Fibonacci

Fibonacci, "de grootste Europese wiskundige van de Middeleeuwen", werd geboren in Pisa rond 1175. Hij noemde zichzelf Fibonacci (filius Bonacci, zoon van Bonacci). Hij staat ook bekend onder de naam Leonardo Pisano. (Leonardo van Pisa).

Pisa was in die tijd een belangrijk commercieel centrum. Er werd veel handel gedreven met alle gebieden rond de Middellandse Zee. Zijn vader, Guilielmo Bonacci was commercieel afgevaardigde van Pisa in de Noord-Afrikaanse stad Bugia (Bougie) van waaruit wassen kaarsen werden uitgevoerd.

Leonardo groeide dus op in het Moorse Noord-Afrika. Hij ondernam van daaruit veel reizen in het Middellandse-Zee gebied. Hij kwam in contact met handelaars van heel dit gebied en leerde zo verschillende manieren van rekenen kennen. Hij beseftte vlug dat het Hindoe-Arabisch decimaal systeem veel voordelen had en in elk geval veel handiger was dan de Romeinse cijfers.

In zijn *Liber Abaci* (rekenboek) behandelde hij het rekenen in het decimaal stelsel. Hij vond veel navolging bij de Europese wiskundigen van die tijd. Bij de Romeinse cijfers was er geen nood aan een symbool voor "nul" of "niets". In het decimaal positiestelsel was zo'n symbool wel noodzakelijk. (MMIII - 2003). Toch was er bij de handelaren van die tijd nog een weerstand tegen het nieuw systeem. Ze beweerden o.a. dat men 1000 gemakkelijk kon vervalsen tot 1999. Het zal nog 200 jaar duren tot het decimaal talstelsel in heel Europa werd toegepast.

Liber Abaci bevat ook het grootste deel van de algebra en de rekenkunde die op dat moment in de Arabische wereld gekend was (vierkantwortels, vergelijkingen van de eerste en de tweede graad,..)

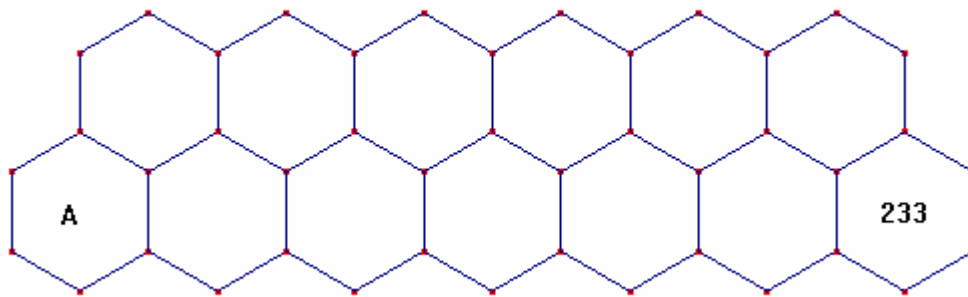
In 1220 verscheen zijn *Practica geometriae*, waarin alle kennis over meetkunde en driehoeksmeting van die tijd opgetekend werd. Eén van de behandelde onderwerpen was de formule van Heroon, die de oppervlakte van een driehoek uitdrukt in functie van de zijden $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Fibonacci stierf in 1240. Hij heeft een standbeeld gekregen in de nabijheid van de beroemde Scheve Toren in zijn geboortestad.

2.2 De honingraat van Fibonacci

Hieronder vind je een betegeling in de vorm van een honingraat.

Het is de bedoeling van startend op tegel A, te stappen naar de tegel uiterst rechts. Men moet steeds "vooruit" gaan d.w.z. dat alleen volgende bewegingszinnen toegelaten zijn: $\rightarrow$ $\nearrow$ $\searrow$.



Vanuit A kan men op één manier naar de aanpalende tegel rechtsboven: $\nearrow$

Vanuit A kan men op twee manieren naar de aanpalende tegel rechtsonder: $\rightarrow$ en $\searrow$

Toon aan dat men vanuit A op 233 verschillende manieren naar de uiterst rechtse tegel kan gaan. Schrijf op elke tegel het getal dat aangeeft op hoeveel manieren men vanuit A naar die tegel kan gaan.

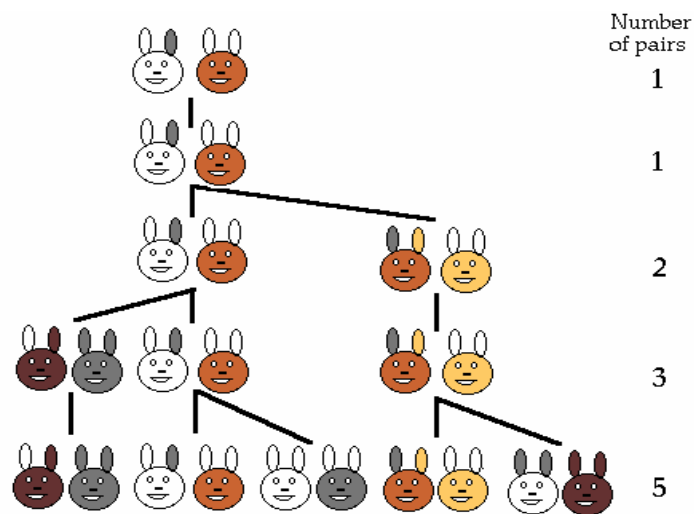
2.3 Het konijnenprobleem

In 1202 stelde Fibonacci volgend probleem in zijn *Liber Abaci*:

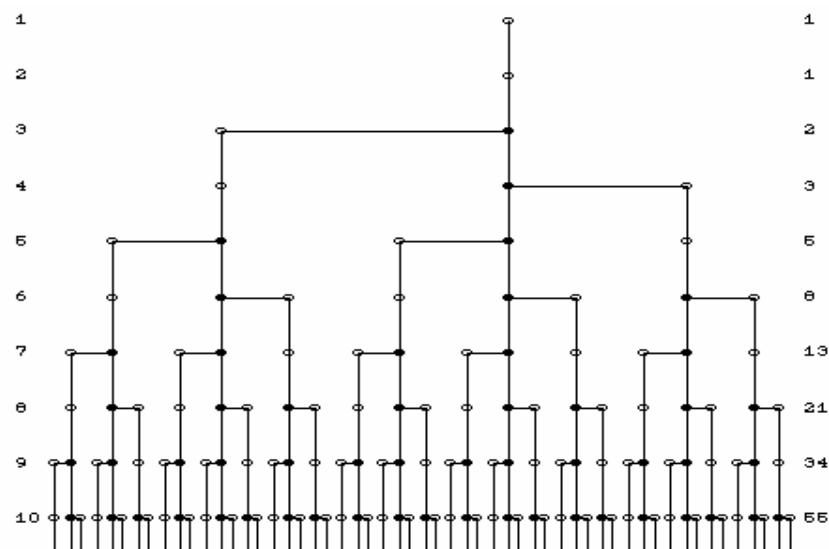
Als men aanneemt dat

- een paar babykonijnen na één maand volwassen is,
- een volwassen paar konijnen elke maand een paar babykonijnen voortbrengt (een mannelijk en een vrouwelijk),
- er geen konijnen sterven,
- men start met één paar babykonijnen aan het begin van de eerste maand.

Hoeveel paar konijnen zijn er dan een jaar later?



Het aantal paren konijnen aan het begin van elke maand is 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, **233**, 377, 610, 987,...



2.4 De vormingswet voor de rij

De vormingswet is eenvoudig: $F(1) = F(2) = 1$ vanaf $n = 3$ is $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$. .
De oneindig voortlopende rij die op die manier ontstaat is de zogenaamde *rij van Fibonacci*. Die naam werd gegeven door *Lucas* (Eduard Lucas, 1842-1891).

De algemene Fibonacci-rij begint met twee willekeurige natuurlijke getallen. De volgende termen worden gevormd door de twee vorige op te tellen.

Een voorbeeld is de rij van Lucas: 2, 1, 3, 4, 5, 9, 14, 23,...

Hieronder vind je een paar kleine programma's i.v.m. de rij van Fibonacci voor TI83 of TI84.

In FIBO1 worden de getallen van Fibonacci in display gebracht kleiner of gelijk aan een in te geven getal G. In de uitvoering werd $G = 5000$ genomen.

```
PROGRAM:FIBO1
:0→C:1→A:1→B
:Input "G?",G
:Disp A
:Repeat C>G
:A+B→C:Disp C-A
:Pause :B→A:C→B
:End
```

```
377
610
987
1597
2584
4181
Done
```

In FIBO2 wordt het n^{de} getal uit de rij berekend.

```
PROGRAM:FIBO2
:0→C:1→A:1→B
:Input "N?",N
:For(I,1,N-2)
:A+B→C:B→A:C→B
:End
:Disp C
```

```
PrgrmFIBO2
N? 20
6765
Done
```

Wil je hetzelfde doen voor een algemene rij van Fibonacci, dan volstaat het in de eerste lijn van de programma's de begintermen in A en B in te voeren.

Ook met Derive is de rij natuurlijk weer te geven.

- * Gebruik de functie

$$\text{fib}(a, b, n) := (\text{ITERATE}([k, j + k], [j, k], [a, b], n - 1))_1$$

waarbij a en b de startwaarden zijn, en n de hoeveelste term van de rij die moet weergegeven worden.

Een gelijkaardige functie is de functie

```
fibbis(a, b, n) :=
  Prog
    i := 1
    c := 0
  Loop
    c := a + b
    a := b
    b := c
    i := i + 1
  If i > n - 1
    RETURN a
```

Bijvoorbeeld:

<code>fib(1, 1, 20)</code>	6765
<code>fib(3, 8, 15)</code>	3715
<code>fibbis(3, 8, 15)</code>	3715

- * Wil je de hele rij van Fibonacci zien (n termen), gebruik dan de functie

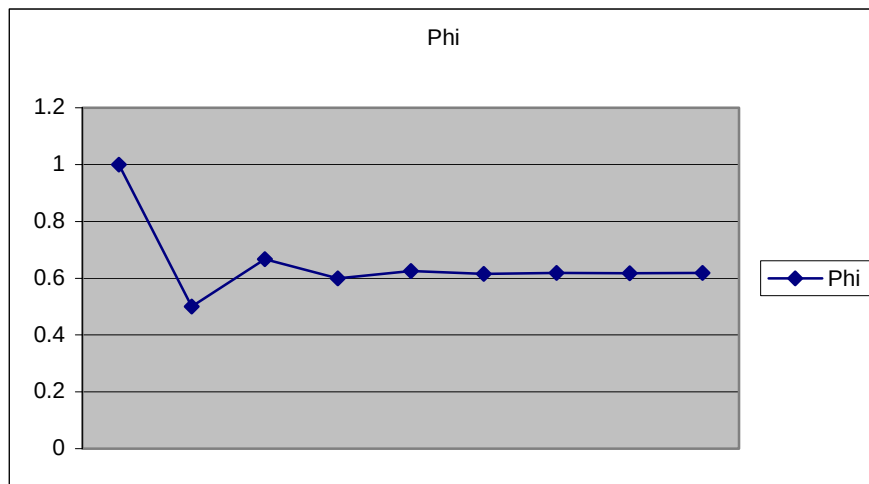
$$\text{fibrij}(a, b, n) := \text{ITERATES}([k, j + k], [j, k], [a, b], n - 1)'_1$$

Bijvoorbeeld:

`fibrij(1, 1, 15) = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610]`

`fibrij(2, 7, 10) = [2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107, 173, 280]`

Onderstaande figuur bevat de grafiek van de verhouding van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci. De verhouding $F(n+1)/F(n)$ nadert tot Phi als $n \rightarrow \infty$.



Ook in een algemene rij van Fibonacci is dit het geval.

In het programma FIBO3 is een algemene Fibonacci-rij ingevoerd met begintermen 7 en 31. In het display verschijnen de waarden van het quotiënt van een term en zijn voorgaande. Hier komt onze bekende Phi = p weer opduiken.

```
PROGRAM:FIBO3
:0→C:7→A:31→B
:Repeat C>1e7
:A+B→C:B→A:C→B
:Disp B/A:Pause
:End
:■
```

```
1.61803399
1.618033988
1.618033989
1.618033989
1.618033989
1.618033989
1.618033989
Done
■
```

In Derive kan de volgende functie gebruikt worden om dit te controleren:

```
fibgs(a, b, n) :=
  Prog
  i := 1
  Loop
    x := (ITERATE([k, j + k], [j, k], [a, b], i))↓1
    y := (ITERATE([k, j + k], [j, k], [a, b], i - 1))↓1
    z := x/y
    If i > n - 1
      RETURN z
    i := i + 1
```

Bijvoorbeeld:

`fibgs(1, 1, 100)`

1.618033988

Of beter:

`VECTOR(Fibgs(1, 1, n), n, 1, 20)`

[1, 2, 1.5, 1.666666666, 1.6, 1.625, 1.615384615, 1.619047619, 1.617647058, 1.618181818, 1.617977528, 1.618055555, 1.618025751, 1.618037135, 1.618032786, 1.618034447, 1.618033813, 1.618034055, 1.618033963, 1.618033998]

2.5 Sommaties in een Fibonacci-rij

De som van alle termen van een Fibonacci-rij is uiteraard oneindig. Maar:

- Wat is de som van de eerste 20 (N) termen?
- Wat is de som van alle termen kleiner dan of gelijk aan 200000 (G)?
- Bereken de som $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 196418 + 317811$?
- Bereken de som $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 317811$?

Men zou alle getallen kunnen opschrijven en daarna optellen. Maar als het aantal termen groot is, wordt dat een hele klus. We zullen de GRM inschakelen.

- De som van de eerste N termen wordt berekend met volgend programma FIBO4. De methode is algemeen. De TI83 - 84 geeft exacte waarden tot en met N=47.

```
PROGRAM:FIBO4
:0→C:1→A:1→B
:A+B→S
:Input "N?",N
:For(I,1,N-2)
:A+B→C:S+C→S
:B→A:C→B
:End:Disp "S=",S
```

```
PrgrmFIBO4
N?20
S=
17710
Done
```

(Wil je het programma hernemen: druk dan ENTER; het programma verlaten, druk dan CLEAR)

- Voor de som van alle termen kleiner dan of gelijk aan G is er een probleem. Hoeveel getallen zijn dat? Wat is het grootste getal? Volgend programma FIBO5 geeft een antwoord op beide vragen. Met FIBO4 kan men dan de som berekenen.

```
PROGRAM:FIBO5
:0→C:1→A:1→B
:1→N
:Input "G?",G
:Repeat C>G
:A+B→C:B→A:C→B
:N+1→N
:End
```

```
PROGRAM:FIBO5
:Repeat C>G
:A+B→C:B→A:C→B
:N+1→N
:End
:Disp "N=",N
:Disp "F.MAX=",A
```

```
PrgrmFIBO5
G?200000
N=
27
F.MAX=
196418
Done
```

(vervolg programma FIBO5)

Stel vast dat er 27 termen zijn, kleiner dan 200000. De grootste is 196418. Met FIBO4 vindt men dat de som gelijk is aan 514228.

- In Derive is de volgende functie bedoeld om eerst te weten te komen hoeveel termen van de rij er zijn die kleiner zijn dan een gegeven getal g (eerst wordt dat aantal getoond, vervolgens het grootste getal van de rij van Fibonacci dat nog kleiner is dan het gegeven getal):

```

fibmax(a, b, g) :=
  Prog
    i := 1
    Loop
      s := (ITERATE([k, j + k], [j, k], [a, b], i - 1))↓1
      If s > g
        RETURN y
      y := [i, s]
      i := i + 1

```

Bijvoorbeeld:

$\text{fibmax}(1, 1, 200000) = [27, 196418]$

Er zijn dus 27 getallen kleiner dan 200000, de grootste ervan is 196418.

Om de som te berekenen gebruiken we dan de functie (n is het aantal termen van de som)

```

fibsom(a, b, n) :=
  Prog
    i := 1
    c := 0
    s := 0
    Loop
      s := s + a
      c := a + b
      a := b
      b := c
      i := i + 1
      If i > n
        RETURN s

```

Hier toegepast:

$\text{fibsom}(1, 1, 27) = 514228$

- Toch kan men zonder GRM of PC al heel wat realiseren. Neem nu volgende opgave:

Bereken de som $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 196418 + 317811$. (1)

Bestaat er een formule voor de som van de eerste N termen van de rij van Fibonacci? Ja, en ze is gemakkelijk te vinden door eerst speciale gevallen te bestuderen. (= heuristiek).

F-rij	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
S(1)	1	=	1							
S(2)	1	+	1	=	2					
S(3)	1	+	1	+	2	=	4			
S(4)	1	+	1	+	2	+	3	=	7	
S(5)	1	+	1	+	2	+	3	+	5	= 12

Bemerk dat de partieelsommen S(1), S(2), S(3), S(4), S(5) telkens 1 minder zijn dan het getal van Fibonacci dat erboven staat:

$$\begin{aligned} S(2) &= 1 + 1 = 2 = 3 - 1 = F(4) - 1 \quad (*) \\ S(5) &= 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = 13 - 1 = F(7) - 1. \end{aligned}$$

Hieruit ontstaat het vermoeden:

$$S(N) = F(N+2) - 1 \quad (2)$$

We bewijzen dit door volledige inductie.

(2) is waar voor $N = 2$: zie (*)

Als (2) waar is voor $N = l$, dus als $S(l) = F(l+2) - 1$ (**), dan is te bewijzen dat (2) ook waar is voor $N=l+1$ dus dat $S(l+1) = F(l+3) - 1$.

$$\begin{aligned} S(l+1) &= S(l) + F(l+1) && \text{(pas nu (**) toe)} \\ &= F(l+2) - 1 + F(l+1) \\ &= F(l+2) + F(l+1) - 1 && \text{(vormingswet in Fibonacci-rij)} \\ S(l+1) &= F(l+3) - 1 \end{aligned}$$

We passen formule (S) toe om (1) te sommeren.

$$\begin{aligned} F(N+1) &= 196418 + 317811 = 514229 \\ F(N+2) &= 317811 + 514229 = 832040. \\ \text{De gevraagde som is dus } &832039. \end{aligned}$$

- Een opgave als: sommeer $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 317811$ is moeilijker dan de vorige. Waarom?

Oplossing. Met FIBO5 de term bepalen die voorafgaat aan 317811 (kies $G=317800$). Er komt 196418. De opgave is teruggebracht tot de vorige.

Idem voor het gebruik met Derive: gebruik eerst fibmax om het getal 196418 te weten te komen.

Oefeningen.

Geld formule (S) nog voor de rij van Lucas.

Lucas- rij: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ..

$S(2)=$ $S(3)=$ $S(4)=$ $S(5)=$

Geld de formule (S) nog voor een algemene Fibonacci-rij?

Onderzoek: 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50,

$S(2)=$ $S(3)=$ $S(4)=$ $S(5)=$

Besluit: $S(N) = ..$

Wat wordt de formule voor een algemene Fibonacci-rij waarvan de tweede term b is?

$S(N) = ..$

De programma's FIBO4 en FIBO5 kunnen gebruikt worden voor algemene Fibonacci-rijen. Het volstaat de getallen A en B aan te passen.

In Derive zijn alle vermelde formules meteen opgesteld om toe te passen op algemene Fibonacci-rijen. Het lijkt aangewezen om voor de leerlingen alle formules hier te bundelen in een utility-file. Hoewel het ook een mooie uitdaging kan zijn voor de leerlingen om zowel met een GRM als met Derive de functies zelf in te voeren en te begrijpen.

2.6 De stamboom van een dar

Het probleem over de konijnen van Fibonacci is niet realistisch.

De getallenrij 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,.. was wellicht al bekend bij de Oude Grieken vanuit de apicultuur. De stamboom van honingbijen levert immers dezelfde rij op.

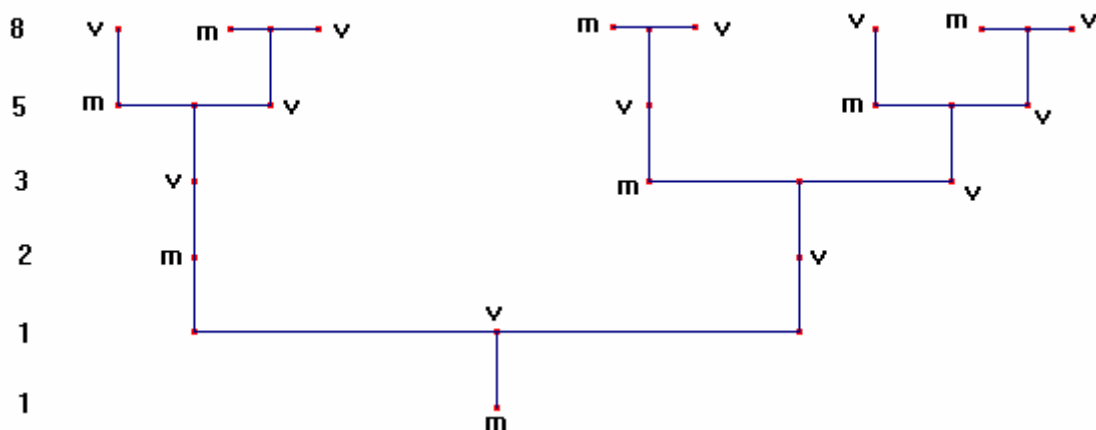
In een bijenkolonie heeft men:

- één koningin, een vrouwtje dat met koninginnenbrood gevoed wordt, en dat de eieren legt.
- werkbijen die vrouwelijk zijn en geen eieren leggen en ontstaan zijn uit eieren van de koningin die door een mannetje bevrucht werden.
- darren die mannelijk zijn en voortkomen uit onbevruchte eieren.

Mannelijke bijen hebben dus maar één ouder (moeder), vrouwelijke bijen hebben twee ouders (moeder en vader).

Hieronder vind je de stamboom van een dar.

Breid hem nog met één generatie uit.



Een dar heeft 1 ouder, 2 grootouders, 3 overgrootouders, 5 betovergrootouders, 8 betoudovergrootouders, 13..

De rij van Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...

2.7 Kaarten van Fibonacci – Stelling van Zeckendorf

De *kaarten van Fibonacci* zijn bedacht door de Canadese wiskundige *Roger V. Jean* om een natuurlijk getal te raden van 1 tot 75. Een persoon kiest een getal uit het aangegeven interval en somt de nummers op van de kaarten waarop dit getal zich bevindt. De persoon die moet raden, moet alleen maar de som maken van de kleinste getallen op de aangeduide kaarten. Die getallen maken deel uit van de rij van Fibonacci.

Voorbeeld. Iemand denkt aan het getal 71 en zegt dat zijn getal zich bevindt op de kaarten 9, 6 en 3.

1 1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 53, 56, 59, 61, 64, 67, 69, 72, 74	2 2, 7, 10, 15, 20, 23, 28, 31, 36, 41, 44, 49, 54, 57, 62, 65, 70, 75	3 3, 4, 11, 12, 16, 17, 24, 25, 32, 33, 37, 38, 45, 46, 50, 51, 58, 59, 66, 67, 71, 72
4 5, 6, 7, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 39, 40, 41, 52, 53, 54, 60, 61, 62, 73, 74, 75	5 8, 9, 10, 11, 12, 29, 30, 31, 32, 33, 42, 43, 44, 45, 46, 63, 64, 65, 66, 67	6 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75
7 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33	8 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54	9 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75

De som van de kleinste getallen op die kaarten is $55 + 13 + 3 = 71$

De opbouw van die kaarten steunt op de stelling van *Edouard Zeckendorf*. Die stelling zegt dat elk natuurlijk getal op slechts één manier kan geschreven worden als een som van niet-opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci. Als het getal zelf een Fibonacci-getal is, dan bestaat de “som” maar uit één term: het getal zelf.

E. Zeckendorf was een Belgische amateur-wiskundige, geboren in Luik in 1901 en er overleden in 1983. Hij was dokter in het Belgisch leger.

Om de Zeckendorf-voorstelling te vinden van 2004 gaat men als volgt te werk:

$$\begin{aligned} 2004 &= 1597 + 407 && (1597 \text{ is het grootste Fibonacci-getal kleiner dan } 2004) \\ &= 1597 + 377 + 30 \\ &= 1597 + 377 + 21 + 8 + 1 \end{aligned}$$

Vul de kaarten van Fibonacci aan zodat ze kunnen gebruikt worden voor getallen van 1 tot 80

$$76 =$$

$$77 =$$

$$78 =$$

$$79 =$$

$$80 =$$

De rij van Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...

2.8 De formule van Binet (Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856))

Tot nu toe werden de elementen van de rij van Fibonacci bepaald door de vormingswet: de eerste twee termen zijn gelijk aan 1, de volgende termen zijn gelijk aan de som van de twee vorige. Om een term te berekenen moet men dus alle voorgaande kennen. De formule van Binet geeft onmiddellijk de n^{de} term.

Stelling. De n^{de} term $U_n = F(n)$ van de Fibonacci-rij wordt gegeven door:

$$U_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Bewijs: $p = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ en $p' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ zijn de wortels van $x^2 - x - 1 = 0$

Uit $p^2 - p - 1$ volgt $p^2 = p + 1$.

En dus

$$\begin{aligned} p^3 &= p^2 + p = p + 1 + p = 2p + 1 \\ p^4 &= 2p^2 + p = 2(p + 1) + 1 = 3p + 2 \\ p^5 &= 3p^2 + 2p = 3(p + 1) + 2p = 5p + 3 \\ p^6 &= 5p^2 + 3p = 5(p + 1) + 3p = 8p + 5 \quad (8 = F(6), 5 = F(5)) \end{aligned}$$

De coëfficiënten en de constanten in de rechter leden hierboven zijn opeenvolgende Fibonacci-getallen. Door volledige inductie kan men bewijzen dat (*)

$$p^n = F(n).p + F(n-1)$$

Analoog: $p'^n = F(n).p' + F(n-1)$

Daaruit volgt $p^n - p'^n = F(n)(p - p')$

Zodat $F(n) = (p^n - p'^n) / (p - p')$

$$F(n) = (p^n - p'^n) / \sqrt{5}$$

(*) Bewijs door volledige inductie van de eigenschap: $p^n = F(n).p + F(n-1)$. (1)

De eigenschap is waar voor $n = 2$: $p^2 = F(2).p + F(1)$ $p^2 = p + 1$ (klopt)

Stel dat (1) waar is voor n en bewijs dat de eigenschap nog geldt voor $n + 1$.

Er is dus te bewijzen dat $p^{n+1} = F(n+1).p + F(n)$

$$\begin{aligned} p^n.p &= [F(n) + F(n-1)].p + F(n) && \text{(definitie van de rij)} \\ [F(n).p + F(n-1)].p &= [F(n) + F(n-1)].p + F(n) && \text{(toepassing van (1))} \\ F(n).p.p &= F(n).p + F(n) && \text{(vereenvoudigen)} \\ p^2 &= p + 1 \quad \text{(dat klopt)} && \text{(vereenvoudigen)} \end{aligned}$$

2.9 De stelling van Lucas

Voor de elementen $F(n)$ van de rij van Fibonacci geldt dat:

$$\lim F(n+1)/F(n) = p \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Uit de formule van Binet volgt:

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{p^{n+1} - p'^{n+1}}{p^n - p'^n} = \frac{p \cdot p^n - p' \cdot p'^n}{p^n - p'^n}$$

$$= \frac{p \cdot p^n - p \cdot p'^n + p \cdot p'^n - p' \cdot p'^n}{p^n - p'^n}$$

$$= \frac{p \cdot (p^n - p'^n) + p'^n (p - p')}{p^n - p'^n}$$

$$= p + \frac{p'^n (p - p')}{p^n - p'^n}$$

(deel nu teller en noemer door p'^n)

$$= p + \frac{p - p'}{(p/p')^n - 1}$$

$$= p + \frac{\sqrt{5}}{(p/p')^n - 1}$$

($p/p' > 1$ en dus $(p/p')^n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$)

$$= p + 0 \quad (\text{als } n \rightarrow \infty)$$

François Edouard Anatole Lucas (1842 - 1891)

Na studies aan de Ecole Normale in Amiens werkte hij aan het Observatorium van Parijs. Tijdens de Frans-Pruisische Oorlog (1870-71) diende Lucas als officier bij de artillerie. Na de oorlog werkte hij als professor aan befaamde Lycées in Parijs.

Lucas is het best gekend om zijn werk over getallentheorie. Hij bestudeerde de algemene Fibonacci-rijen (o.a. de Lucas-rij) en ontwikkelde methodes om na te gaan of een getal een priemgetal is. In 1876 bewees hij dat $2^{127} - 1$ (Mersenne-getal) een priemgetal is. Dat is het grootste priemgetal dat ontdekt is zonder de hulp van computers.

Hij is de auteur van een vierdelig werk '*Récréations Mathématiques*' (1882-1894). De '*Toren van Hanoi*'-puzzel is zijn uitvinding.

Lucas stierf ten gevolge van een stom ongeval. Tijdens een banket liet een kelner een schotel vallen. Een opspringend stuk verwondde Lucas aan de kaak. Enkele dagen later stierf hij als gevolg van een ontsteking van zijn wonde.

Veralgemening van de stelling van Lucas

Proefondervindelijk hebben we gezien dat, voor een algemene rij van Fibonacci, de verhouding $F(n+1)/F(n)$ een limiet heeft, die we nu q zullen noemen (en waarvan we vermoeden dat hij gelijk is aan $\Phi = p$).

In de limiet is dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+2)}{F(n+1)} = q$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n) + F(n+1)}{F(n+1)} = q$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{F(n+1)} + 1$$

$$q = 1/q + 1$$

$$q^2 = q + 1$$

En dus is $q = p$ (de positieve wortel van dezelfde vierkantsvergelijking)

Stel vast dat de beginwaarden van de rij niet gebruikt werden in het bewijs. Met welke twee getallen we ook beginnen, de verhouding van twee opeenvolgende termen zal steeds $p = \Phi$ als limiet hebben.

Voor wie de formule van Lucas wil bewijzen, uitgaande van de formule van Binet, volgen hier een paar tips.

$$\text{Stel } A = (1 + \sqrt{5})/2 \text{ en } B = (1 - \sqrt{5})/2.$$

Het bewijs zal o.a. steunen op de eigenschappen:

$$A \cdot B = -1, \quad \frac{\left(\frac{1}{A} + A\right)}{\sqrt{5}} = 1, \quad \frac{\left(\frac{1}{B} + B\right)}{\sqrt{5}} = -1$$

Veel zoekgenot!

2.10 Formule van Binet en berekeningen met de TI83 (84)

```
(1+√(5))/2→A
1.618033989
(1-√(5))/2→B
-.6180339887
(A^49-B^49)/√(5)
7778742049
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
√Y1=(A^X-B^X)/√(
5)
√Y2=
√Y3=
√Y4=
√Y5=
√Y6=
```

X	Y1	
5	5	
12	144	
17	1597	
21	10946	
30	832040	
X=		

```
round(A^17/√(5),
0)
1597
round(A^30/√(5),
0)
832040
```

```
1
round(Ans*A,0) 1
round(Ans*A,0) 1
round(Ans*A,0) 1
round(Ans*A,0) 1
round(Ans*A,0) 1
round(Ans*A,0) 1
```

Omdat de absolute waarde van $\frac{\left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right]^n}{\sqrt{5}}$ kleiner is dan 0.5 voor $n > 0$, zal

de vorm $\frac{\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^n}{\sqrt{5}}$ de getallen van Fibonacci benaderen met een fout die

kleiner is dan 0.5.

$$\text{Vb. } \frac{\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^6}{\sqrt{5}} = 8.02.. \quad \frac{\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^7}{\sqrt{5}} = 12.98..$$

Door af te ronden op 1 (op 0 decimalen na) ontstaan de exacte getallen van Fibonacci. Het zijn immers natuurlijke getallen.

Het laatste schermje is een toepassing op: $F(n+1) \approx F(n) \times p$ (Stelling van Lucas)

2.11 Het aantal cijfers in $F(n)$

Met de formule van Binet of de stelling van Lucas kan men met de TI83 (84) exacte getallen uit de rij van Fibonacci vinden tot aan $F(49) = 7778742049$ (10 cijfers)

Voor $n = 50$ komt er $F(50) = 1.2586626903 \text{ E } 10$ dus een getal van 11 cijfers

Voor $n = 478$ komt er $F(478) = 3.520521795 \text{ E } 99$ dus een getal van 100 cijfers.

Voor $n = 479$ komt er OVERFLOW

$$F(479) \approx A^{479} / \sqrt{5} \quad \text{met} \quad A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\log F(479) = 479 \log A - \log \sqrt{5} = 99.75559468 \rightarrow \text{getal met 100 cijfers}$$

$$\log F(500) = 500 \log A - \log \sqrt{5} = 104.1443351 \rightarrow F(500) \text{ bevat 105 cijfers}$$

$$\log F(1000) = 1000 \log A - \log \sqrt{5} = 208.6381552 \rightarrow F(1000) \text{ bevat 209 cijfers.}$$

2.12 Berekening van F(n) met behulp van matrices

In de rij van Fibonacci gelden volgende gelijkheden:

$$U_n = U_n$$

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$$

We kunnen dit als matrixvergelijking schrijven:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ U_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{n-1} \\ U_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} U_{n-1} \\ U_{n-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{n-2} \\ U_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} U_{n-2} \\ U_{n-3} \end{bmatrix} \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
MATRIX[B] 2 x1
[ 1
[ 0 ]
```

```
MATRIX[A] 2 x2
[ 1 1
[ 1 0 ]
z, z=0
```

```
[A]^11*[B]
[ 144
[ 89 ]
```

```
[A]^49*[B]
[ 1.258626903e1...
[ 7778742049 ...
[A]^255*[B]
[ 1.416938177e5...
[ 8.757159534e5...
[A]^256*[B]
```

F(11) = 89 F(12) = 144 ; Ook hier kan men exacte getallen berekenen tot F(49). Vanaf n = 256 geeft het rekentoestel een foutmelding.

2.13 Wat hebben Fibonacci-buren gemeen?

Hebben de buren $F(9) = 34$ en $F(10) = 55$ een echte deler ($\neq 1$) gemeen?

Die vraag wordt moeilijker voor $F(35) = 9227465$ en $F(36) = 14930352$.

Die vraag wordt erg moeilijk voor $F(240)$ en $F(241)$, getallen met 50 en 51 cijfers. Computers zullen dat nog wel aankunnen, maar ooit moeten ook de krachtigste computers passen.

In de tabel hieronder staan de eerste 25 Fibonacci-getallen ontbonden in factoren. Controleer dat twee opeenvolgende nooit een factor gemeen hebben.

De eerste 25 Fibonacci getallen, ontbonden in factoren

```

1 : 1 =
2 : 1 =
3 : 2 priem
4 : 3 priem
5 : 5 priem
6 : 8 = 23
7 : 13 priem
8 : 21 = 3 x 7
9 : 34 = 2 x 17
10 : 55 = 5 x 11
11 : 89 priem
12 : 144 = 24 x 32
13 : 233 priem
14 : 377 = 13 x 29
15 : 610 = 2 x 5 x 61
16 : 987 = 3 x 7 x 47
17 : 1597 priem
18 : 2584 = 23 x 17 x 19
19 : 4181 = 37 x 113
20 : 6765 = 3 x 5 x 11 x 41
21 : 10946 = 2 x 13 x 421
22 : 17711 = 89 x 199
23 : 28657 priem
24 : 46368 = 25 x 32 x 7 x 23
25 : 75025 = 52 x 3001

```

Wat de krachtigste computers niet kunnen "bewijzen", kan wel door een heel eenvoudige redenering.

De rij kan voorgesteld worden door $1, 1, 2, \dots, b-a, a, b, a+b, \dots$

- Als a en b een gemene deler hebben dan is dit ook een deler van het volgend getal $a+b$ en van het vorig getal $b-a$.
- Als a en b geen gemene deler hebben dan hebben b en $a+b$ er ook geen. Immers als ze er wel een hadden dan zou dit ook een deler zijn van hun verschil en dat is precies a .

Vandaar: In een algemene Fibonacci-rij, die begint met twee getallen die onderling ondeelbaar zijn, zijn ook alle paren opeenvolgende getallen onderling ondeelbaar. Dit is het geval in de rij van Fibonacci (beginpaar 1,1) en in de rij van Lucas (beginpaar 2,1).

Anderzijds, als de twee begingetallen een gemene deler hebben dan zal die deler voorkomen in alle termen van de rij. Vb. 3, 9, 12, 21, 33, 54,...

Besluit: Fibonacci-buren hebben alleen gemeen
wat hun verste voorouders gemeen hebben!

* * * * *

Het volstaat wat op het internet te surfen om te beseffen dat de getallen van Fibonacci heel veel eigenschappen hebben. We vermelden er hier nog één.

Men kan bewijzen (met de formule van Binet) dat : $F(n.k) = F(k)$ -voud

Zo is $F(38) = 39088169 = 9349 \times 4181 = 9349 \times F(19)$

$F(18) = 2584 = 1292 \times F(3) = 323 \times F(6) = 76 \times F(9) = 2584 \times F(2)$

Daaruit volgt als i geen priemgetal is, ook $F(i)$ geen priemgetal is. Er is één uitzondering: $F(4) = 3$. Of nog: als $F(i)$ een priemgetal is, dan is i ook een priemgetal. Uitzondering $F(4)=3$.

Zo heeft het priemgetal 233 het priemgetal 13 als rangnummer.

Andere voorbeelden vind je in de tabel hierboven.

Het omgekeerde :

" Als i een priemgetal is, dan is $F(i)$ een priemgetal" IS NIET WAAR

Als je de tabel doorloopt, dan begint het nochtans veelbelovend.

Het loopt toch al mis bij 19. $F(19) = 4181 = 113 \times 37$.

Op de webpagina van Dr. Ron Knott (bijgewerkt tot oktober 2003) waarop voorliggende tekst gebaseerd is, staat o.a. te lezen dat voor het priemgetal $i = 37511$ het bijhorend getal $F(37511)$ uit 7839 cijfers bestaat en dat men nog niet weet of dit al of niet een priemgetal is!

Ga na dat de methode die we gezien hebben om het aantal cijfers van een $F(n)$ te berekenen, nog werkt voor $F(37511)$!

2.14 Fibonacci-getallen en Pythagorische driehoeken

Er bestaat een eenvoudige manier om Pythagorische driehoeken te genereren uitgaande van vier opeenvolgende getallen van een algemene Fibonacci-rij.

$$2, 5, 7, 12, \dots \qquad \dots, b-a, a, b, a+b, \dots$$

Eerste rechthoekszijde: het dubbel product van de twee binnenste getallen

$$70 \qquad 2ab$$

Tweede rechthoekszijde: het product van de buitenste twee getallen

$$24 \qquad b^2 - a^2$$

Schuine zijde: de som van de kwadraten van de binnenste twee getallen

$$74 \qquad a^2 + b^2$$

Inderdaad: $74^2 = 70^2 + 24^2 \qquad (a^2 + b^2)^2 = (2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2.$

De zijden 70, 24, 74 hebben 2 als gemene factor. Ook 35, 12, 37 zijn zijden van een Pythagorische driehoek.

* * * * *

Er bestaan heel wat formules i.v.m. de getallen van de rij van Fibonacci.

Eén daarvan is een formule van Lucas: (te bewijzen met de formule van Binet)

$$F(n)^2 + F(n+1)^2 = F(2n+1)$$

We kunnen die formule meetkundig interpreteren. Ieder Fibonacci-getal met oneven rangnummer (uitzondering $F(1) = 1$) kan gezien worden als de lengte van de schuine zijde van een Pythagorische driehoek. Het volstaat bovenstaande techniek toe te passen.

Neem vier opeenvolgende Fibonacci-getallen: $F(n-1), F(n), F(n+1), F(n+2)$

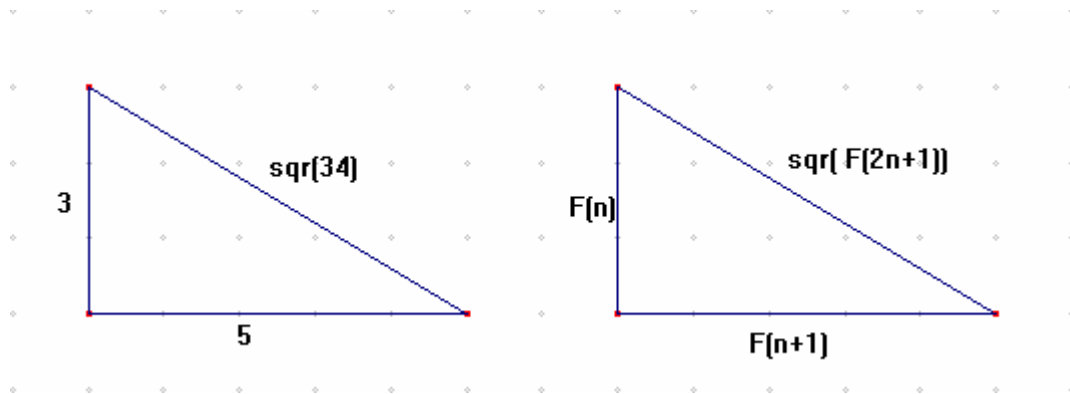
Rechthoekszijden: $2 F(n) F(n+1)$ en $F(n-1) F(n+2)$

Schuine zijde: $F(n)^2 + F(n+1)^2 =$ Lucas-formule $= F(2n+1).$

Voorbeeld: $F(11) = 89 \qquad 2n+1 = 11$ en dus $n = 5$

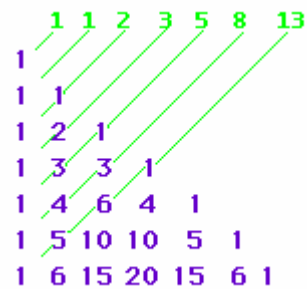
Zijden van de driehoek:	$2 F(5) F(6)$	$F(4) F(7)$	$F(11)$
	2.5.8	3.13	89
	80	39	89

Een andere interpretatie van de formule van Lucas is deze: als men twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci neemt als lengten van de rechthoekszijden, dan is de lengte van de schuine zijde gelijk aan de vierkantswortel uit een Fibonacci getal.



2.15 Getallen van Fibonacci in de driehoek van Pascal

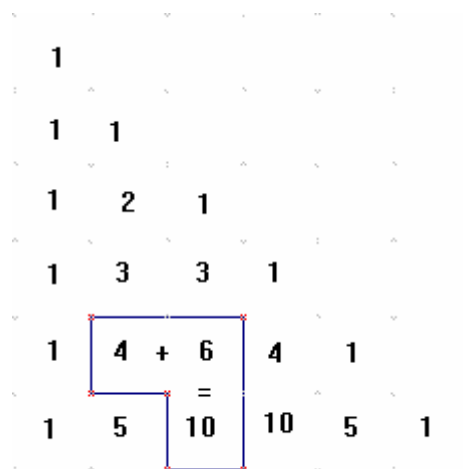
Als je de som maakt van de "diagonalen" in de driehoek van Pascal dan ontstaan de getallen van Fibonacci.



De verklaring hiervoor is dat de som van de elementen op een diagonaal gelijk is aan de som van de elementen op de twee vorige diagonalen.

Zo is de som van de elementen op de vierde diagonaal gelijk aan 3, op de vijfde diagonaal gelijk aan 5 en op de zesde diagonaal gelijk aan 8.

Die eigenschap is het gevolg van de manier waarop de driehoek van Pascal is opgebouwd. Een getal uit de driehoek van Pascal is gelijk aan de som van twee getallen uit de rij erboven: het getal erboven en het getal links daarvan.



EEN GEDICHT VAN MARJOLEIN KOOL

REEKS VAN FIBONACCI

'k Dacht u even voor te stellen
aan Bonacci's slimste zoon,
die beslist tot tien kon tellen,
maar dat vond hij te gewoon.

Daarom telde hij een tijdje
0-1-1-2-3-5-8
Heeft die knul ze op een rijtje?
werd door menigeen gedacht.

Tot ze merkten hoe hij telde:
elke term bleek steeds de som
van de twee daarvoor gestelde.
Nee, die zoon was lang niet dom.

Hoe verkrijgt u die getallen?
Neem een lief konijnenpaar,
laat dat eens per maand bevallen,
van een tweeling weliswaar.

Die dan vrolijk en gedreven,
na een kleine week of acht,
op hun beurt het leven geven
aan een dubbel nageslacht.

En terwijl u dit laat fokken,
telt u paartjes. U staat paf!
Of u mompelt licht geschrokken:
't Is bij de konijnen af.'