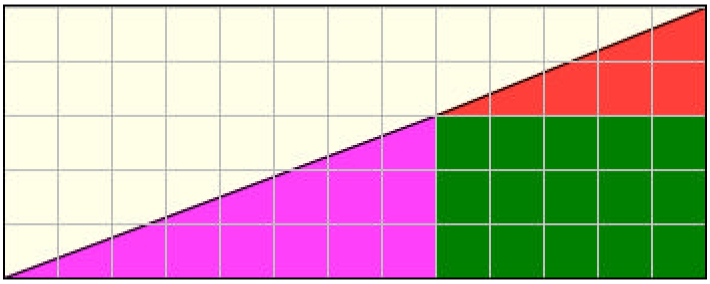
PARADOXEN 10

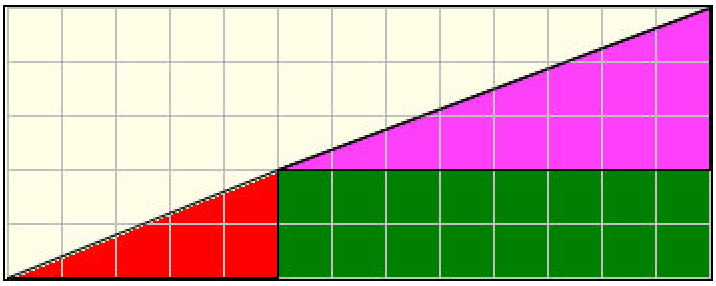
Dr. Luc Gheysens

PARADOXEN MET OPPERVLAKTE EN LENGTE

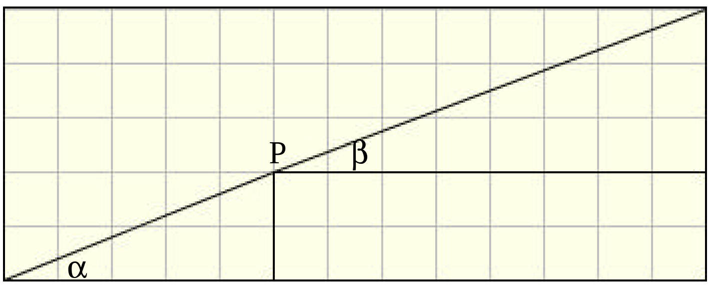
In 1953 tekende Paul Curry, een goochelaar uit New York, een driehoek die hij op twee verschillende manieren in drie stukken verdeelde. Zo toonde hij aan dat een gebied met een oppervlakte van 15 cm² even groot is als een gebied van 16 cm². Sindsdien spreekt men in de wiskundige literatuur ook over de driehoek van Curry.

De paradox wordt hieronder afgebeeld. In de bovenste figuur is de helft van de totale rechthoek opgevuld door een driehoek, die op zijn beurt in drie stukken is opgedeeld: een grote en een kleine driehoek en een rechthoek met een oppervlakte van 3 x 5 = 15 vierkantjes. Door nu de twee driehoeken van plaats te verwisselen, slaagt men er blijkbaar in de halve rechthoek weer op te vullen met de twee driehoeken en met een rechthoek met een oppervlakte van 2 x 8 = 16 vierkantjes.





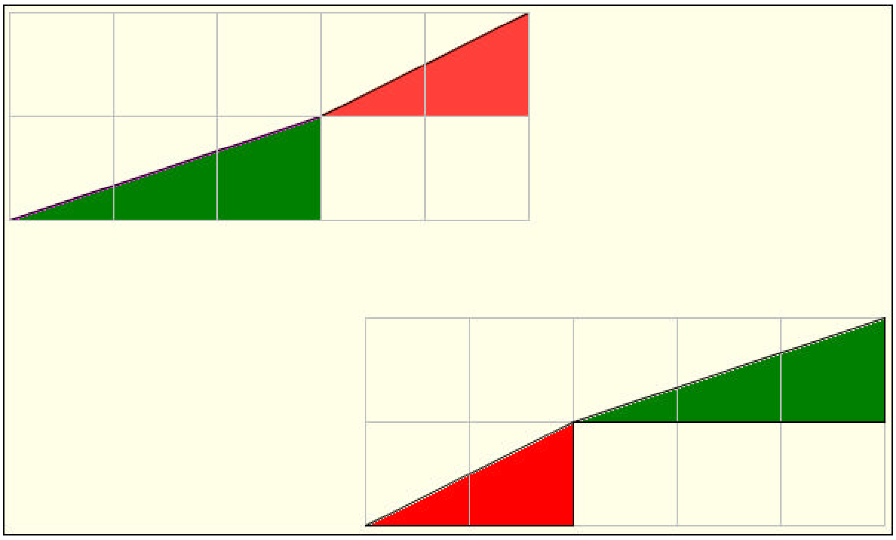
De verklaring van dit merkwaardige fenomeen ligt in het feit dat de schuine zijden van beide driehoeken niet in één rechte lijn komen te liggen. Je kan immers zelf vaststellen dat er in het punt P op de onderstaande figuur een knik zit. In de eerste tekening hierboven zit die knik naar binnen toe en in de tweede figuur zit de knik naar buiten toe. Het verschil is precies gelijk aan één vierkantje.



Dat er een knik zit in het punt P, is gemakkelijk aan te tonen. Op de bovenstaande figuur is in de kleine driehoek $\tan\alpha = \frac{2}{5} = \frac{16}{40}$ en in de grote driehoek is $\tan\beta = \frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ en bijgevolg is $\alpha > \beta$ en dit verklaart meteen de knik naar buiten toe. Beide driehoeken zijn dus niet gelijkvormig.

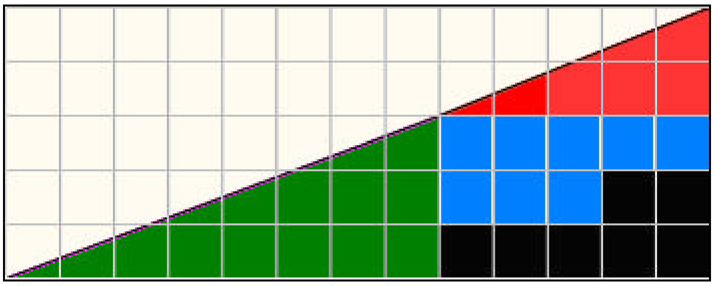
Van de paradox van de driehoek van Curry circuleren ondertussen verschillende versies. We bieden er een drietal aan. De knik is duidelijk te zien in versie 2.

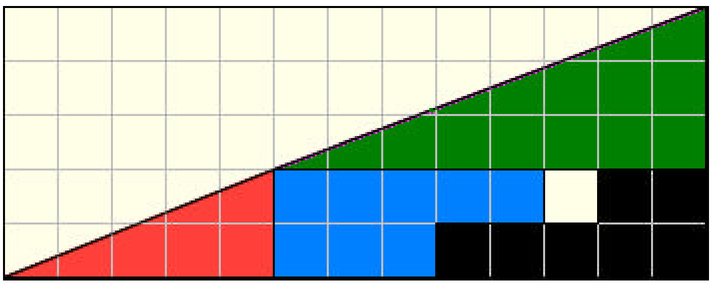
Versie 2.



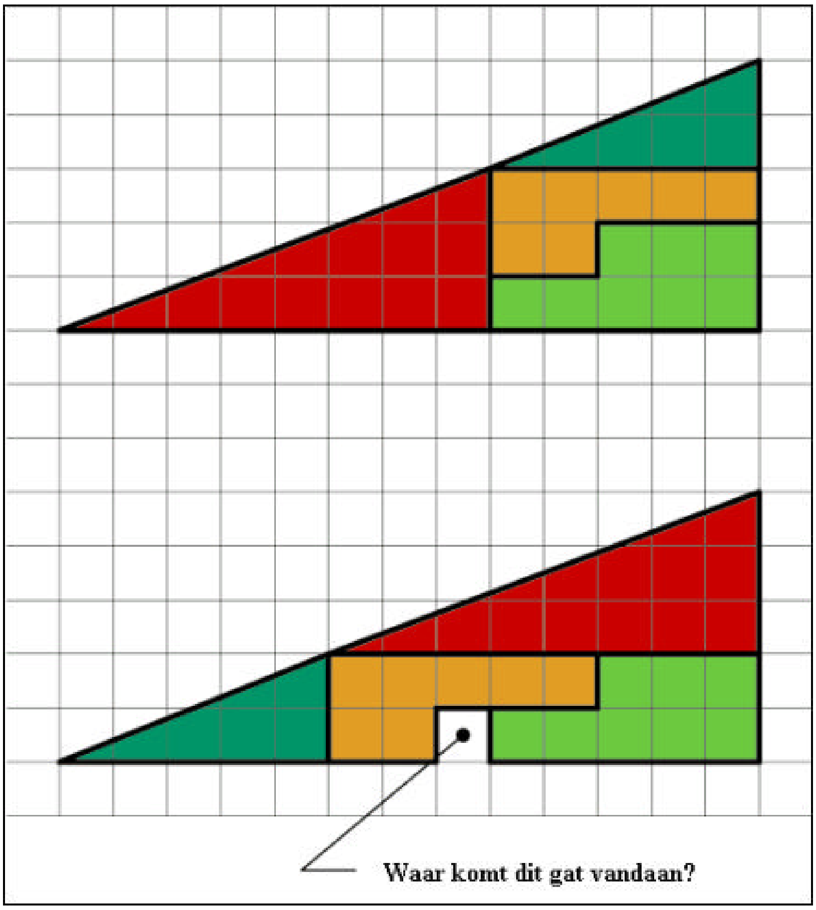
Versie 3.

Hieronder zie je hoe met vier stukken de helft van de rechthoek wordt opgevuld Door de vier stukken op een andere manier te plaatsen zoals op de onderste figuur, wordt opnieuw de helft van de rechthoek opgevuld, maar blijft er een 'ruimte' over die precies één vierkantje groot is.

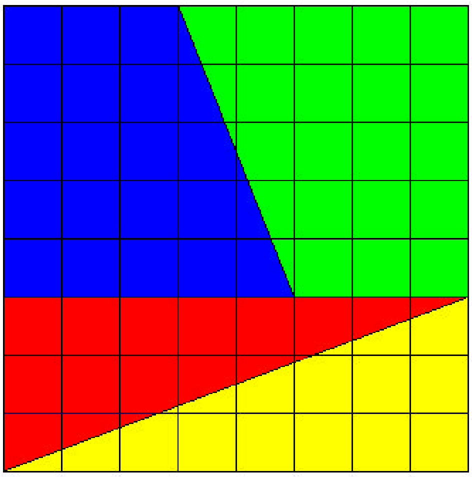




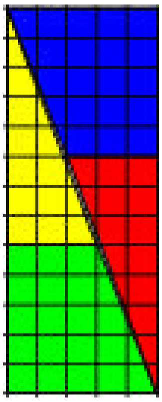
Versie 4.

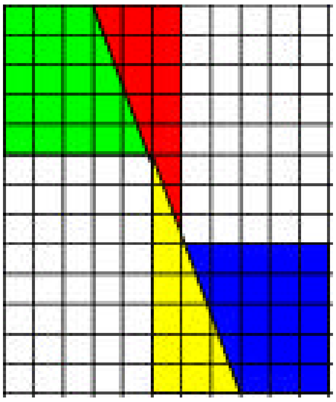


63 = 64 = 65



Verdeel een schaakbord met 8 x 8 velden in vier driehoeken zoals op de bovenstaande figuur is aangeduid. We herschikken de vier driehoeken op twee verschillende manieren zodat ze samen een rechthoek vormen waarvan de oppervlakte respectievelijk 65 en 63 velden vormen.

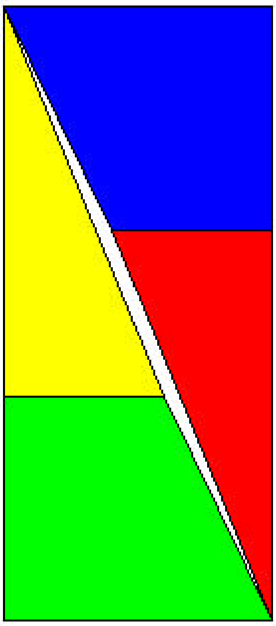




5 x 13 = 65

(6 x 5) + 3 + (6 x 5) = 63
(twee rechthoeken van 6 x 5 kleine vierkantjes en dan nog 3 kleine vierkantjes in het midden)

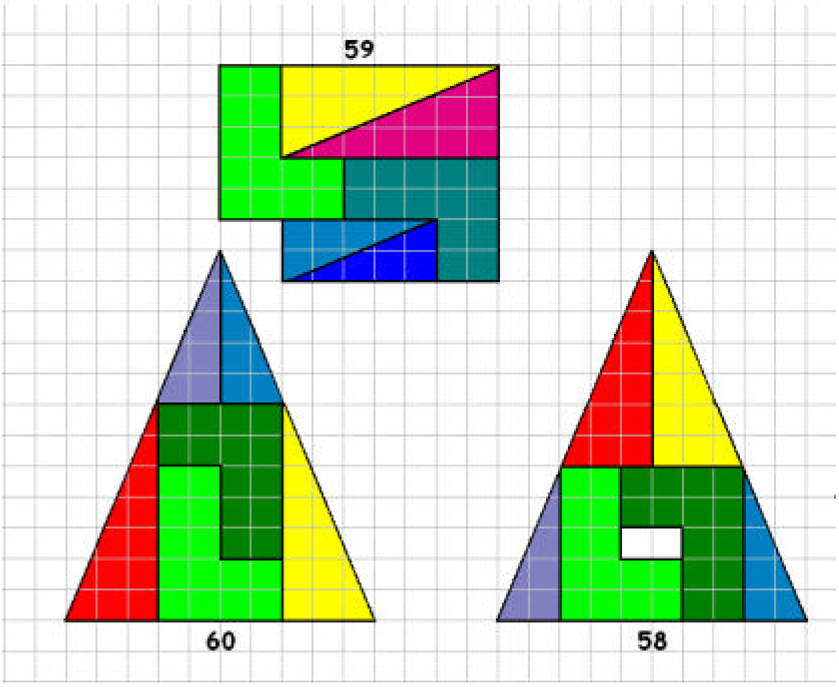
De paradox is gemakkelijk te doorprikken. Bij correcte afbeelding ziet de linkse figuur er als volgt uit:



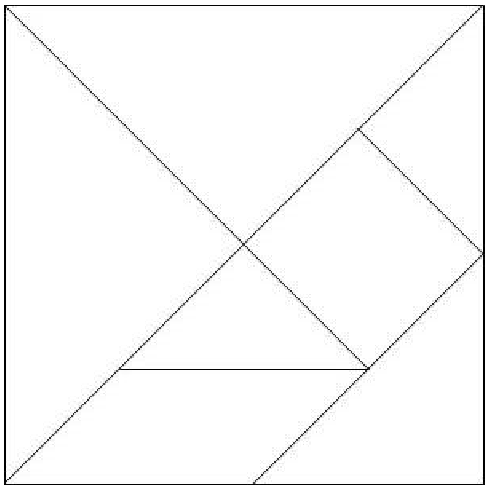
De witte vierhoek in het midden verklaart het schijnbaar bijkomende 65ste veld.

Verklaar nu zelf waarom er op de rechtse figuur schijnbaar een veld verdwenen is, zodat er nog slechts 63 vierkantjes ingekleurd zijn?

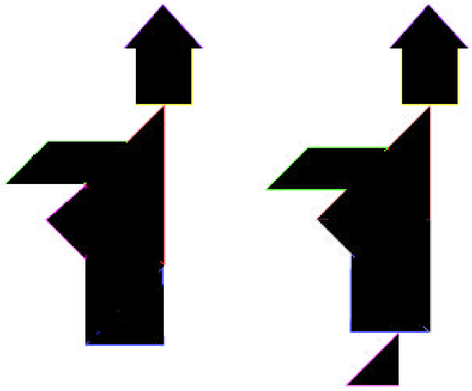
58 = 59 = 60



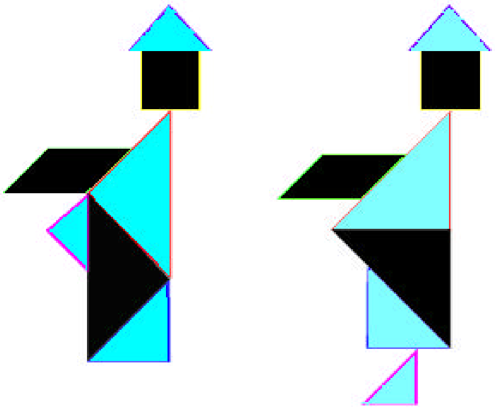
Tangramparadox



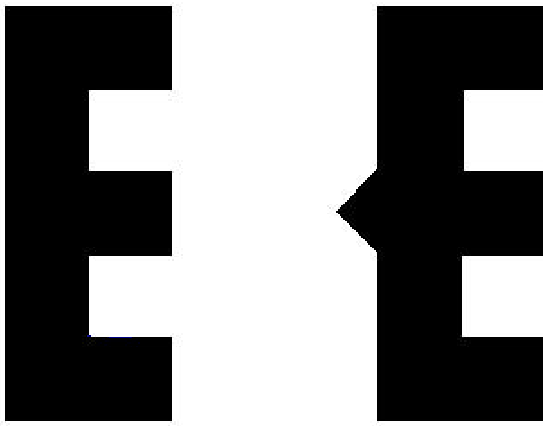
Deze paradox werd voor het eerst gepubliceerd door de puzzelaar Henry Ernest Dudeney in zijn boek Amusements in Mathematics in 1958. Hij gebruikt de zeven stukjes van een tangram en slaagt er blijkbaar in twee gelijke figuurtjes te vormen, maar het linkse figuurtje mist zijn voet. In werkelijkheid wordt de voet gecompenseerd door een iets dikker lijf.



Zo kun je de figuurtjes vormen met behulp van de zeven tangramstukjes.



We plaatsen twee keer een letter E. De rechtse letter heeft echter een kleine uitstulping in het midden van de linkerzijde. Hoe kun je toch beide figuren maken met de zeven tangramstukjes?

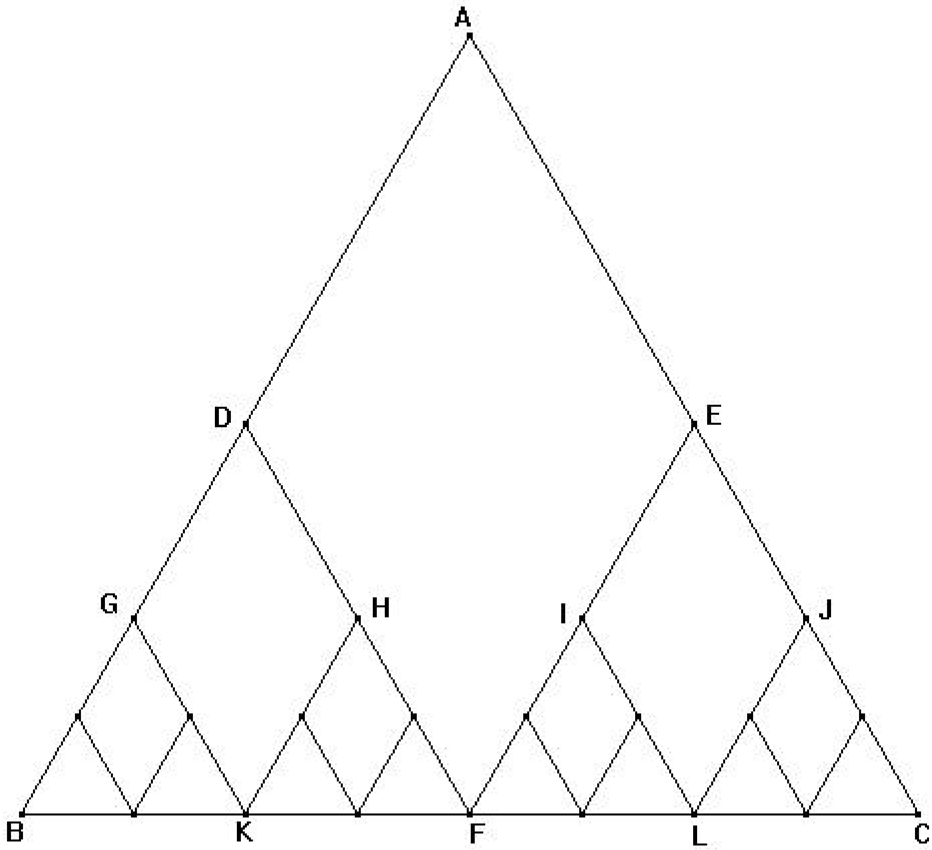


Alle cirkels hebben een gelijke omtrek

Meer dan waarschijnlijk werd deze paradox ontdekt door de Griekse filosoof Aristoteles omstreeks 350 v. Chr.

Je kleeft twee kartonnen cirkelschijven met een verschillende diameter op elkaar vast zodat de twee middelpunten op elkaar liggen. Rol nu beide schijven samen over een vlakke tafel. Het punt A beschrijft een volledige (grote) cirkelomtrek en komt zo uiteindelijk in positie A' terecht. De afstand |AA'| van A tot A' is precies gelijk aan de omtrek van de grootste cirkel. Bij het rollen beschrijft het punt B eveneens een volledige (kleine) cirkelomtrek en eindigt in de positie B'. De afstand |BB'| van B tot B' is dus gelijk aan de omtrek van de kleinste cirkel. Omdat |AA'| gelijk is aan |BB'| zijn de beide cirkelomtrekken ook aan elkaar gelijk.

Bij een gelijkzijdige driehoek is elke zijde even lang als beide andere zijden samen

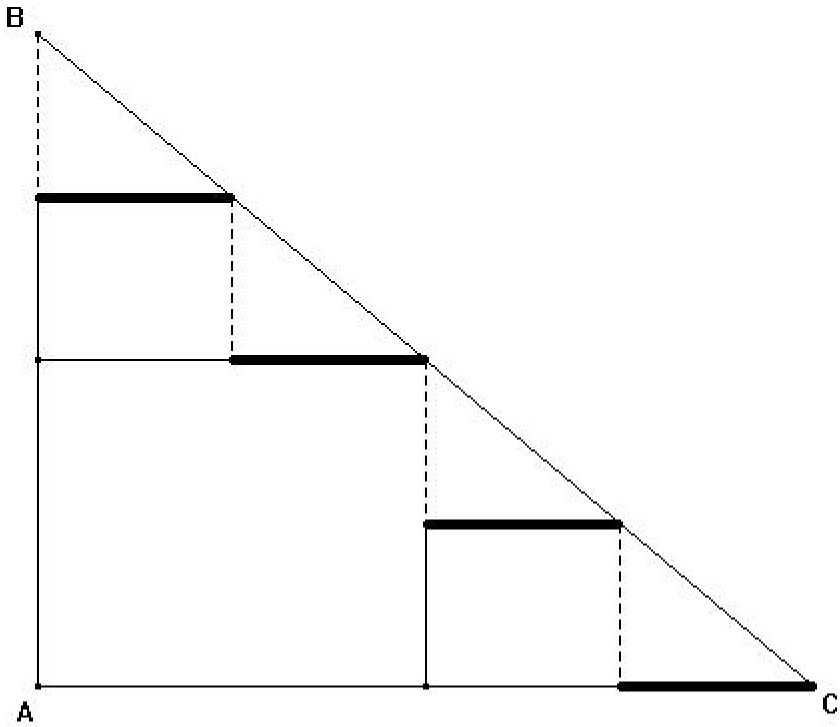


Bij een gelijkzijdige driehoek ΔABC is D het midden van [AB], E het midden van [AC], F het midden van [BC], G het midden van [BD], H het midden van [DF], I het midden van [FE], J het midden van [EC], K het midden van [BF] en L het midden van [FC].

Dan is de gebroken lijn BDFEC even lang als de gebroken lijn BAC.
Telkens is de lengte gelijk aan de som van twee zijden van de driehoek.
Op haar beurt is de gebroken lijn BGKHFILJC opnieuw even lang als de gebroken lijn BAC.

Zo kun je eindeloos doorgaan en bekom je een gebroken lijn die steeds nauwer aansluit bij de zijde [BC] van de oorspronkelijke driehoek. In de limiet valt de gebroken lijn (met als lengte |AB| + |AC|) samen met [BC] zodat |BC| = |AB| + |BC|.

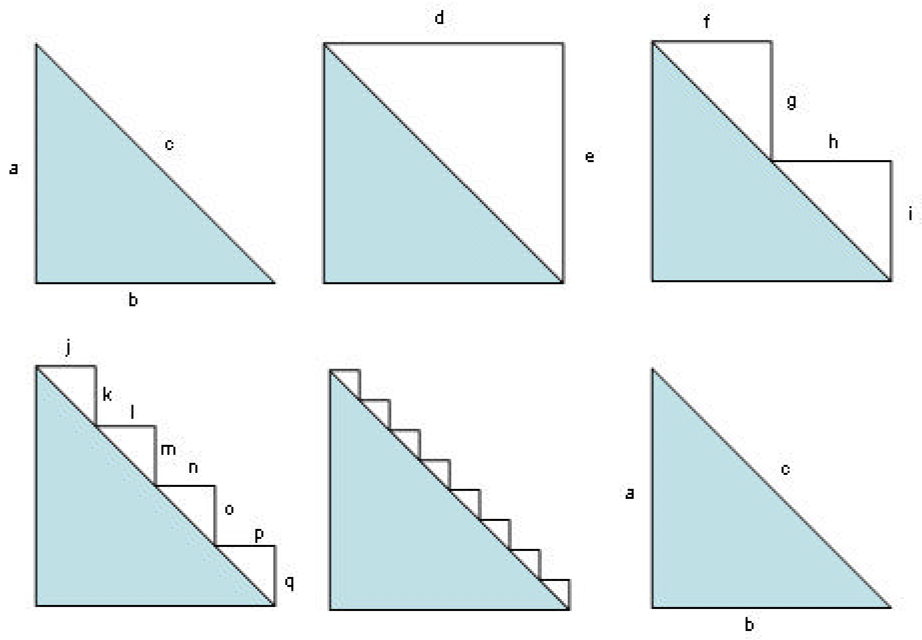
Bij een rechthoekige driehoek is de schuine zijde gelijk aan de som van de twee rechthoekszijden



Voor het bewijs dat |BC| = |AB| + |BC| kun je op dezelfde manier te werk gaan als bij de vorige constructie, waar werd aangetoond dat bij een gelijkzijdige driehoek elke zijde even lang is als beide andere zijden samen.

In de bovenstaande tekening ontstaat weer een gebroken lijn die steeds nauwer aansluit bij de schuine zijde. De horizontale stukjes van de gebroken lijn (in vetjes) zijn samen even lang als de zijde [AC] en de verticale stukjes van de gebroken lijn (in stippellijnen) zijn samen even lang als de zijde [AB]. Door telkens weer met middens van lijnstukken en met horizontale en verticale lijnstukjes te werken, ontstaat een trapvormige gebroken lijn, waarvan de 'treden' steeds kleiner worden. De lengte van elke gebroken lijn blijft echter gelijk aan |AB| + |BC|. De gebroken lijn nadert ook steeds dichter tot de zijde [BC] zodat uiteindelijk de lengte van de gebroken lijn gelijk wordt aan |BC|. Hieruit volgt het vooropgestelde resultaat.

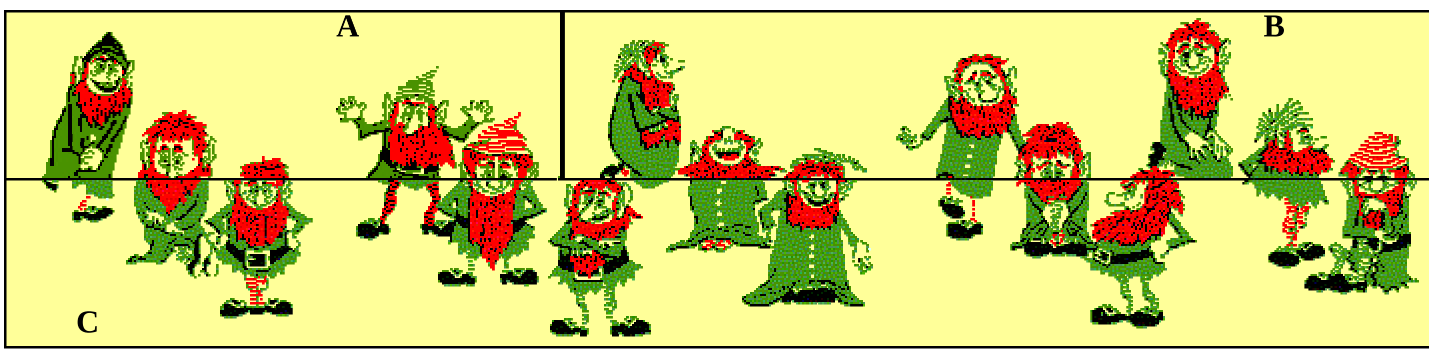
De volgende paradox wordt in de Engelstalige literatuur de 'Manhattan distance paradox' genoemd. De horizontale en verticale lijnstukjes van de trapjes op de schuine zijde hebben samen telkens een lengte die gelijk is aan de som van de lengten van de twee rechtshoeken.
Zo is bijvoorbeeld op de vierde tekening (k + m + o + q) + (j + l + n + p) = a + b. In de limietovergang bekom je zo opnieuw het resultaat dat c = a + b.

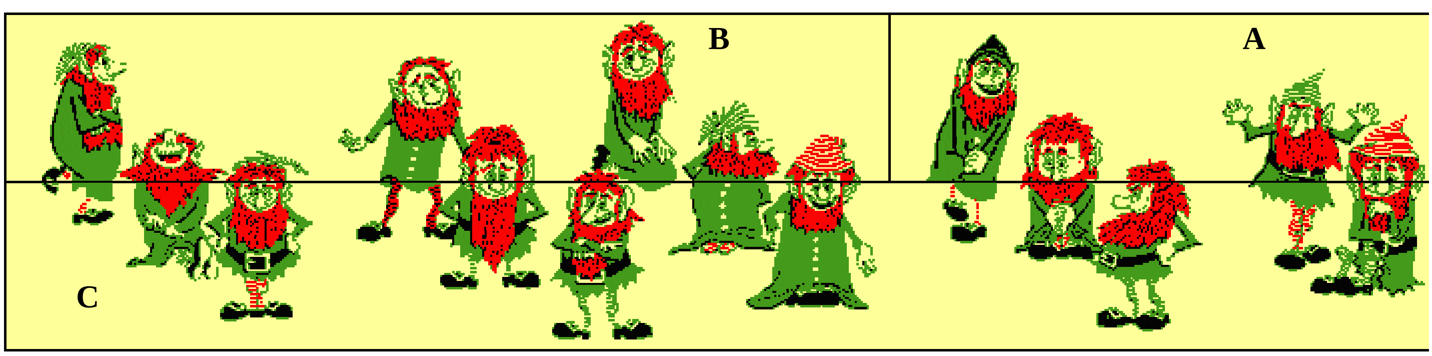


De verdwenen dwerg

De onderstaande figuur bestaat uit drie stukken (A, B en C). In het totaal staan 15 dwergen afgebeeld.

Bij plaatsverwisseling van de bovenste twee stukjes (A en B) blijkt er een dwerg verdwenen te zijn.



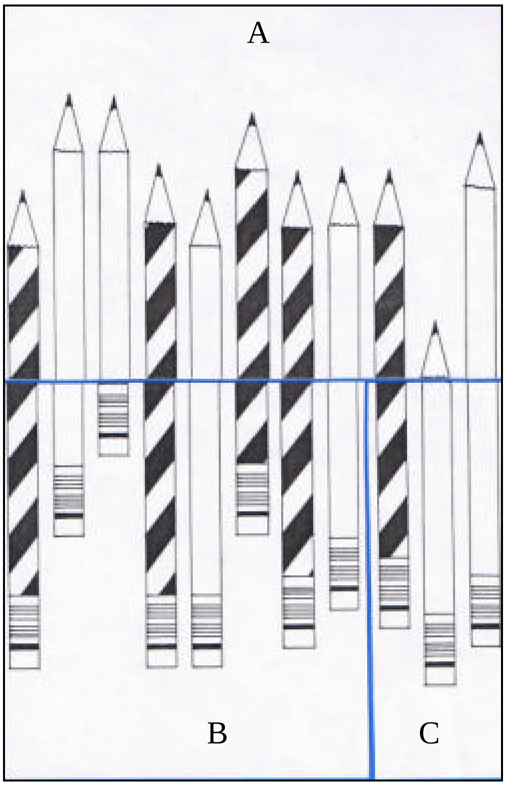


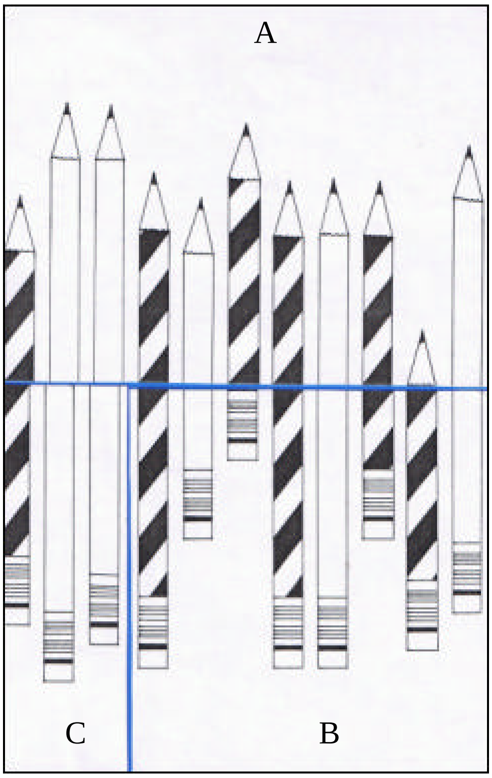
Kun jij verklaren waar de 15de dwerg naartoe is?
Bron: http://home.scarlet.be/~greetvrh/ventje.htm

Het veranderde potlood

Als variatie op ‘de verdwenen’ dwerg hebben we het onderstaande voorbeeld van ‘het veranderde potlood’ bedacht.

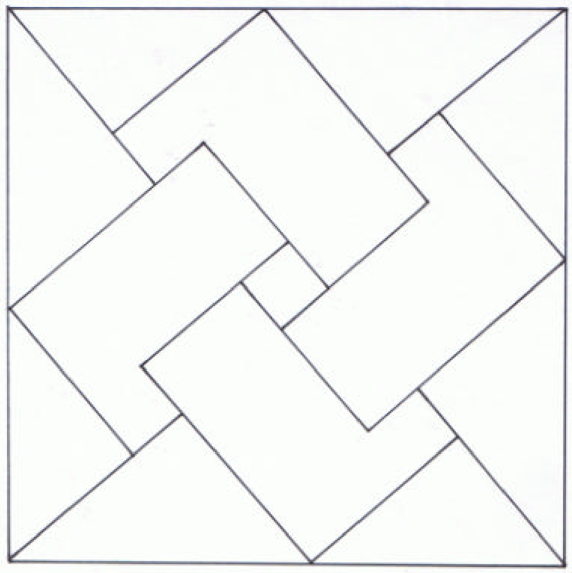
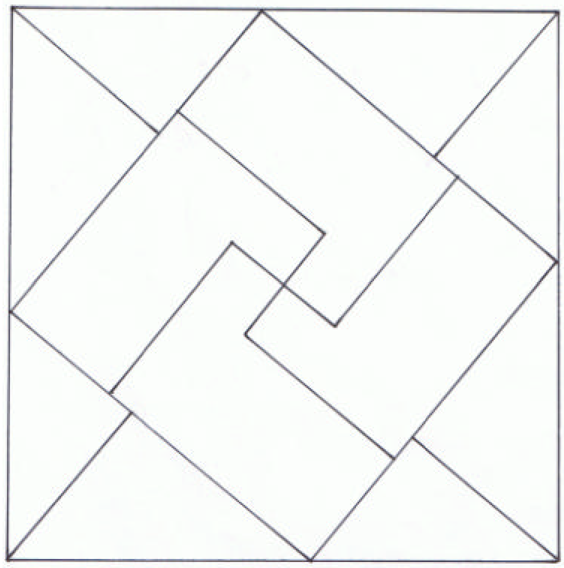
Beide figuren bestaan uit drie stukjes (A, B en C). Op de linkse figuur staan 6 witte en 5 gestreepte potloden. Verwissel nu de stukjes B en C onderling van plaats. Wat merk je? Op de rechtse figuur bevinden zich nu 5 witte en 6 gestreepte potloden.
Verklaring?



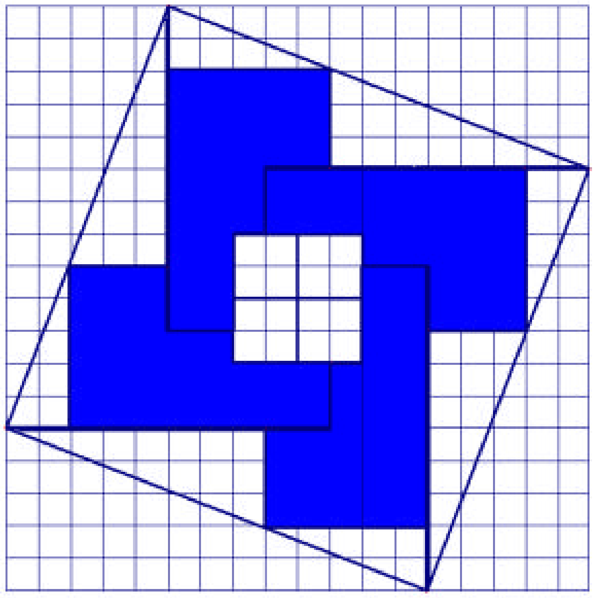
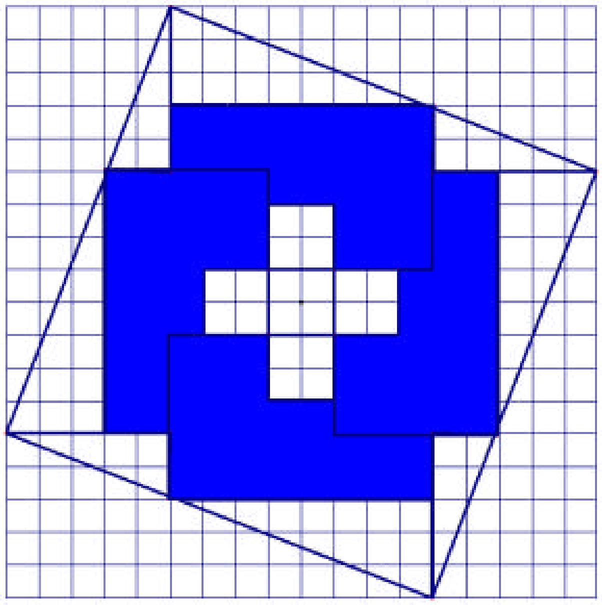


Het verdwenen vierkantje

We variëren nog even verder op de driehoek van Curry.

De linkse figuur hierboven telt 13 stukjes. Bij het omdraaien van alle stukjes zodat de achterzijde de voorzijde wordt, kun je met slechts 12 van de 13 stukjes blijkbaar weer een even groot vierkan opvullen. Het kleine centrale vierkantje op de linkse tekening is verdwenen op de rechtse figuur. Hoe kan dit?

Als je beide bovenstaande figuren met elkaar vergelijkt, dan blijkt er op de rechtse figuur centraal één vierkantje van 2 x 2 hokjes meer te staan dan op de linkse. Hoe kan dat?

De paradox van de rollende munt

Neem twee muntstukken van een euro en leg ze naast elkaar op tafel. Laat de rechtse munt **langs** de andere munt rollen (zonder glijden) tot ze een volledige toer rond die munt heeft gemaakt. Je neemt aan dat de draaiende munt na die volledige toer ook precies één keer rond haar as zal gedraaid hebben. De praktijk wijst echter uit dat ze twee volledige omwentelingen rond haar as heeft afgelegd.

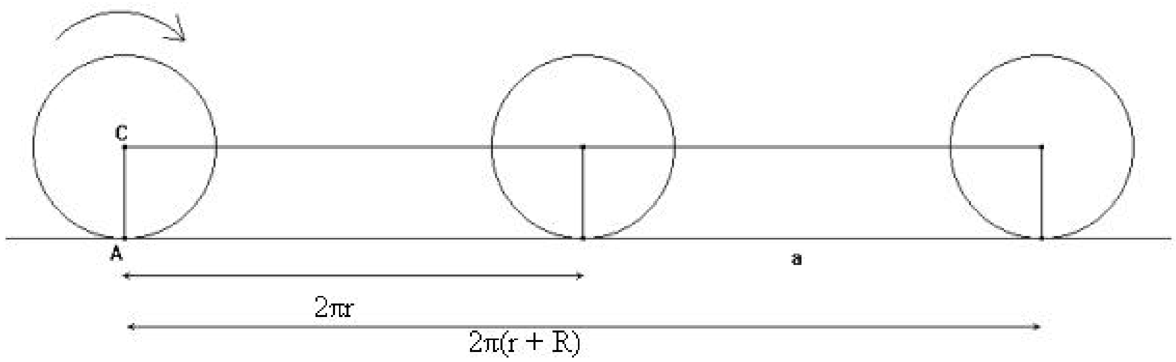
Beginsituatie:

Situatie nadat de rollende munt een halve toer rond de vaste munt heeft afgelegd:

Eindsituatie:

Verklaring.

Een kleine munt met een straal r draait rond een grotere en vaste munt met straal R. Het middelpunt C van de kleine munt beschrijft dan een cirkel met straal r+R. We stellen nu even de situatie voor op een rechte lijn en laten de kleine munt over een rechte a rollen (zonder glijden). Noem A het punt dat zich onderaan de kleine munt bevindt bij de beginsituatie. Laat de munt één volledige omwenteling rond haar as afleggen, dan komt het punt A terug op de rechte a terecht nadat een horizontale afstand $2\pi r$ is afgelegd. Als de kleine munt een volledige toer rond de grote munt aflegt, zal het middelpunt C een afstand $2\pi(r+R)$ afleggen.



Om te weten hoeveel volledige omwentelingen de kleine munt rond haar as heeft afgelegd, wanneer ze een volledige toer rond de grote munt heeft gemaakt, volstaat het te berekenen hoeveel keer $2\pi r$ in $2\pi(r+R)$ gaat. Dit is klaarblijkelijk $\frac{2\pi(r+R)}{2\pi r} = \frac{r+R}{r} = 1 + \frac{R}{r}$ keer. Wanneer beide munten dezelfde diameter hebben (R = r) is dit 2 keer. Wanneer de diameter van de kleine munt slechts de helft is van de diameter van de grote munt is dit $1 + \frac{2}{1} = 3$ keer. Hieruit volgt nog een andere paradox. Bij het rollen zonder glijden zal de munt met straal r precies één keer rond haar as draaien als men ze een volledige toer rond de centrale munt laat afleggen op voorwaarde dat de straal r oneindig groot is: $\lim\limits_{r \to +\infty}\left(1 + \frac{R}{r}\right) = 1.$

De paradox van het touw rond de aarde

Stel dat je een touw kunt leggen op de evenaar, die de hele aarde omspant. Hoeveel langer moet dan een touw zijn dat overal één meter boven de evenaar hangt?

Intuïtief vermoed je dat je over een touw zal moeten beschikken dat honderden kilometer langer is, omdat de evenaar ongeveer 40 000 km lang is. Een touw dat 6,3 meter langer is, zal echter volstaan!

Verklaring. Als de straal van de aarde R meter groot is en als we aannemen dat de evenaar een cirkel is met straal R, dan heb je een touw nodig van $2\pi R$ meter om de aarde te omspannen. Een touw dat overal één meter boven de evenaar hangt, vormt een cirkel met straal R + 1 en die cirkel heeft een omtrek van $2\pi(R + 1)$ meter. Het verschil tussen beide omtrekken is dan $2\pi(R + 1) - 2\pi R = 2\pi$ of ongeveer 6,28 meter.

Het probleem van de doorhangende kabel

Twee palen staan 100 meter van elkaar verwijderd. Op een hoogte van 8 meter span je tussen beide palen een kabel (fig. 1). Als je nu op dezelfde hoogte een kabel aanbrengt die 1 meter langer is en je bevestigt in het midden ervan een gewicht zodat hij opnieuw strak hangt (fig. 2), hoe diep zal de kabel dan doorhangen?

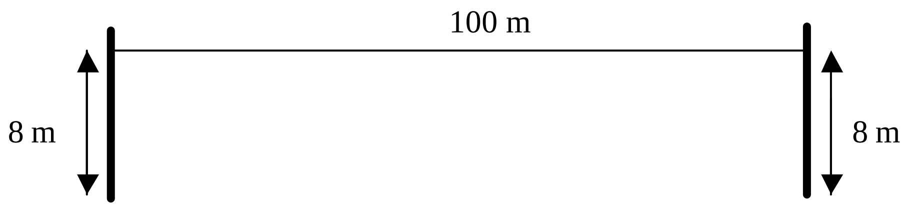


fig. 1

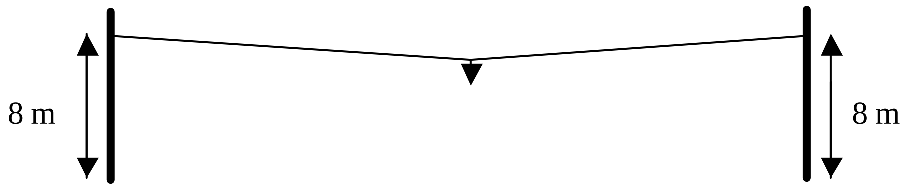
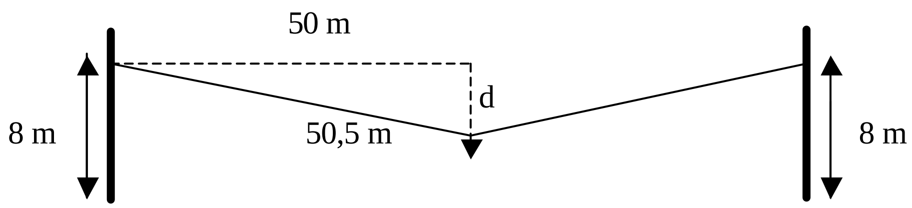


fig. 2

Intuïtief maakt men meestal een verkeerde schatting. Het lijkt evident dat een kabel van 101 meter (niet meer dan 1 meter langer) slechts enkele centimeter zal doorhangen in het midden.

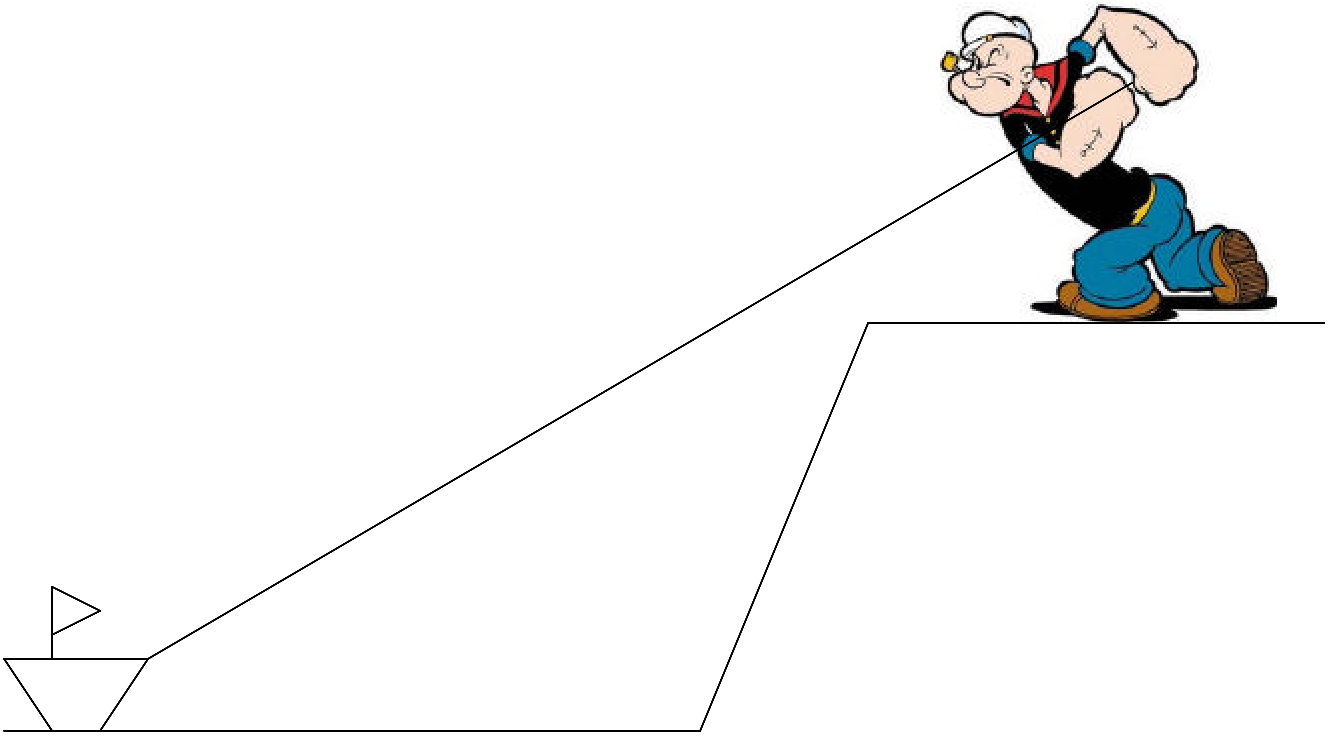
Voor een correcte berekening passen we de stelling van Pythagoras toe.



$$50^2 + d^2 = 50{,}5^2 \;\Rightarrow\; d = \sqrt{50{,}5^2 - 50^2} = \sqrt{2550{,}25 - 2500} = \sqrt{50{,}25} \approx 7{,}09\,.$$

De kabel hangt meer dan 7 meter door; het onderste punt bevindt zich op minder dan 1 meter van de grond.

Popeye en zijn bootje



Popeye heeft een bootje in elkaar geknutseld. Hij staat op de oever en een beetje verder drijft zijn bootje, dat hij vastgemaakt heeft met een stuk touw, op het lager gelegen vijvertje. Hij trekt nu het bootje naar de kant door het touw één meter in te trekken. Paradoxaal genoeg zal het bootje dan meer dan één meter naderen tot de kant!

De verklaring hiervoor is eenvoudig te geven via de zogenaamde driehoeksongelijkheid, die stelt dat in een willekeurige driehoek elk zijde korter is dan de som van de twee andere zijden. Dit is nogal logisch: recht naar huis gaan is steeds korter dan via een omweg…

Als het touw lengte L heeft en met één meter wordt ingetrokken, zal het bootje een afstand D afleggen. Wegens de driehoeksongelijkheid geldt dan:
$L < L - 1 + D$, zodat $1 < D$, m.a.w. het bootje komt meer dan één meter dichter bij de wal.