

PARADOXEN 2

Dr. Luc Gheysens

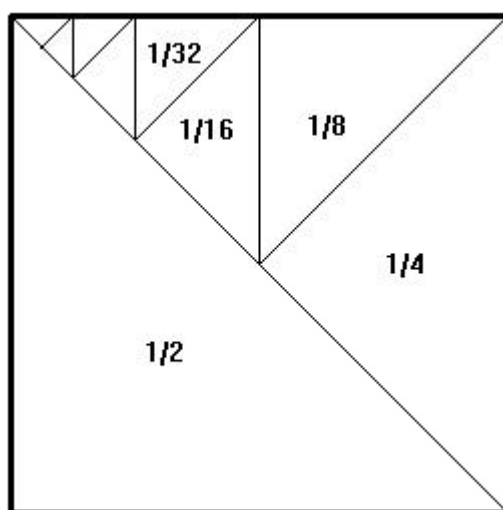
SPELEN MET ONEINDIG

Historische nota

De Griekse filosoof Zeno (ca. 490-430 v. Chr.) bedacht een aantal paradoxen om aan te tonen dat beweging eigenlijk een illusie is. De meest bekende is ongetwijfeld de paradox van Achilles en de schildpad.

“Achilles houdt een loopwedstrijd tegen een schildpad. Bij de start heeft de schildpad 100 meter voorsprong en we nemen aan dat Achilles slechts 20 keer sneller loopt dan de schildpad. Als Achilles dus het startpunt van de schildpad bereikt, heeft deze zelf weer 5 meter afgelegd. Achilles legt nu deze 5 meter af, maar in die tijd heeft de schildpad weer $5/20 = 0,25$ meter afgelegd. Achilles legt zo achtereenvolgens 100, 5, $5/20$, $5/400$, ... meter af en aan deze rij komt nooit een einde, m.a.w. Achilles slaagt er nooit in de schildpad in te halen.”

De Griekse wiskunde, die gebaseerd was op meetkundig redeneren, had wellicht ontdekt dat de som $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ steeds dichterbij het getal 1 benadert. Je kunt dit gemakkelijk inzien via de onderstaande figuur, waarbij een vierkant van 1 op 1 in oneindig veel driehoekjes wordt verdeeld.



Maar de tijdgenoten van Zeno slaagden er blijkbaar niet in zijn redenering te ontkrachten. Het duurde tot het einde van de negentiende eeuw vooraleer wiskundigen zoals Georg Cantor, David Hilbert en Bertrand Russell vat kregen op het begrip oneindig. Ze konden dan ook duidelijk omschrijven wanneer een ‘oneindige som’ naar een welbepaald getal convergeert.

Men slaagde er immers in te bewijzen dat de som $100 + 5 + \frac{5}{20} + \frac{5}{400} + \dots$, die een oneindig

aantal termen bevat, convergeert naar $\frac{100}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{2000}{19} = 105,26\dots$. Dit betekent dat Achilles de

schildpad inhaalt na iets meer dan 105 meter.

Wiskundigen hebben ondertussen nog andere methoden bedacht om deze paradox te bewijzen, bijvoorbeeld door het oplossen van een eenvoudige vergelijking. Als we aannemen dat de schildpad een snelheid van v meter per minuut haalt, dan heeft Achilles een snelheid van $20v$ meter per minuut. Na t minuten heeft Achilles een afstand

$$s = 20vt \quad (1)$$

afgelegd en de schildpad een afstand

$$s = 100 + vt.$$

Stel deze twee afstanden aan elkaar gelijk: $20vt = 100 + vt$. Hieruit volgt dat $vt = \frac{100}{19}$. Door deze waarde in te vullen in (1) vindt men dat Achilles de schildpad inhaalt na $20 \cdot \frac{100}{19} = \frac{2000}{19} = 105,26\dots$ meter.

Het ‘spelen met oneindig’ levert heel wat leuke resultaten op, zoals o.a. blijkt uit de onderstaande verhaaltjes over de aap Pandi en over het Hilberthotel.

De apenvoeder

Een voeder van apen beschikt over een oneindige voorraad apennootjes en voedert hiermee de aap Pandi. Hij gooit voortdurend twee nootjes naar de aap, die er meteen telkens één teruggooit. Hoeveel nootjes heeft de voeder op het einde over?

We nummeren de nootjes. De eerste keer gooit de voeder de noten 1 en 2. Pandi eet noot 2 op en gooit noot 1 terug. De tweede keer gooit de voeder de noten 1 en 3. Pandi eet nu noot 3 op en gooit 1 terug. Vervolgens werpt de voeder 1 en 4 en krijgt hij opnieuw 1 terug. Hieruit blijkt dat op de lange duur de aap alle nootjes heeft opgegeten en dat de voeder enkel noot 1 overhoudt.

Maar de voeder kan de nootjes ook anders nummeren. Hij gooit eerst de noten 1 en 2 en krijgt 1 terug. We nemen aan dat Pandi zo geboeid is door het werpen van de nootjes dat hij niet direct een nootje opeet. Dan gooit de voeder de noten 3 en 4 en krijgt 2 terug, enzovoort. Pandi vindt plezier in het telkens teruggooien en eet geen enkel nootje op. Zo ontvangt hij noot nr. 27 bij de 27ste worp. Op de lange duur krijgt de voeder dus alle noten terug.

Er is ook nog een derde zienswijze. De voeder gooit eerst de noten 1 en 2 en krijgt 1 terug. Hij gooit dan 3 en 4 en krijgt 3 terug. Hij gooit 5 en 6 en krijgt 5 terug. Op de lange duur hebben ze dus beiden evenveel noten en kan Pandi naar hartenlust genieten van een uitgebreide maaltijd!

Het Hilberthotel

Het Hilberthotel is een denkbeeldig hotel met oneindig veel kamers die allemaal bezet zijn.

Op een dag komt een nieuwe gast bij de receptie aan en vraagt of er nog een plaatsje vrij is. De hotelmanager ziet hierin geen probleem. Hij verplaatst de persoon uit kamer 1 naar kamer 2, de persoon uit kamer 2 naar kamer 3, enzovoort. Op die manier komt kamer 1 vrij voor de nieuwe gast.

Een paar dagen later komen oneindig veel gasten bij de receptie van het Hilberthotel aan op zoek naar een kamer. De manager lost ook nu weer het probleem eenvoudig op. Hij plaatst de persoon uit kamer 1 in kamer 2. De persoon die oorspronkelijk kamer 2 betrof, verhuist naar kamer 4. De persoon uit kamer 3 gaat naar kamer 6, enzovoort. Op die manier komen alle kamers met een oneven nummer vrij en zo krijgen alle nieuwe gasten weer een plaatsje.

Nog enkele dagen later arriveren oneindig veel bussen met oneindig veel nieuwe gasten. Opnieuw vindt de manager een pasklare wiskundige oplossing. Nu maakt hij alle kamers met een oneven nummer vrij, zoals hierboven werd beschreven. Alle gasten uit bus 1 wijst hij naar de kamers waarvan het nummer een macht van 3 is: 3, 9, 27 De gasten uit de tweede bus plaatst hij in de kamers waarvan het nummer een macht van 5 is: 5, 25, 125 De gasten uit de derde bus komen terecht in een kamer waarvan het nummer een 7-voud is: 7, 49, 343 De personen uit bus nr. n vinden die manier een onderkomen in de kamers waarvan het nummer een macht is van het (n+1)-de priemgetal. Omdat er oneindig veel priemgetallen zijn, die men elk tot een oneindig aantal machten kan verheffen, is meteen ook dit probleem opgelost!

$0 = 1 = \frac{1}{2}$

Stel $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ (een oneindige som).

Dan is $S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$.

Ook is $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - [(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots] = 1 - 0 = 1$.

We kunnen uit $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$ eveneens besluiten dat $S = 1 - S$, waaruit dan weer volgt dat $S = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} = ? = \frac{1}{4}$

Je kunt nagaan dat de volgende drie uitdrukkingen correct zijn door de haakjes distributief uit te werken:

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots) \\ 1 &= (1 + x + x^2)(1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \dots) \\ 1 &= (1 + x + x^2 + x^3)(1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \dots) \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \dots$$

en

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \dots$$

Stel nu in elk van deze uitdrukkingen $x = 1$. Omdat telkens het rechterlid dezelfde waarde oplevert, zijn ook de drie linkerleden aan elkaar gelijk en dus is $\frac{1}{2} = ? = \frac{1}{4}$.

$1 = \frac{1}{2}$

We berekenen de oneindige som $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots$

Merk op dat $\frac{1}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3.5} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}$, $\frac{1}{5.7} = \frac{3}{5} - \frac{4}{7}$...,

zodat

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \dots$$

De tweede en de derde term uit deze som zijn tegengestelde getallen. Dit geldt ook voor de vierde en de vijfde term, voor de zesde en de zevende term, enzovoort. Hieruit volgt dat $S = 1$.

Anderzijds geldt dat $\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$, $\frac{1}{5.7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$...,

zodat

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Hierbij vormen binnen de haakjes telkens twee opeenvolgende termen weer een som die gelijk is aan nul zodat $S = \frac{1}{2}$.

$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$

- Stel $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$, dan is $2S = 2(1 + 2 + 4 + 8 + \dots) = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ en dit is gelijk aan $S - 1$.

Uit $2S = S - 1$ mag men dan besluiten dat $S = -1$.

- We kunnen dit nog op een andere manier bewijzen.
Controleer de onderstaande gelijkheid door de haakjes distributief uit te werken:
 $1 = (1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots)$.
Het volstaat nu hierin x gelijk te stellen aan 1 en tenslotte beide leden met -1 te vermenigvuldigen.

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + \dots = -1$$

We tonen aan dat de som van alle getallen uit de rij van Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) gelijk is aan -1.

Controleer de onderstaande gelijkheid door de haakjes distributief uit te werken:

$$1 = (1 - x - x^2) (1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots).$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots$$

Stel nu hierin $x = 1$ en dan blijkt dat $-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + \dots$.

$$\ln 2 = 0$$

▪ Bewijs 1.

De reeksontwikkeling van MacLaurin voor de functie $y = \ln(1+x)$ is geldig voor alle reële x -waarden in het interval $]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Bijgevolg is voor $x = 1$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (1)$$

$$\text{en} \quad \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \quad (2)$$

Door de uitdrukkingen (1) en (2) lid aan lid bij elkaar op te tellen en de termen op een andere manier te rangschikken en samen te nemen, volgt hieruit dat

$$\frac{3}{2} \ln 2 = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \ln 2$$

Uit $\frac{3}{2} \ln 2 = \ln 2$ volgt dan dat $\ln 2 = 0$.

▪ Bewijs 2.

$$\begin{aligned}
 \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (\text{zie (1)}) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

▪ Bewijs 3.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (\text{zie (1)})$$

Dan is

$$\begin{aligned}
 2 \ln 2 &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \dots \\
 &= (2 - 1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \dots \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\ln 2 = 0$.

▪ Bewijs 4.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (\text{zie (1)})$$

Hierin groeperen we telkens een aantal negatieve termen op een gepaste manier en maken gebruik van het feit dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$ om aan te tonen dat er telkens een negatieve som ontstaat die een positieve term uit de reeks voor $\ln 2$ compenseert:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots = -1 \quad \text{en deze som compenseert 1 in de reeks voor } \ln 2$$

$$-\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \dots = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = -\frac{1}{3} \quad \text{en deze term compenseert } \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{10} - \frac{1}{20} - \frac{1}{40} - \dots = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = -\frac{1}{5} \quad \text{en deze term compenseert } \frac{1}{5}$$

Zo blijken alle positieve termen uit de reeks voor $\ln 2$ weg te vallen zodat $\ln 2 = 0$.

Meer is minder en minder is even veel

- Iemand heeft G euro's op zijn spaarboekje staan met $G = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$. In een vrijgeveige bui verdubbelt de bank elk van deze bedragen zodat nu de som G' op het spaarboekje staat met $G' = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$. Eigenaardig genoeg blijkt er nu één euro minder op het spaarboekje te staan!
- Stel $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$ en vervang hierin alle breuken met een oneven noemer door een kleinere breuk om op die manier een kleinere som S' te bekomen:

$$S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

Neem nu hierin de termen twee aan twee samen, dan blijkt dat

$$S' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

en dit blijkt precies weer de som S op te leveren!

2 = 4

Beschouw de volgende vergelijking, waarin oneindig veel exponenten x voorkomen bij het grondtal x:

$$x^{\left(x^{x^{x^{\dots}}}\right)} = 2.$$

Dan is de uitdrukking in de cirkel zelf weer gelijk aan x, zodat we hier feitelijk de vergelijking $x^2 = 2$ moeten oplossen. Dit betekent dat $x = \sqrt{2}$ een oplossing is en dat

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = 2.$$

Beschouw anderzijds de vergelijking

$$x^{\overset{\circ}{x^{x^{\dots}}}} = 4,$$

dan is de uitdrukking in de cirkel zelf gelijk aan 4, zodat we hier de vergelijking $x^4 = 4$ moeten oplossen. Deze vergelijking heeft ook $x = \sqrt{2}$ als oplossing, zodat

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = 4.$$

Hiermee hebben we meteen aangetoond dat $2 = 4$.

Om in te zien wat hierbij verkeerd loopt, volstaat het even na te denken over de oplossingen van de vergelijking $\sqrt{2}^x = x$ en dus van de vergelijking $x^{\frac{1}{x}} = \sqrt{2} \dots$