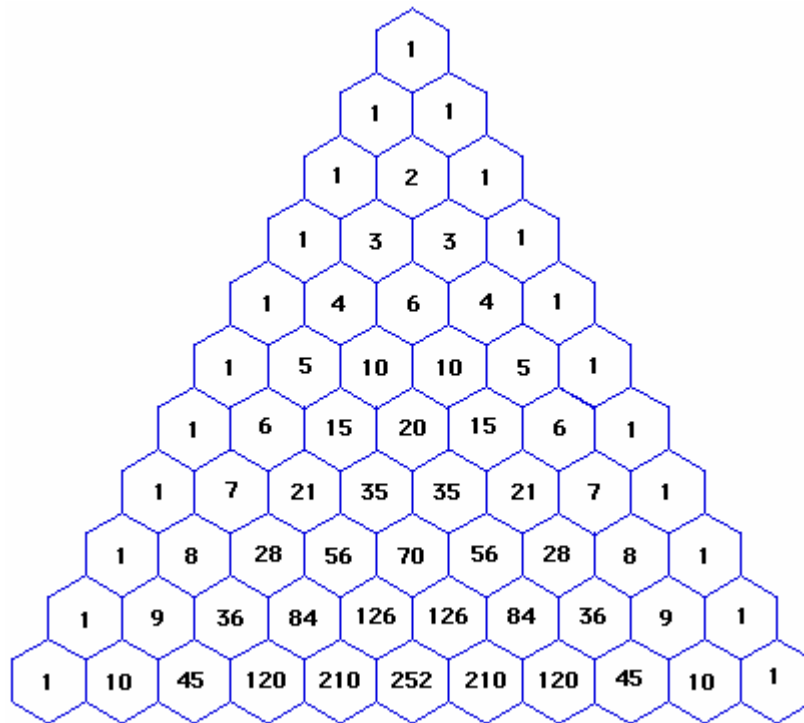


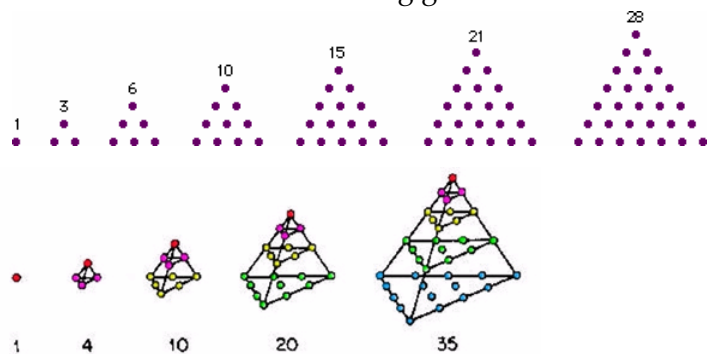
Exploraties in de driehoek van Pascal

Bekende getallen in de driehoek van Pascal



Zoek in de bovenstaande driehoek van Pascal welke cel-combinaties aanleiding geven tot:

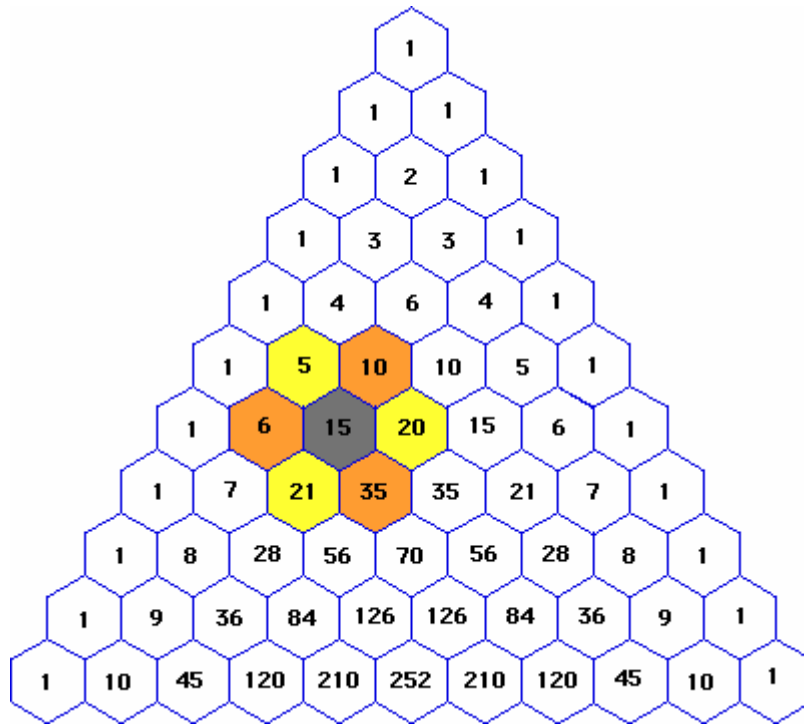
- de natuurlijke getallen
- driehoeksgetallen (1, 3, 6, 10, ...) →
- viervlaksgetallen (1, 4, 10, 20, ...) →
- machten van 11
- machten van 2
- Fibonacci-getallen (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ met $n = 3, 4, \dots$ en $F_1 = 1$ en $F_2 = 1$)



Bewijs je beweringen (*)

* Een exact bewijs voor de Fibonacci-getallen is niet gemakkelijk en is dus geen basisdoelstelling.

'Pascal-bloempjes'



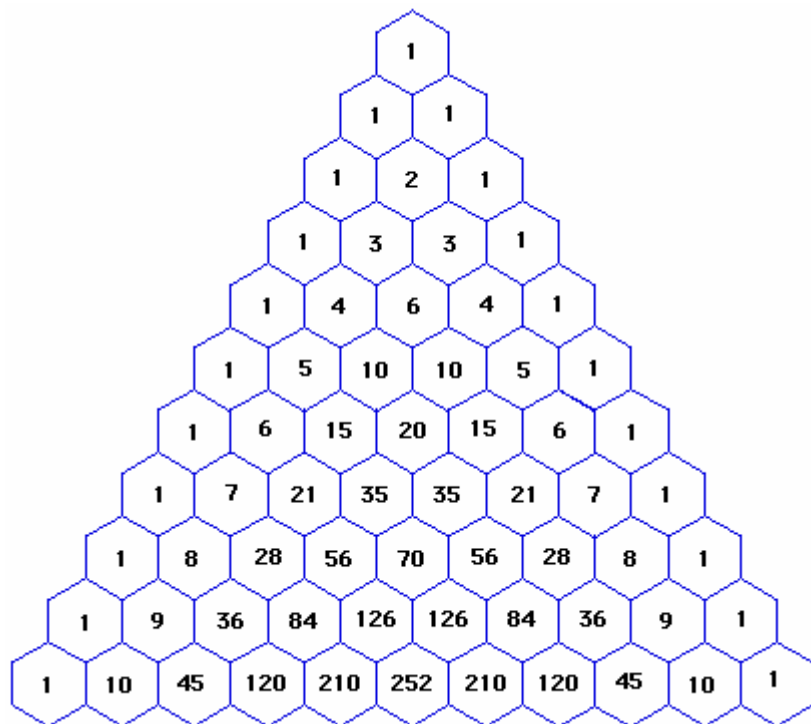
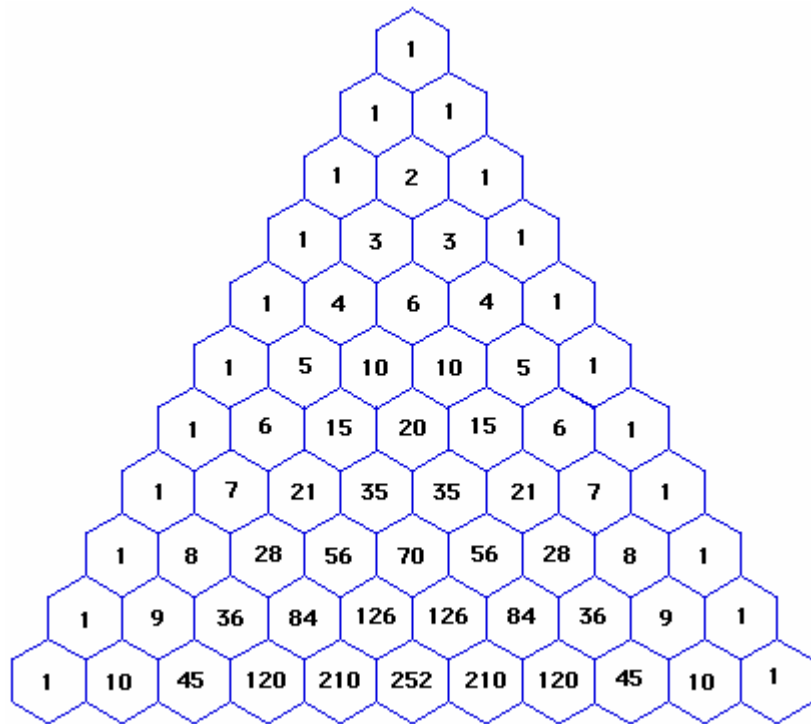
In de bovenstaande driehoek van Pascal zie je een 'Pascal-bloempje', gevormd door de grijze cel met waarde 15, omringd door 6 blaadjes, die alternerend oranje en geel gekleurd zijn.

Bereken het product van de waarden in de gele blaadjes en dat van de waarden in de oranje blaadjes. Wat stel je vast?

Doet deze wetmatigheid zich ook voor bij andere Pascal-bloempjes? Bij sommige of vermoedelijk bij alle? Formulier hierover een hypothese.

Bewijs je hypothese.

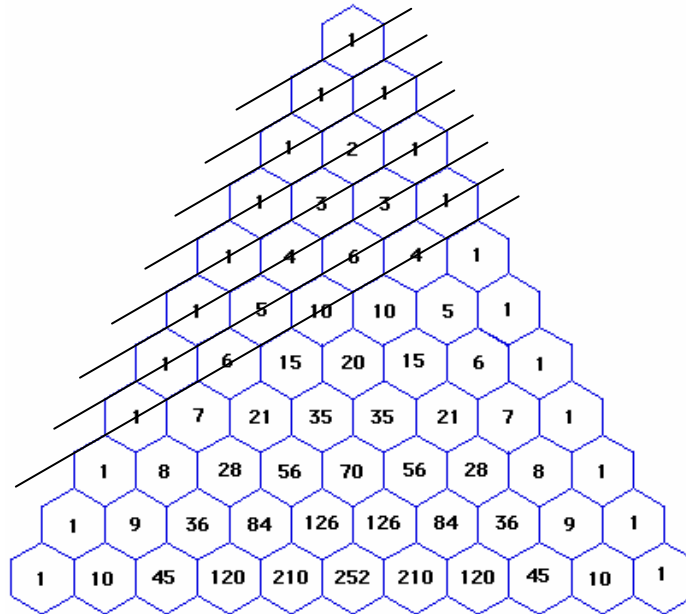
Exploraties in de driehoek van Pascal – slides



Exploraties in de driehoek van Pascal - Fibonacci

Het bewijs i.v.m. de Fibonacci-getallen kan een mooie aanleiding vormen om het met de leerlingen te hebben over het onderscheid tussen “bewijzen dat iets waar is” en “verklaren waarom iets waar is”.

Indien diagonale worden getrokken van linksonder naar rechtsboven, onder een hoek van 30° , dan is de som van de cellen een Fibonacci-getal.



Dit kan m.b.v. binomiaalcoëfficiënten geschreven worden als:

$$F_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i}$$

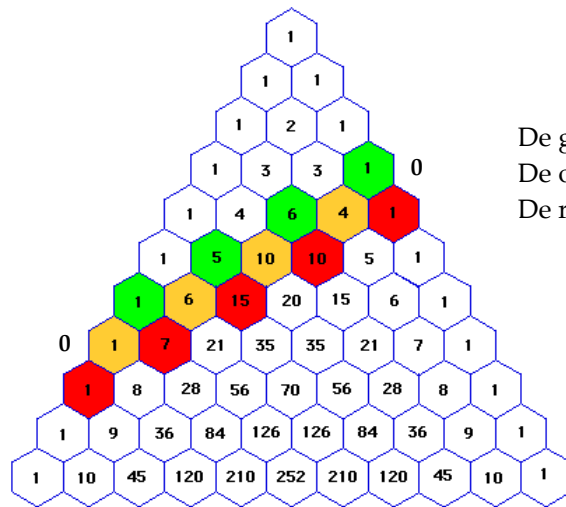
met $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ het geheel deel van $\frac{n}{2}$. Een alternatieve schrijfwijze is:

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1-i}{i} \text{ met } \binom{n}{k} = 0 \text{ als } k > n$$

Vervolgens kan nagegaan worden dat deze formules in overeenstemming zijn met de recursieve definitie van de Fibonacci-getallen, waarmee dan bewezen is dat de formule klopt.

Een terechte vraag die dan nog overblijft is: “Maar hoe vindt iemand zo iets?”. Dit is eigenlijk niets anders dan de waarom-vraag.

In [1] wordt die vraag mooi beantwoord. Beschouw drie opeenvolgende ‘Fibonacci-diagonalen’, zoals in de afbeelding hieronder.



De groene cellen hebben als som $1 + 5 + 6 + 1 = 13$.
De oranje cellen: $1 + 6 + 10 + 4 = 21$.
De rode cellen: $1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$.

Wegens de stelling van Pascal-Stifel weten we dat elke rode cel de som is van een groene en een oranje cel. Elke oranje en groene cel wordt daarbij precies 1 keer ‘gebruikt’ (schrijf een 0 op de plaatsen waar geen cel voorkomt.).

De ‘som van alle rode cellen’ is dus niets anders dan de som van ‘de som van de groene cellen’ met ‘de som van de oranje cellen’. Of, in beelden uitgedrukt: de rode diagonaal is de groene diagonaal plus de oranje diagonaal.

De sommen van de cellen op zo’n diagonaal voldoen dus aan de recursieve definitie van de Fibonacci-getallen; aangezien de eerste twee diagonalen bovendien overeenkomen met $F_1 = 1$ en $F_2 = 1$, zijn de sommen van de cellen op zo’n diagonaal altijd Fibonacci-getallen.

Nu is eindelijk duidelijk *waarom* deze eigenschap klopt. Daarmee is de verwondering over die eigenschap ook verdwenen: de innerlijke noodzaak ervan is blootgelegd. De eigenschap is ‘logisch’ geworden. Wanneer enkel wordt bewezen *dat* een eigenschap geldt, blijft de verwondering vaak intact en vinden velen het nog altijd ‘niet logisch’ dat het zo is.

De redenering hierboven geeft ook meteen aan hoe een exact bewijs kan verlopen: van twee diagonalen worden alle cellen opgeteld, waarbij de waarden twee aan twee moeten worden gegroepeerd en ‘onderworpen’ aan de stelling van Pascal-Stifel. Het zal misschien nuttig zijn om twee binomiaalcoëfficiënten met waarde 0 toe te voegen.

Referenties

- [1] <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html>
- [2] *Learning Mathematics: a New Look at Generalisation and Abstraction*, Paul White & Michael Mitchelmore, <http://www.aare.edu.au/99pap/whi99309.htm>