

Het vlak betegelen met beestjes of andere figuurtjes

Je ziet hieronder twee zelfgemaakte betegelingen. Je hebt wellicht gelijkaardige (maar mooiere) exemplaren gezien, gemaakt door M.C. Escher, de Nederlandse kunstenaar die zelf geen wiskundige was maar wel heel erg door wiskunde geboeid was. Behalve voor zijn creatieve betegelingen, is hij ook beroemd voor zijn tekeningen van ruimtefiguren die onmogelijk kunnen bestaan. De betegelingen hieronder zijn elk gebaseerd op één tegel, voor de duidelijkheid in twee verschillende kleuren. We noemen de tegels van de eerste figuur, met wat fantasie, ‘hagedisjes’ en die van de tweede ‘spookjes’ (met lange arm).



1. Bekijk de witte hagedis in het midden van de linkse betegeling. Welke transformaties beelden deze tegel af zijn donkere buurtegels? Welke transformaties beelden deze tegel af op de witte tegels die met deze tegel één hoekpunt gemeen hebben?

(Wit naar donker boven en onder: een puntspiegeling, ten opzichte van het midden van de gemeenschappelijke zijde. Wit naar donker links en rechts: een verschuiving. Wit naar witte burenen: een puntspiegeling ten opzichte van het gemeenschappelijke hoekpunt.)

2. Zelfde vragen voor de tweede betegeling (maar dan over spookjes in plaats van hagedisjes).

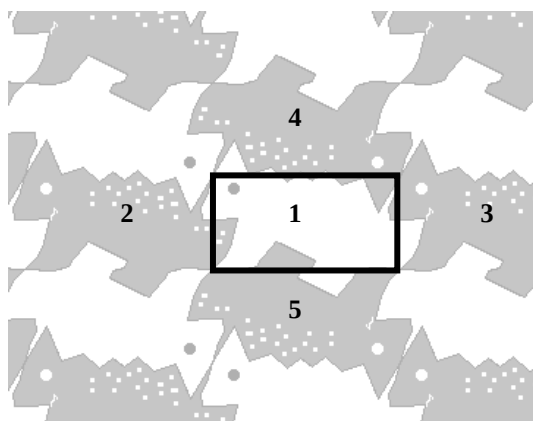
(Wit naar donkere burenen boven en onder: puntspiegeling. Wit naar donkere burenen links en rechts: een lijnspiegeling met ‘horizontale’ spiegelas, gevolgd door een verschuiving naar links of naar rechts (of omgekeerd: eerst verschuiven en dan spiegelen). Merk op: op die manier worden de bovenkant en de onderkant verwisseld maar blijven de linker- en de rechterkant behouden. Bij een puntspiegeling worden zowel boven en onder als links en rechts verwisseld. Wit naar witte burenen: de samengestelde van een lijnspiegeling met verticale spiegelas en een verschuiving. Boven- en onderkant zijn behouden maar links en rechts zijn verwisseld.)

Escher vertrok telkens van een eenvoudige betegeling met veelhoeken en vervormde de tegels tot diertjes. Om dit veelhoekenrooster te ontdekken, verbind je de ‘knooppunten’ van een zelfde tegel waar meer dan twee tegels samenkomen.

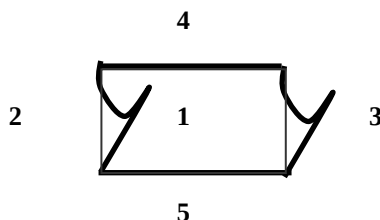
3. Doe dit voor de twee betegelingen hierboven (eventueel op een transparant of kalk dat je erop legt).

Escher kon niet zomaar gelijk welke vorm verzinnen voor de tegel, want ze moet ‘passen’ tegen de buurtegels. Dit betekent dat hij rekening moest houden met de transformaties die de tegel op de buurtegels afbeelden.

Neem bv. de eerste betegeling van de vorige opdrachten. De basistegel is een rechthoek.



Je hebt ontdekt dat tegel 3 het beeld is van tegel 1 door een verschuiving naar rechts. Door deze transformatie wordt de grens tussen tegel 2 en tegel 1 afgebeeld op de grens tussen tegel 1 en tegel 3. Elke wijziging die je aanbrengt aan de grens tussen tegel 1 en tegel 2 moet dan ook, verschoven, terugkomen in de grens tussen tegel 1 en tegel 3.



Tussen tegel 1 en tegel 5 heerst een puntspiegeling, anders gezegd een draaiing over 180° .

4. Wat doet deze puntspiegeling met de grenslijn tussen tegel 1 en tegel 5? Welke speciale eigenschap moet deze grenslijn bijgevolg hebben?

(Deze puntspiegeling beeldt de grenslijn op zichzelf af. De grenslijn moet dus samenvallen met zijn puntspiegelbeeld. Anders gezegd: de grenslijn moet puntsymmetrisch zijn.)

Hetzelfde geldt dan voor de grens tussen tegel 1 en tegel 4.

5. Controleer dit op de betegeling.
6. Onderzoek op een zelfde manier wat speciaal is aan de grenzen bij de betegeling met de spookjes.
(De basistegel is een vierkant. De bovenste en de onderste grenzen moeten puntsymmetrisch zijn. De rechtergrens is het beeld van de linkergrens onder de samengestelde van een spiegeling met horizontale spiegelas en een horizontale verschuiving.)
7. Maak zelf een betegeling gebaseerd op dezelfde transformaties als één van deze twee betegelingen. Lukt het je om hier een leuk figuurtje mee te maken (diertje of ...), zoveel te beter, maar een 'abstracte' betegeling kan ook mooi zijn.
8. Vertrek nu van een betegeling met willekeurige driehoeken of vierhoeken. Je weet (zie vorige werktekst) dat de transformatie die een tegel op een buurtegel afbeeldt, een puntspiegeling is rond het midden van de gemeenschappelijke zijde. Wat betekent dit voor de vervormingen die je aanbrengt? Maak een mooie betegeling op basis van dit rooster.

(De zijden moeten puntsymmetrisch zijn ten opzichte van hun midden.)