

PARADOXEN 9

Dr. Luc Gheysens

LIMIETEN, AFGELEIDEN EN INTEGRALen: ENKELE MERKWAARDIGE VERHALEN ...

Inleiding: verhalen over infinitesimalen

Een infinitesimaal (of infinitesimaal kleine waarde) is een object dat min of meer fungeert als getal en dat in de ordening van de reële getallen kleiner is dan ieder positief reëel getal, maar toch groter is dan nul. Men gebruikt hiervoor de volgende notatie: $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$, waarbij

met $\Delta x \rightarrow 0$ bedoeld wordt dat Δx oneindig dicht naar nul nadert, maar in feite toch niet gelijk is aan nul.

Het rekenen met infinitesimalen volgens welbepaalde regels zou de basis vormen van de hedendaagse wiskunde via de theorie van afgeleiden en integralen. Dit was de grote verdienste van Isaac Newton (1642 – 1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Ze ontwikkelden hiermee de differentiaal- en integraalrekening, die daarom ook wel de infinitesimaalrekening wordt genoemd. Het oorspronkelijke idee van infinitesimalen vinden we reeds terug in het werk van Archimedes (287 - 212 v.Chr.)

Een merkwaardig resultaat uit de differentiaal- en integraalrekening is het volgende:

voor een cirkel met straal r geldt:

de oppervlakte $S = \pi r^2$ en de omtrek $P = 2\pi r$

en $\frac{dS}{dr} = P$ d.w.z. $(\pi r^2)' = 2\pi r$;

voor een bol met straal r geldt:

het volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ en de oppervlakte $S = 4\pi r^2$

en $\frac{dV}{dr} = S$ m.a.w. $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$.

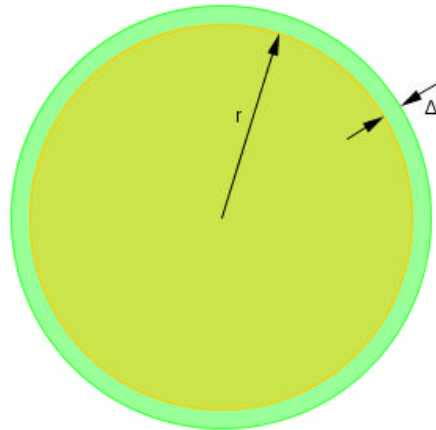
We tonen het resultaat aan voor een cirkel. Voor een bol kan men op een analoge manier te werk gaan.

- We nemen aan dat de formule voor de oppervlakte van een cirkel gekend is : $S = \pi r^2$. We tonen aan dat de formule voor de omtrek hieruit kan worden ‘afgeleid’.

Beschouw een cirkel met straal r en een tweede cirkel met hetzelfde middelpunt, maar met een iets grotere straal: $r + \Delta r$. De oppervlakte van de smalle ring tussen beide cirkels is dan gelijk aan $\Delta S = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2$.

Knippen we deze ring door, loodrecht op de rand en naar het middelpunt toe, dan krijgen we bij benadering een rechthoek waarvan de lengte gelijk is aan de cirkelomtrek P en waarvan de breedte Δr is. De oppervlakte van deze rechthoek is dus gelijk aan $P \cdot \Delta r$.

Hieruit volgt dat $P \cdot \Delta r \approx \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2$.



We vinden hieruit een benadering voor P :

$$P \approx \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r}$$

Naarmate Δr kleiner wordt, zal de benadering voor P steeds nauwkeuriger worden en 'in limiet' zelfs perfect, m.a.w.

$$P = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\pi(\Delta r)^2 + 2\pi r \Delta r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} (\pi \Delta r + 2\pi r) = 2\pi r.$$

Merk op dat

$$P = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta r} = \frac{dS}{dr}$$

en dit is precies de afgeleide $S'(r)$. De formule voor de omtrek van een cirkel bekomen we door de formule voor de oppervlakte af te leiden naar r.

- Als we vertrekken van $\frac{dS}{dr} = 2\pi r$, dan hebben we hier in feite een differentiaalvergelijking

$$dS = 2\pi r \cdot dr$$

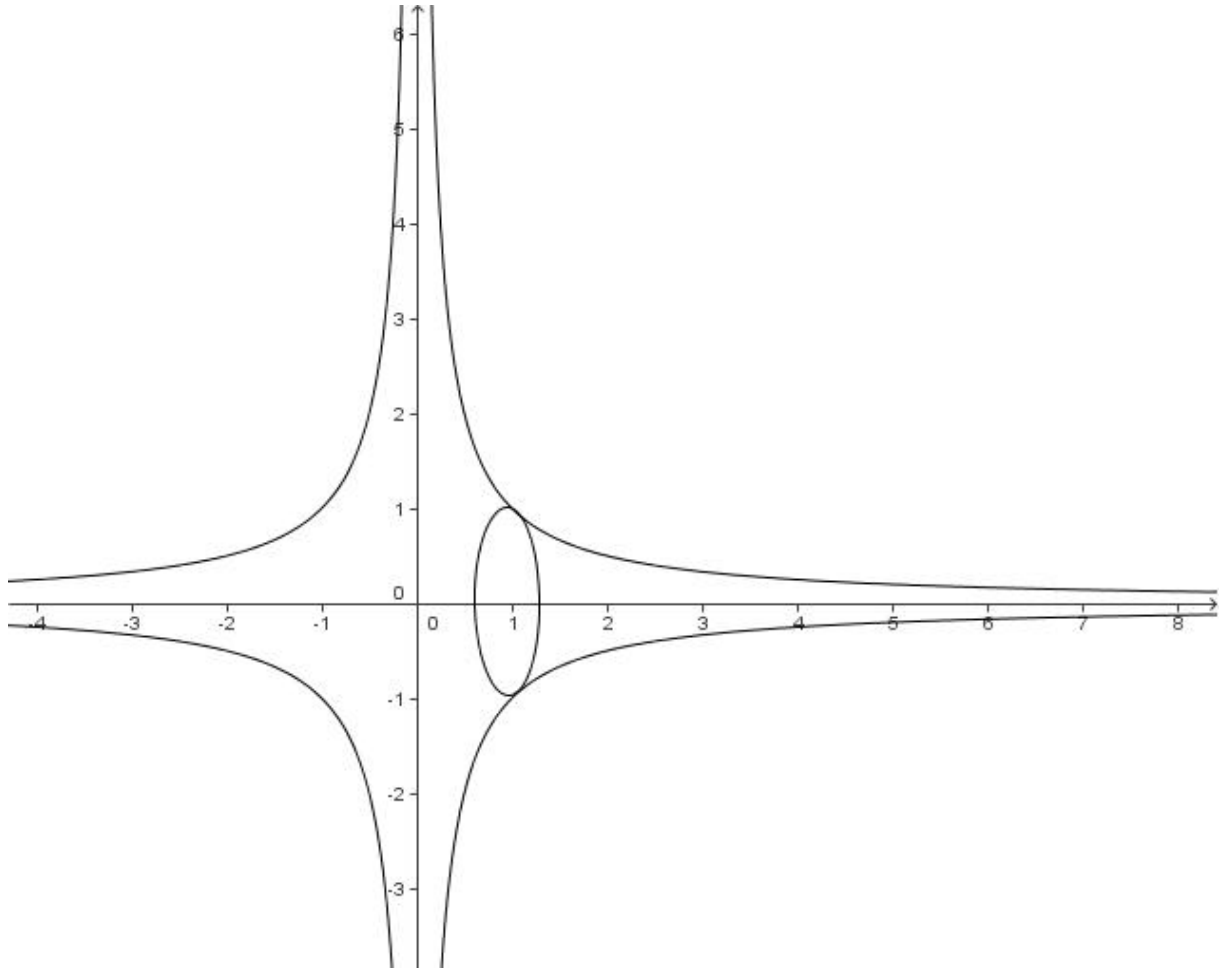
met de beginvoorwaarde $S(0) = 0$ (omdat de oppervlakte van een cirkel met straal 0 gelijk is aan 0).

Dan is $\int dS = 2\pi \int r \, dr$ zodat $S = \pi r^2 + c$. Wegens de beginvoorwaarde is $c = 0$.

De formule voor de oppervlakte van een cirkel bekomen we door de formule voor de omtrek te integreren naar r.

De trompet van Torricelli (of: de hoorn van Gabriël)

De trompet van Torricelli (1608-1647) is een omwentelingslichaam met een eindige inhoud, maar met een oneindige oppervlakte. Kan een schilder die trompet ooit helemaal geverfd krijgen? Wanneer hij ze ‘vol’ giet, komt hij blijkbaar toe met een eindig aantal liter verf, maar om ze te schilderen heeft hij een oneindig aantal liter verf nodig.



Laat de functie $y = f(x) = \frac{1}{x}$ wentelen rond de x-as in het interval $[1, +\infty[$. De inhoud van de ontstane trompet is dan gelijk aan

$$I = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \pi \cdot \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t} + 1 \right) = \pi(0 + 1) = \pi.$$

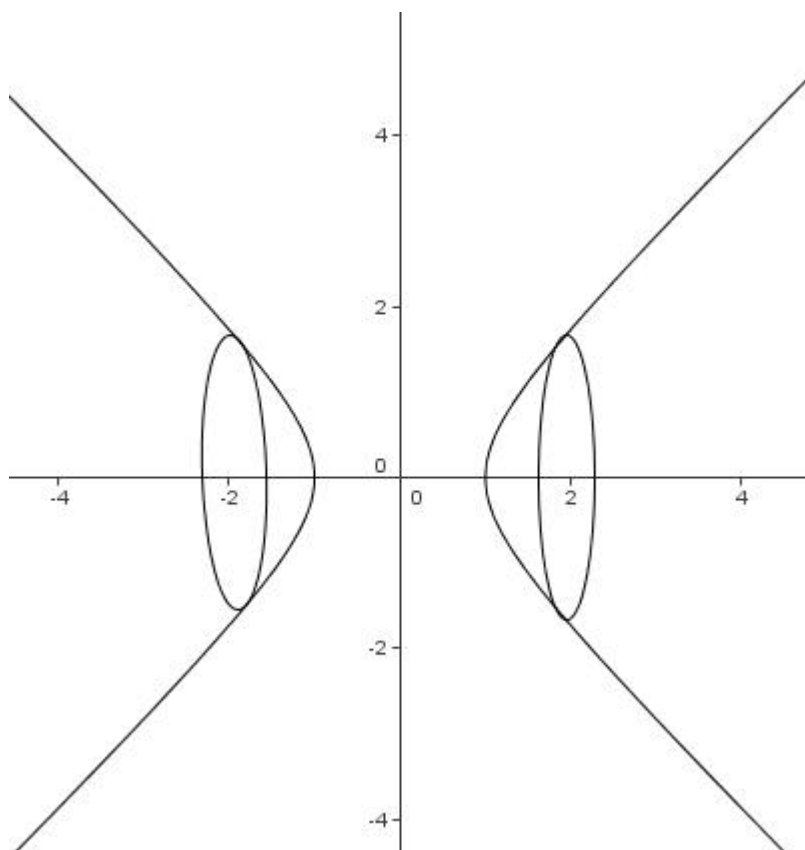
De inhoud van de trompet is dus eindig.

Om de manteloppervlakte van de trompet te berekenen, kunnen we die verdelen in ringen met straal $r = f(x) = \frac{1}{x}$ en breedte dx . De oppervlakte S is dan gelijk aan

$$S = \int_1^{+\infty} 2\pi r dx = \int_1^{+\infty} 2\pi \frac{1}{x} dx = 2\pi [\ln x]_1^{+\infty} = 2\pi(+\infty - 0) = +\infty,$$

m.a.w. de manteloppervlakte S is oneindig groot.

Paradoxaal schelpen



Laat de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$ wentelen om de x -as en bereken de inhoud van de 'schelp' aan de rechterkant in het interval $[1, 2]$:

$$I_1 = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \pi \left[\left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] = \frac{4\pi}{3}.$$

Met behulp van een bepaalde integraal berekenen we nu de inhoud van twee even grote 'schelpen' door de inhoud van het omwentelingslichaam te berekenen in het interval

[-2,2]. Op die manier tellen we in feite bij I_1 de inhoud op van de ‘schelp’ die symmetrisch ligt t.o.v. de y-as.

$$I_2 = \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^2 = \pi \left[\left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) \right] = \pi \left[\frac{16}{3} - 4 \right] = \frac{4\pi}{3}.$$

De dubbele schelp heeft dus een even grote inhoud als elk van beide schelpen afzonderlijk.

Een paradoxale limietberekening

Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

Eerste methode.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Tweede methode.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2 \cos x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \cos x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2 \cos x} = \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Derde methode.

Hierbij maken we gebruik van de regel van de l'Hôpital (H) (naar de Franse wiskundige Guillaume de l'Hôpital – 1661-1704)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\cos^3 x} \cdot \sin x}{6x} = \frac{2}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^3 x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$2 = 1$$

$$kx = x + x + x + \dots + x \text{ (een som van } k \text{ termen } x)$$

Analoog is dan

$$xx = x + x + x + \dots + x \text{ (een som van } x \text{ termen } x)$$

en dus

$$x^2 = x + x + x + \dots + x \text{ (een som van } x \text{ termen } x).$$

We leiden nu beide leden af naar x :

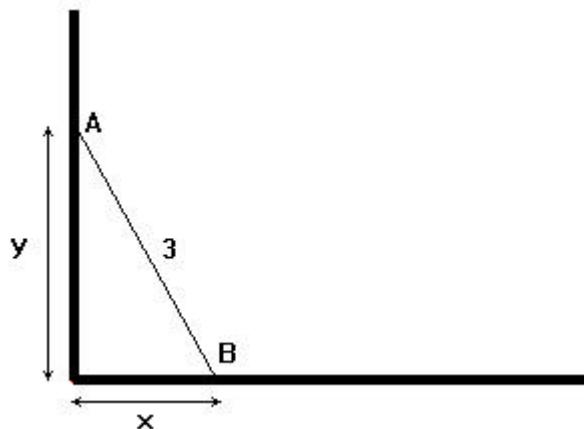
$$2x = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (een som van } x \text{ keer } 1)$$

m.a.w.

$$2x = x.$$

In het bijzonder geldt dan voor $x = 1$ dat $2 = 1$.

Een oneindige snelheid?



Een ladder met een lengte van 3 meter staat op een horizontale bodem en steunt tegen een verticale muur. Op een ogenblik t ligt het steunpunt A op de muur op een hoogte y en de afstand van het steunpunt B van de ladder op de grond ligt op een afstand x van de muur verwijderd.

We berekenen de snelheid waarmee het punt A naar beneden beweegt, wanneer de ladder gaat schuiven zodat het punt B met een snelheid v naar rechts beweegt over de grond.

Wegens de stelling van Pythagoras is $y = \sqrt{9 - x^2}$. We leiden beide leden af naar t :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Hierbij is $\frac{dx}{dt} = v$ = de snelheid waarmee het punt B naar rechts verschuift, zodat

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x v}{\sqrt{9-x^2}}.$$

In deze uitdrukking stelt $\frac{dy}{dt}$ de snelheid voor waarmee het punt A naar beneden beweegt.

Wanneer x nadert tot 3, d.w.z. wanneer het punt A de grond nadert, wordt

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{xv}{\sqrt{9-x^2}} = -\infty,$$

m.a.w. de top van de ladder zal oneindig snel omlaag bewegen.

$0 = 1$

We berekenen de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{x} dx$ met behulp van partiële integratie.

Stel $u = \frac{1}{x}$, dan is $du = -\frac{1}{x^2} dx$.

Stel $dv = dx$, dan is $v = x$.

Bijgevolg is $\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$.

Hieruit volgt dan dat $\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx = 1$, en bijgevolg is $0 = 1$.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$$\int \sin x \cos x dx = \int \sin x \cos x dx$$

⇓

$$\int \sin x d \sin x = -\int \cos x d \cos x$$

⇓

$$\frac{1}{2} \sin^2 x + c = -\frac{1}{2} \cos^2 x + c$$

⇓

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0.$$

$$\tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$0 = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos^3 x} - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\int \cos^{-3} x d \cos x - \int \tan x d \tan x$$

$$= \left(\frac{\cos^{-2} x}{2} + c \right) - \left(\frac{\tan^2 x}{2} + c \right) = \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{\tan^2 x}{2}.$$

Bijgevolg is $\tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$.

Een merkwaardige limiet

Bereken $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Eerste poging. Als n nadert naar $+\infty$, dan nadert $\frac{1}{n}$ naar 0. Bijgevolg is $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ en voor alle reële waarden van n is $1^n = 1$. De gezochte limiet is daarom gelijk aan 1.

Tweede poging. Voor alle strikt positieve waarden van n is $a = 1 + \frac{1}{n} > 1$ en omdat $a > 1$ is, zal $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$. De gezochte limiet is bijgevolg $+\infty$.

Derde poging. Met behulp van een grafische rekenmachine controleren we dat $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\dots$

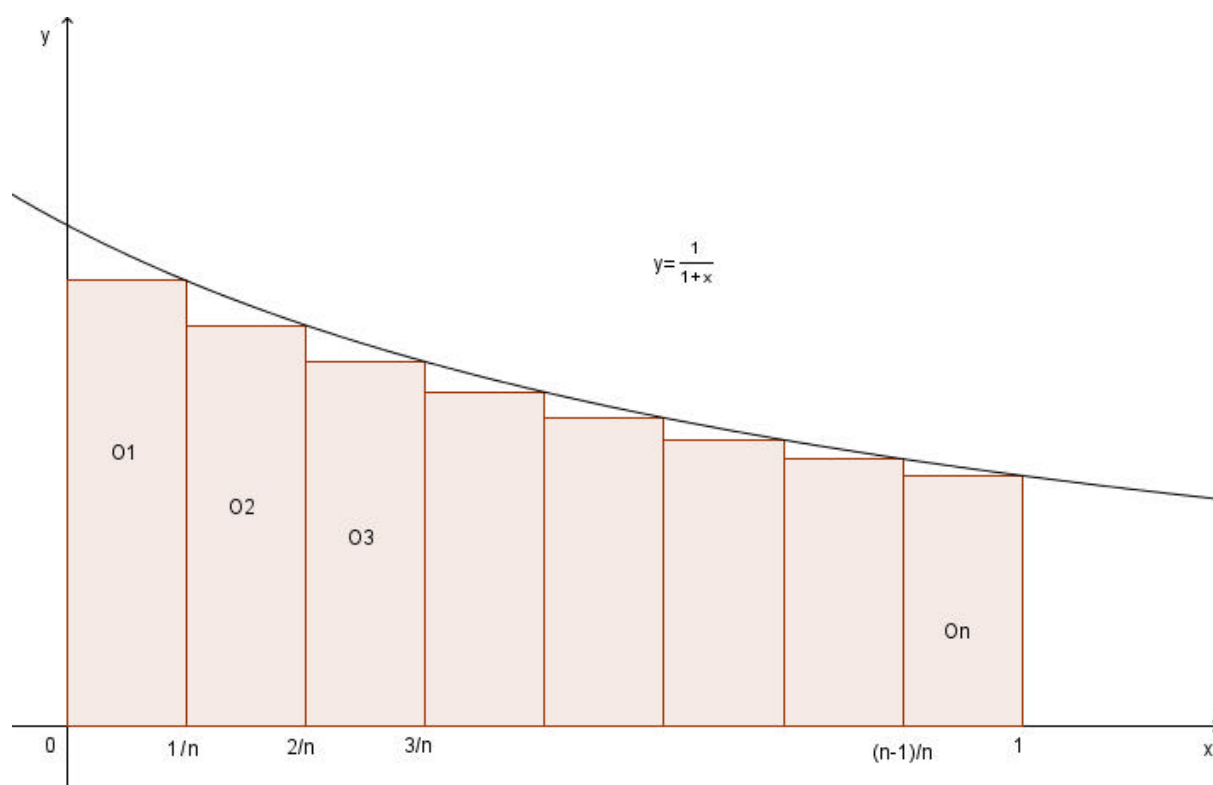
Dit blijkt het getal van Euler te zijn: $e = 2,71828\dots$

X	Y1	
10	2.5937	
100	2.7048	
1000	2.7169	
10000	2.7181	
100000	2.7183	
Y1=(1+1/X)^X		

Bereken $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$.

Eerste poging. Als n nadert naar $+\infty$, dan nadert $\frac{1}{n+k}$ naar 0, voor alle reële waarden van k . Omdat de limiet van een som van termen gelijk is aan de som van de limiet van deze termen afzonderlijk is de uiteindelijke limietwaarde van deze uitdrukking gelijk aan 0.

Tweede poging. Beschouw de functie $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en bereken de ondersom over het interval $[0,1]$, waarbij dit interval wordt onderverdeeld in n gelijke deelintervallen. We bepalen hiervoor de oppervlakte van de n rechthoeken $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ (zie onderstaande figuur).



$$O_1 = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$O_2 = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

$$O_3 = \frac{1}{n+3}, \dots \text{ en } O_n = \frac{1}{2n} \text{ (telkens via analoog rekenwerk).}$$

Volgens de definitie van de bepaalde integraal is dan

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Merk op dat dit wel de correcte waarde is van deze limiet. Bij de eerste poging werd er immers geen rekening gehouden met het feit dat in het geval dat n naar $+\infty$ nadert er meteen ook ‘oneindig veel’ termen opduiken in de som.