

Grieks alfabet

|   |         |
|---|---------|
| α | alfa    |
| β | bèta    |
| γ | gamma   |
| δ | delta   |
| ε | epsilon |
| ζ | zèta    |
| η | èteta   |
| θ | thèteta |
| ι | jota    |
| κ | kappa   |
| λ | lambda  |
| μ | mu      |
| ν | nu      |
| ξ | xi      |
| ο | omicron |
| π | pi      |
| ρ | rho     |
| σ | sigma   |
| τ | tau     |
| υ | upsilon |
| φ | fi      |
| χ | chi     |
| ψ | psi     |
| ω | omega   |

Constanten

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 2..$$

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\ 247...$$

$$\varphi = 1,618\ 033\ 988\ 749\ 8.. ; \text{ gulden snede}$$

$$\log e = 0,434\ 294\ 481\ 903\ 2..$$

$$\ln 10 = 2,302\ 585\ 092\ 994\ 0..$$

$$\varphi = 0,577\ 215\ 664\ 901\ 5.. ; \text{ constante van EULER}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1,644\ 934\ 066... ; \text{ som van de hyperharmonische reeks}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{\pi}{180} = 57,295\ 779...^\circ = 57^\circ\ 17'\ 44,8..."$$

$$1 \text{ jaar} = 365,2422 \text{ dagen}$$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  ; de verzameling van de natuurlijke getallen

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$  ; de verzameling van de gehele getallen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} ; b \in \mathbb{N}_0 \right\}$  ; de verzameling van de rationale getallen

$\mathbb{R}$  = de verzameling van de reële getallen

$\mathbb{C} = \{a + bi ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \text{ met } i^2 = -1\}$  ; de verzameling van de complexe getallen

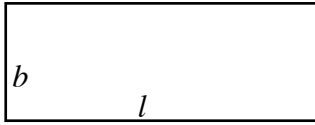
(men gebruikt ook **j** in plaats van **i**.)

Algebraïsche getallen: alle mogelijke reële nulpunten van veeltermen met gehele coëfficiënten

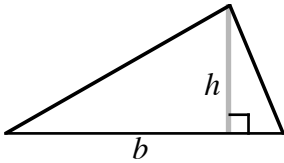
Transcendente getallen: niet-algebraïsche reële getallen

$\pi, e, \sin 1, \dots$  zijn transcendent;  $\sqrt{2}, -3 + \sqrt[5]{7}$  zijn algebraïsch

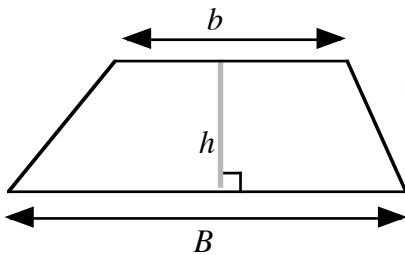
## 1. Vlakke meetkunde



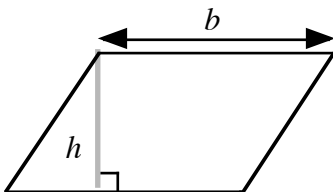
Oppervlakte rechthoek :  $A = l \cdot b$



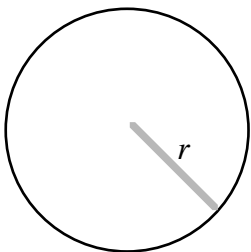
Oppervlakte driehoek :  $A = \frac{b \cdot h}{2}$



Oppervlakte trapezium :  $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$



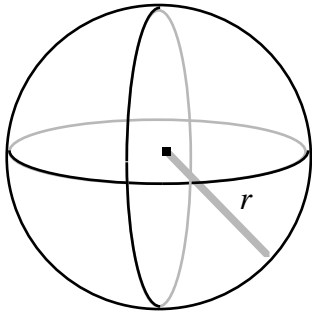
Oppervlakte parallellogram:  $A = b \cdot h$



Omtrek cirkel:  $l = 2 \cdot \pi \cdot r$

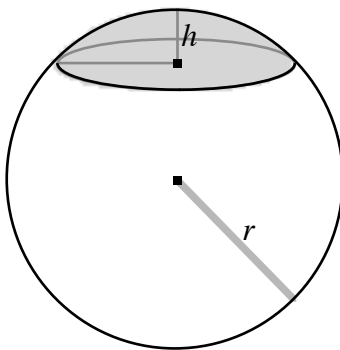
Oppervlakte cirkel:  $A = \pi \cdot r^2$

## 2. Ruimtemeetkunde



Oppervlakte bol:  $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

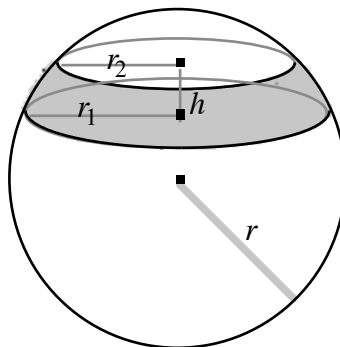
Volume bol:  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$



Bolkap: deel van boloppervlak, dat aan één kant van een (plat) snijvlak ligt.  
Bolsegment: deel van het bolvolume, begrensd door een bolkap en het grondvlak ervan. (of: deel van bolvolume, gelegen aan één kant van een snijvlak)

Oppervlakte bolkap:  $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Volume bolsegment:  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot r \mp h)$

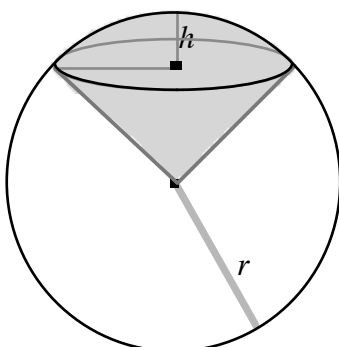


Bolgordel of bolzone: deel van boloppervlak, gelegen tussen twee evenwijdige snijvlakken..

Bolschijf: deel van het bolvolume, begrensd door een bolzone en het grond- en het bovenvlak ervan.

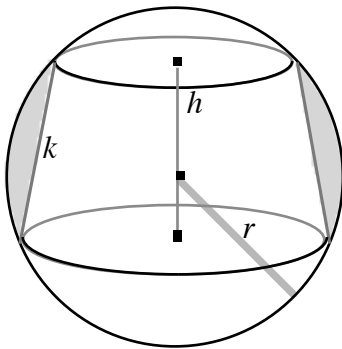
Oppervlakte bolzone:  $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Volume bolschijf:  $V = \pi \cdot \left[ r_1^2 \cdot \frac{h}{2} + r_2^2 \cdot \frac{h}{2} + \frac{h^3}{6} \right]$



Bolsector: deel van bolvolume, begrensd door een bolkap en de kegel met als top het middelpunt van de bol, en waarvan het grondvlak samenvalt met het grondvlak van de bolkap.

Inhoud bolsector:  $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$



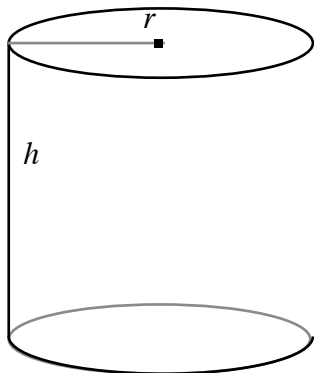
Bolschil: deel van bolvolume, gelegen binnen de bol maar buiten een kegel, waarvan de as door het middelpunt van de bol gaat, de top buiten de bol gelegen is, en het grondvlak de bol niet snijdt.

$$\text{Volume bolschil: } V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot k^2$$

Opm.: steeds geldt:  $A_G$ : oppervlakte grondvlak,  $A_B$  oppervlakte bovenvlak

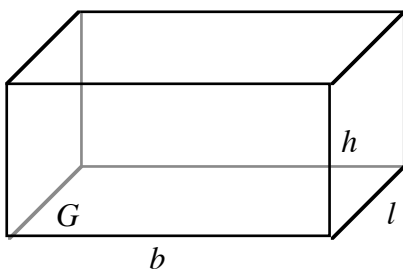
zijdelingse oppervlakte: zonder (eventueel) grondvlak of bovenvlak

manteloppervlakte: totale oppervlakte



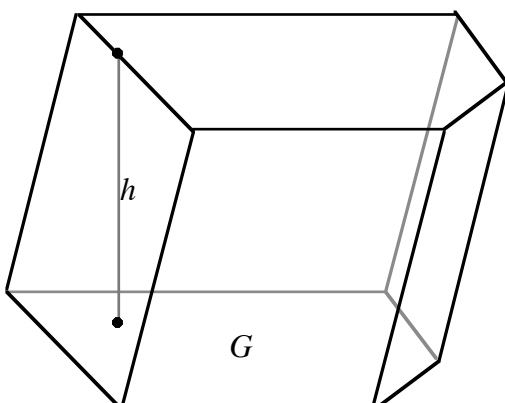
$$\begin{aligned} \text{Volume cilinder: } V &= A_G \cdot h \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$

$$\text{Manteloppervlakte: } A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

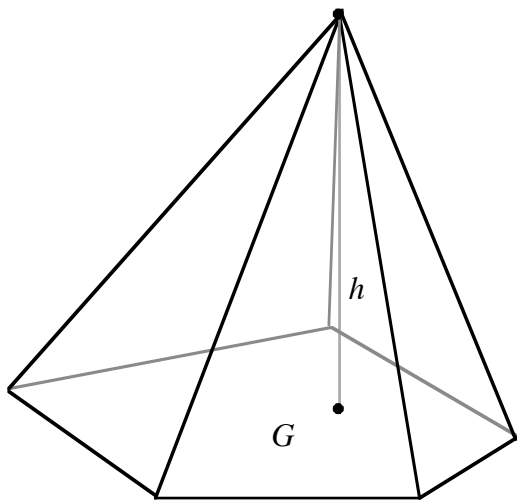


$$\begin{aligned} \text{Volume balk: } V &= A_G \cdot h \\ &= b \cdot l \cdot h \end{aligned}$$

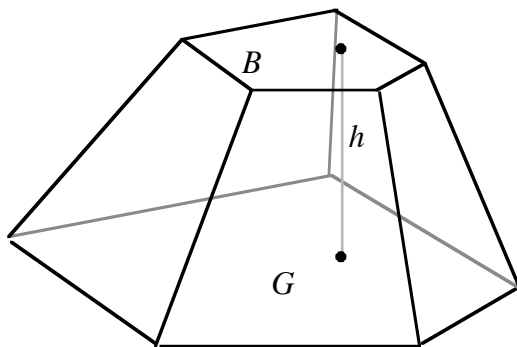
$$\text{Manteloppervlakte: } A = 2 \cdot (b \cdot l + l \cdot h + h \cdot b)$$



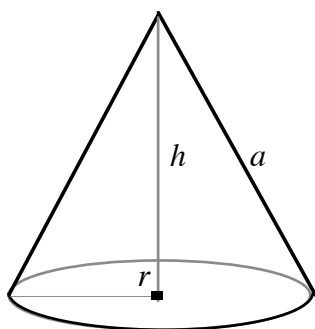
$$\text{Volume prisma (en dus ook parallellepipedum): } V = A_G \cdot h$$



Volume piramide:  $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$



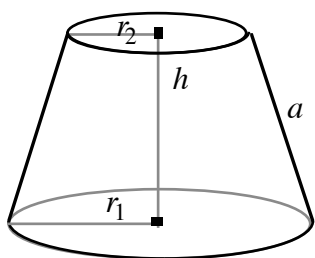
Volume afgeknotte piramide:  $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_G + A_B + \sqrt{A_G \cdot A_B})$



Volume kegel:  $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$   
 $= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Apothema:  $a = \sqrt{r^2 + h^2}$

Zijdelingse oppervlakte:  $A_z = \pi \cdot r \cdot a$



Volume afgeknotte kegel:  $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_G + A_B + \sqrt{A_G \cdot A_B})$   
 $= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2)$

$a = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

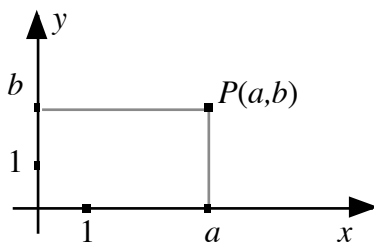
Zijdelingse oppervlakte:  $A_Z = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot a$

### 3. Analytische meetkunde

#### Coördinatenstelsels in het vlak

##### Cartesische coördinaten

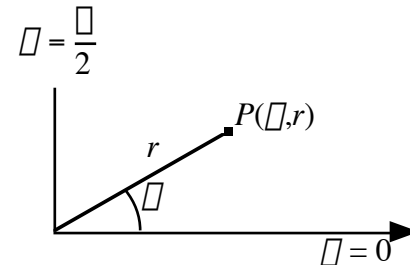
(xy orthonormaal assenstelsel)



##### Transformatieformules:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

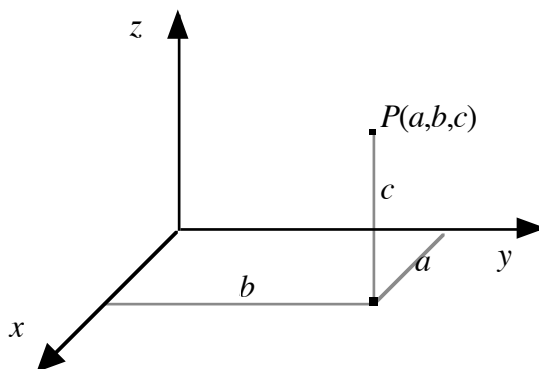
##### Poolcoördinaten



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{indien } x < 0: \varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi) \end{aligned}$$

#### Coördinatenstelsels in de ruimte

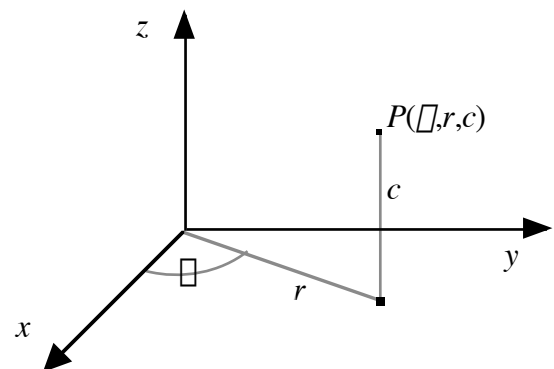
##### Cartesische coördinaten



##### Transformatieformules:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

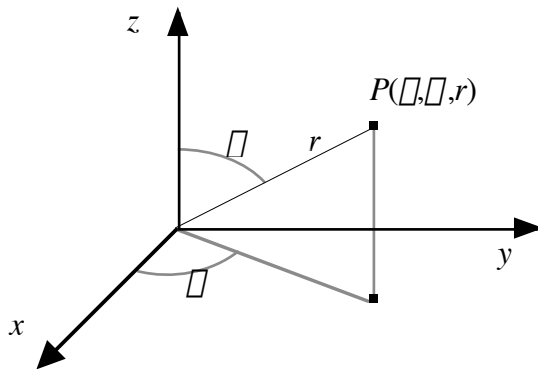
##### Cilindercoördinaten



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{indien } x < 0: \varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi) \\ z &= z \end{aligned}$$

## Bolcoördinaten

## Transformatieformules:



$$\begin{aligned}x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\z &= r \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}$$

(indien  $x < 0$ :  $\phi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ )

Opm: steeds  $0 \leq \phi < 2\pi$

## Vlakke analytische meetkunde

gegeven:  $A(x_1, y_1)$  en  $B(x_2, y_2)$

Vergelijking van rechte door A en B (met  $x_1 \neq x_2$ ):  $a \cdot y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

vergelijking van rechte door A en met richtingscoëfficiënt  $m$ :  $a \cdot y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

Scalair product:  $A \cdot B = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Norm:  $\|A\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

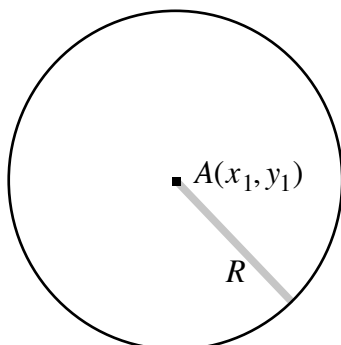
Afstand tussen 2 punten:  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Afstand van een punt tot een rechte:  $d(A, a) = \frac{|u \cdot x_1 + v \cdot y_1 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$  (met  $a: u \cdot x + v \cdot y + w = 0$ )

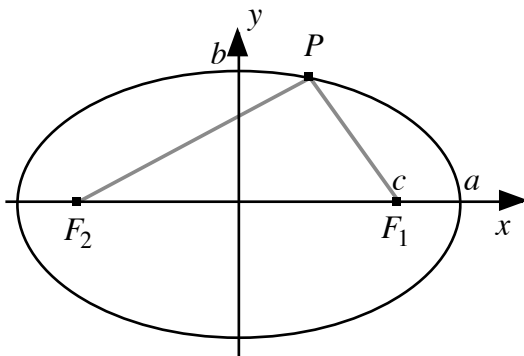
De richtingscoëfficiënt van een rechte is de tangens van de hoek die de rechte maakt met de positieve x-as.

## Kegelsneden

### Cirkel:



Vergelijking cirkel:  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$



### Ellips:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2 \cdot a$$

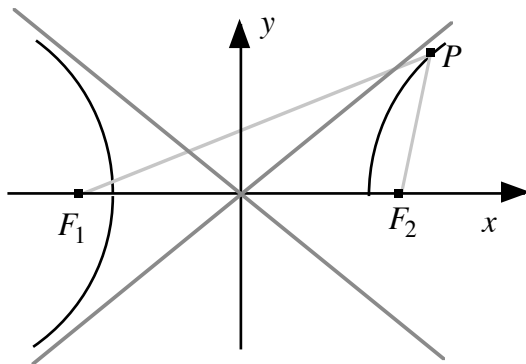
brandpunten:  $F_1(-c, 0)$  en  $F_2(c, 0)$

halve grote as:  $a$

halve kleine as:  $b$  met:  $a^2 + b^2 = c^2$

cartesische vergelijking:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

parametervergelijkingen:  $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$



### Hyperbool:

met:  $a^2 + b^2 = c^2$

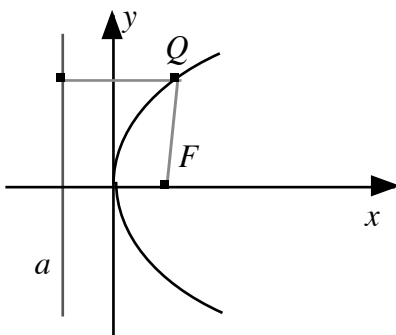
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2 \cdot a$$

brandpunten:  $F_1(-c, 0)$  en  $F_2(c, 0)$

asymptoten:  $y = \frac{b}{a} \cdot x$  en  $y = -\frac{b}{a} \cdot x$

cartesische vergelijking:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

parametervergelijkingen:  $\begin{cases} x = \pm a \cdot \cosh t \\ y = b \cdot \sinh t \end{cases}$



### Parabool

$$d(Q, a) = d(Q, F)$$

vergelijking richtlijn:  $x = \pm \frac{p}{2}$

brandpunt:  $F(\frac{p}{2}, 0)$

cartesische vergelijking:  $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$

parametervergelijkingen:  $\begin{cases} x = 2 \cdot p \cdot t^2 \\ y = 2 \cdot p \cdot t \end{cases}$

## 4. Algebra

als  $a \in \mathbb{R}_0$ , en  $n$  en  $m \in \mathbb{Z}$ , dan geldt:

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

voor  $a \in \mathbb{R}^+$ , en  $n \in \mathbb{N}_0$ , en  $n$  **even**, geldt:

$$b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a \text{ en } b \geq 0$$

voor  $a \in \mathbb{R}$ , en  $n \in \mathbb{N}_0$ , en  $n$  **oneven**, geldt:

$$b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a$$

We gebruiken volgende notaties:

als  $a \in \mathbb{R}$ , en  $n \in \mathbb{N}_0$  noteren we:  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

als  $a \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  en  $n \in \mathbb{N}_0$  noteren we:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^m$

als  $a \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  en  $n \in \mathbb{N}_0$  noteren we:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

als  $a \in \mathbb{R}_0^+$ , en  $n$  en  $m \in \mathbb{Q}$ , dan geldt: (zoals hierboven bij gehele machten)

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Opm: bovenstaande formules blijven gelden met **reële** machten; zie verder bij **exponentiële functie**.

Opgepast; deze formules gelden NIET als  $a < 0$ :

zo is  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ , maar  $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$ , en  $\sqrt[3]{-1} = -1$

## Machten van een som

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

De coëfficiënten voor  $(a+b)^n$  vinden we in de n-de rij van de driehoek van Pascal:

|  |   |   |   |   |    |   |    |   |    |   |   |  |   |
|--|---|---|---|---|----|---|----|---|----|---|---|--|---|
|  |   |   | 1 |   | 1  |   |    |   |    |   |   |  |   |
|  |   | 1 |   | 2 |    | 1 |    |   |    |   |   |  |   |
|  |   | 1 |   | 3 |    | 3 |    | 1 |    |   |   |  |   |
|  |   | 1 |   | 4 |    | 6 |    | 4 |    | 1 |   |  |   |
|  | 1 |   | 5 |   | 10 |   | 10 |   | 5  |   | 1 |  |   |
|  | 1 |   | 6 |   | 15 |   | 20 |   | 15 |   | 6 |  | 1 |

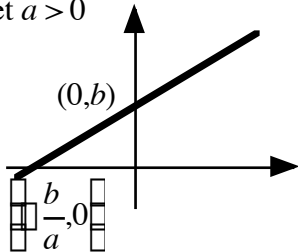
## Eerste- en tweedegraadsfuncties

$$y = a.x + b$$

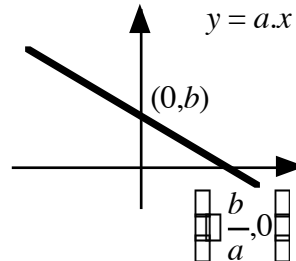
\* Nulpunten:  $x_0 = -\frac{b}{a}$

\* Grafiek:

$y = a.x + b$ , met  $a > 0$



$y = a.x + b$ , met  $a < 0$



\* Tekenverloop:

$a > 0$

|     |   |                |   |
|-----|---|----------------|---|
| $x$ |   | $-\frac{b}{a}$ |   |
| $y$ | - | 0              | + |

$a < 0$

|     |   |                |   |
|-----|---|----------------|---|
| $x$ |   | $-\frac{b}{a}$ |   |
| $y$ | + | 0              | - |

$$y = a.x^2 + b.x + c$$

\* Nulpunten: stel  $D = b^2 - 4ac$

\*  $D > 0$ : 2 nulpunten:  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  en  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

\*  $D = 0$ : 1 dubbel nulpunt:  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

\*  $D < 0$ : geen reële nulpunten. (voor complexe nulpunten: zie verder.)

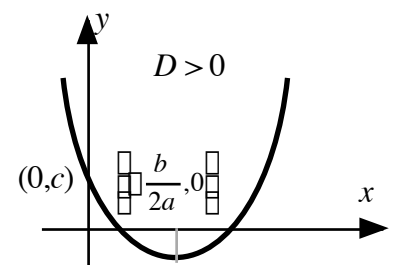
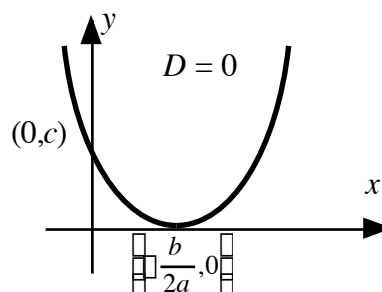
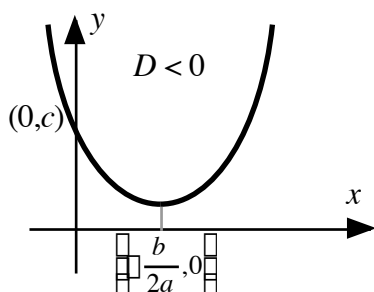
\* (met  $D \geq 0$ ): som der wortels:  $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

product der wortels:  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

\* Ontbinding in factoren: (als  $D \geq 0$ , dan)  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

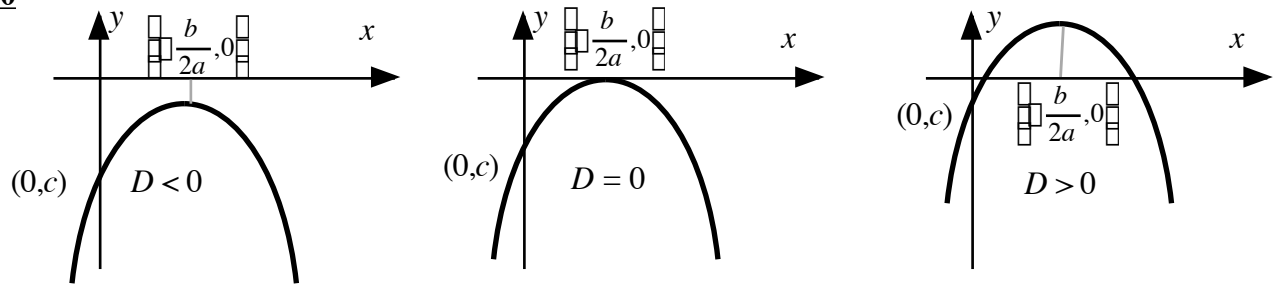
\* Grafiek

$a > 0$





$a < 0$



\* Tekenverloop

|         | <u><math>a &gt; 0</math></u>                                                             | <u><math>a &lt; 0</math></u>                                                             |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $D < 0$ | $\begin{array}{c c} x & \\ \hline y & + \end{array}$                                     | $\begin{array}{c c} x & \\ \hline y & - \end{array}$                                     |
| $D = 0$ | $\begin{array}{c cccc} x & & \frac{b}{2a} & & \\ \hline y & + & 0 & + \end{array}$       | $\begin{array}{c cccc} x & & \frac{b}{2a} & & \\ \hline y & - & 0 & - \end{array}$       |
| $D > 0$ | $\begin{array}{c ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline y & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$ | $\begin{array}{c ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline y & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$ |

### Tekenverloop rationale functie

voorbeeld:  $f(x) = \frac{(x-1)(5-3x)(x^2+9)}{x^2-5x+6}$

| x              |   | 1 |   | $\frac{5}{3}$ |   | 2 |   | 3 |   |
|----------------|---|---|---|---------------|---|---|---|---|---|
| $x - 1$        | - | 0 | + | +             | + | + | + | + | + |
| $5 - 3x$       | + | + | + | 0             | - | - | - | - | - |
| $x^2 + 9$      | + | + | + | +             | + | + | + | + | + |
| $x^2 - 5x + 6$ | + | + | + | +             | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$         | - | 0 | + | 0             | - | / | + | / | - |

## Nulpunten van willekeurige derdegraadsfunctie

Vergelijking:  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Stel:  $Q = \frac{3b - a^2}{9}$  en  $R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad \text{en} \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= S + T - \frac{1}{3}a \\ \text{dan zijn de wortels:} \quad x_2 &= -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \end{aligned}$$

Als  $a, b$  en  $c$  reëel zijn, en met  $D = Q^3 + R^2$  dan geldt:

als  $D > 0$  dan is één wortel reëel en zijn de andere twee complex toegevoegd,

als  $D = 0$  dan zijn alle wortels reëel en zijn er minstens twee gelijke wortels,

als  $D < 0$  dan zijn er drie verschillende reële wortels.

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

$$P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = b$$

## Het getal e:

Volgende definities zijn gelijkwaardig:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

opm:  $e \approx 2,718$

## Exponentiële functie

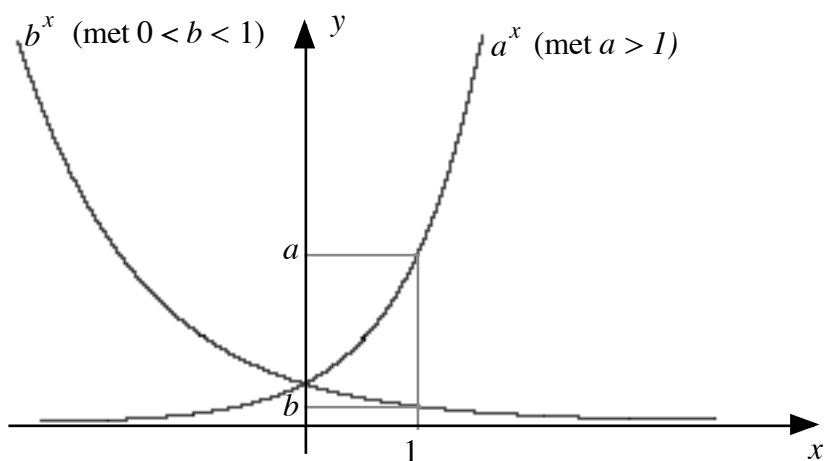
voor  $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$  :  $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x$

**Rekenregels** (met  $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$



## Logaritmische functie

voor  $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$  :  $\log_a : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x$  **Opm.:** Men gebruikt ook  ${}^a\log x$

voor  $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^+$  geldt:  $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Men noteert  $\log x$  voor  $\log_{10} x$ , en  $\ln x$  voor  $\log_e x$

### rekenregels

$$x = a^{\log_a x}$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

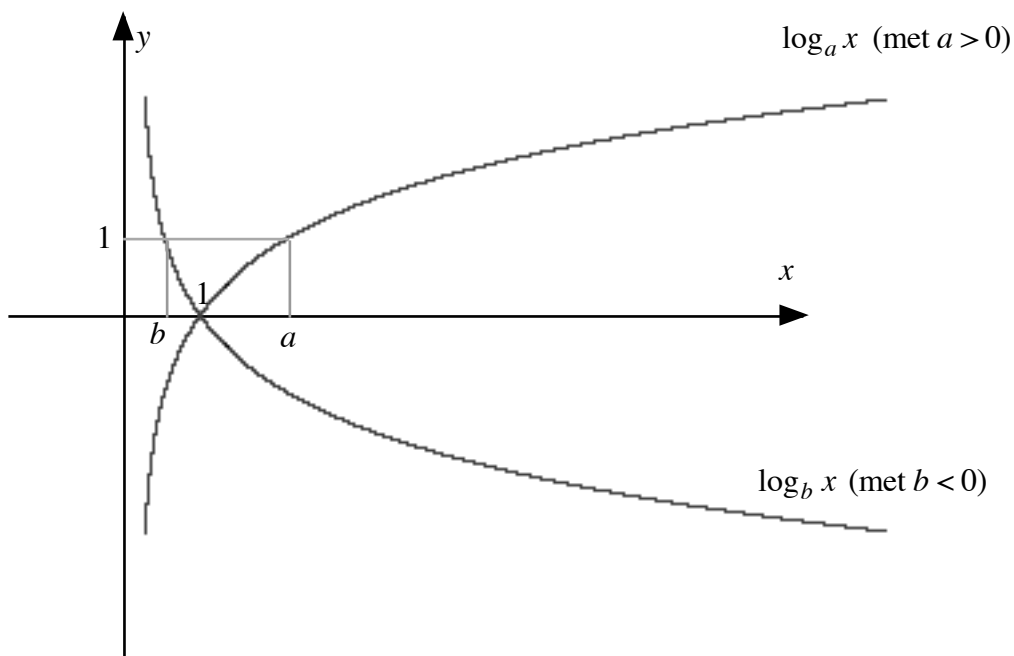
$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$



~~$$\log(a + b) = (\log a)(\log b)$$~~

~~$$\log(a \cdot b) = \frac{\log a}{\log b}$$~~

~~$$(\log a)^n = n \log a$$~~

gelden alleen in de verbeelding

van (slecht geïnspireerde) studenten

## 5. Determinanten

- \* Een determinant verandert niet van waarde, indien men hem spiegelt t.o.v. de hoofddiagonaal.
- \* Wanneer men twee rijen (of twee kolommen) van plaats verwisselt, verandert de determinant van teken.
- \* Wanneer men alle elementen van één kolom (of van één rij) met eenzelfde getal vermenigvuldigt, dan wordt de determinant met dat getal vermenigvuldigd.
- \* Een determinant waarvan de overeenkomstige elementen van twee kolommen (of van twee rijen) evenredig zijn, is gelijk aan nul.
- \* Een determinant verandert niet van waarde, indien men bij de elementen van een rij (of kolom) een veelvoud van de overeenkomstige elementen van een andere rij (of kolom) optelt.
- \* Minor:  $M_{ij}$ : de nieuwe determinant die men bekomt door de i-de rij en de j-de kolom te schrappen.
- \* Cofactor:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Schema voor berekening:  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

\* Berekening volgens regel van Sarrus:  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

- \* Algemene berekening: ontwikkeling volgens een rij (of volgens een kolom):

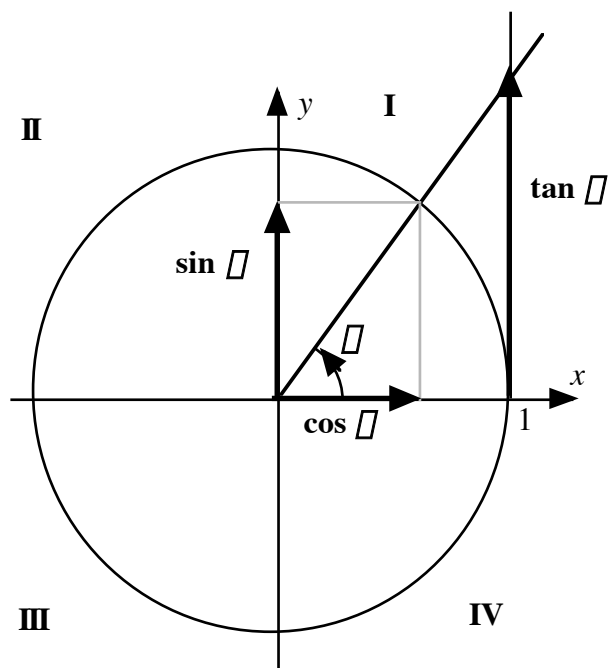
$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & -5 \\ 2 & 6 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -3 & -7 \\ 4 & 8 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 5(1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & -7 \\ 4 & -4 & -8 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & -3 & -7 \\ 4 & -4 & -8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & -6 \\ 4 & -4 & -8 \end{vmatrix} + 8(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

verdere berekening: sarrus of verder ontwikkelen naar een rij of kolom.

## 6. Goniometrie

### Meetkundige voorstelling van goniometrische getallen



**Goniometrische cirkel:** middelpunt (0,0); straal 1, hoeken gemeten vanaf pos.  $x$ -as in tegenwijzerzin.

I, II, III, IV: 1-ste, 2-de, 3-de en 4-de kwadrant.

$\sin \alpha$ : 2-de coördinaat van beeldpunt op gon. cirkel.

$\cos \alpha$ : 1-ste coördinaat van beeldpunt op gon. cirkel.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{andere afkorting: } \operatorname{tg} \alpha)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{ook: } \operatorname{csc} \alpha)$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{ook: } \operatorname{cotan} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha \text{ of } \operatorname{cotg} \alpha)$$

### Afspraken voor notaties:

\*  $(\sin \alpha)^2$  noteren we als:  $\sin^2 \alpha$

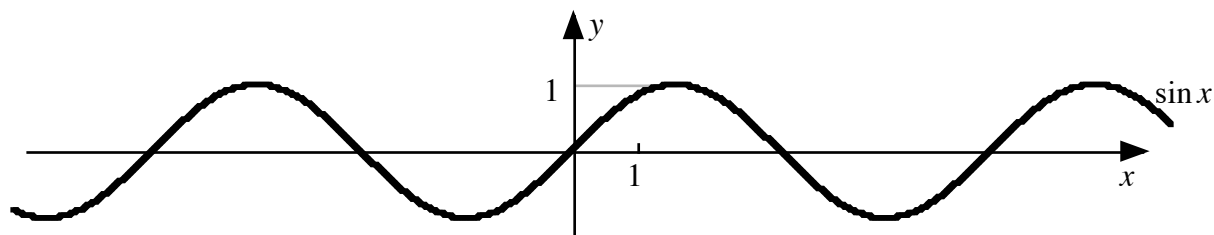
\*  $\sin(2\alpha)$  noteren we als:  $\sin 2\alpha$

\*  $(\sin \alpha)(\cos \alpha)$  noteren we als:  $\sin \alpha \cos \alpha$  (en dit verschilt van  $\sin(\alpha \cos \alpha)$ )

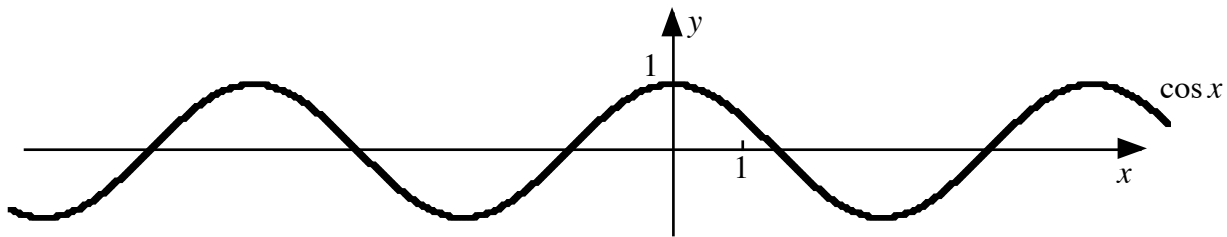
\* en natuurlijk verschilt  $\sin(2 + \alpha)$  van  $\sin 2 + \alpha$ .

### Goniometrische functies

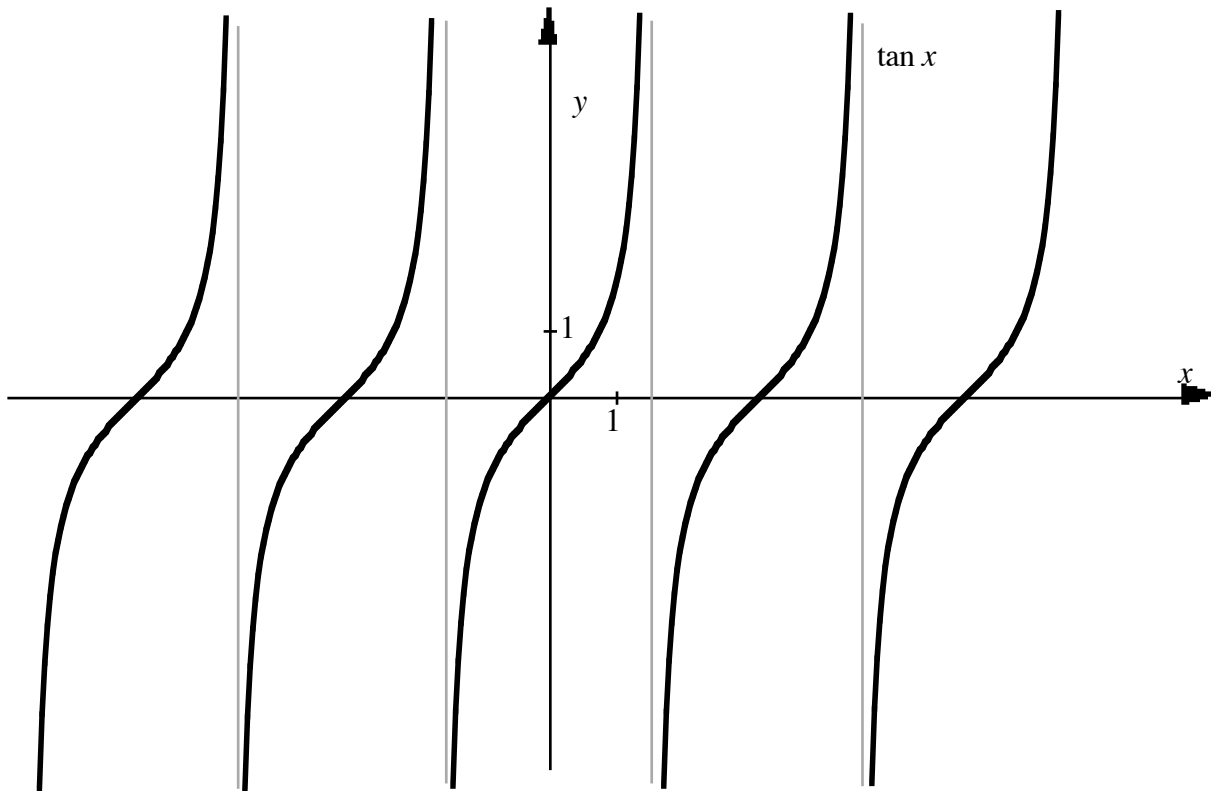
$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin x$



$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos x$$



$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan x$$

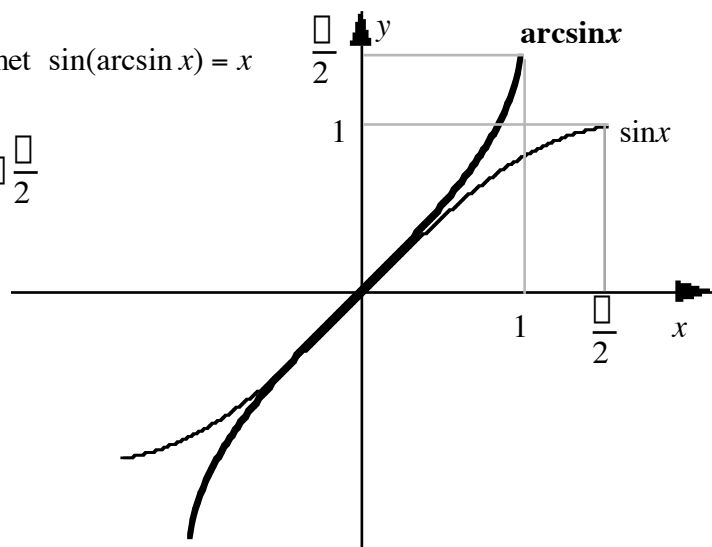


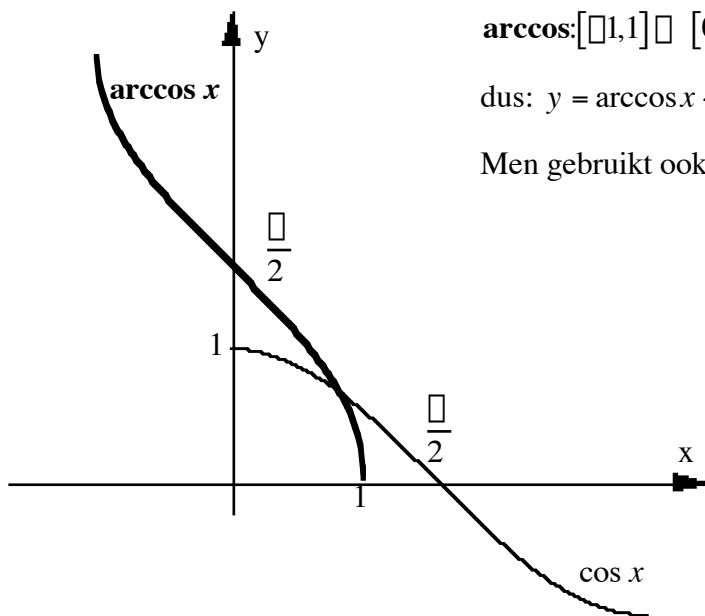
### Cyclometrische functies

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : x \mapsto \arcsin x \quad \text{met } \sin(\arcsin x) = x$$

$$\text{dus: } y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \quad \text{met } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Men gebruikt ook  $\arcsin x$





**arccos:**  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ :  $x \mapsto \arccos x$  met  $\cos(\arccos x) = x$

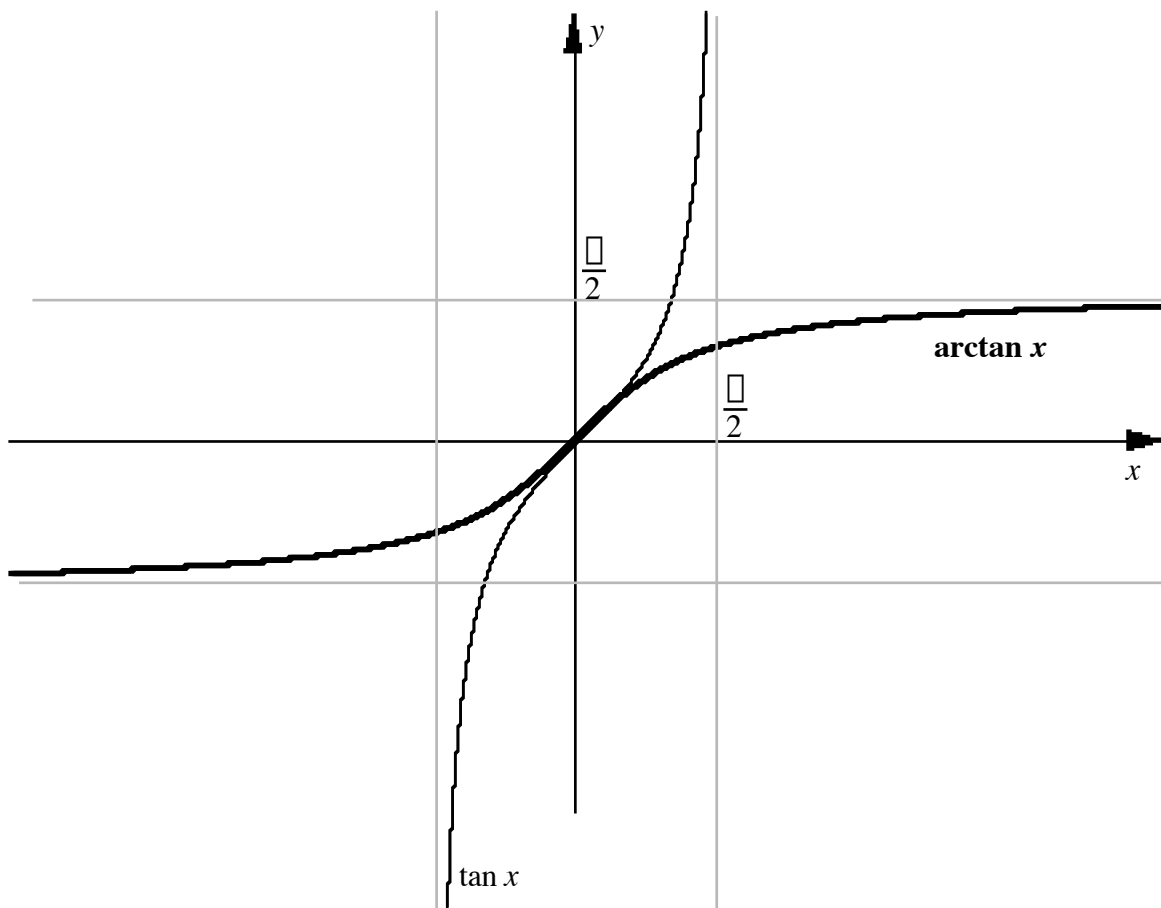
dus:  $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \quad 0 \leq y \leq \pi$

Men gebruikt ook  $\text{brcos } x$

**arctan:**  $\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$   $x \mapsto \arctan x$  met  $\tan(\arctan x) = x$

dus:  $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Andere notaties:  $\text{arctg } x$ ,  $\text{bgtan } x$ ,  $\text{bgtg } x$ .



**basisformules**

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$1 + \tan^2 \varphi = \sec^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$1 + \cot^2 \varphi = \operatorname{cosec}^2 \varphi = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

**formules voor verwante hoeken** (met  $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\sin(\varphi + 2k\pi) = \sin \varphi$$

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$$

$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi$$

$$\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos \varphi$$

$$\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$$

$$\cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi$$

$$\tan(\varphi + k\pi) = \tan \varphi$$

$$\tan(\pi - \varphi) = -\tan \varphi$$

$$\tan(\pi + \varphi) = \tan \varphi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot \varphi$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \varphi$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot \varphi$$

**Bijzondere waarden en tekenverloop**

| //             | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin \varphi$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \varphi$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \varphi$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | /               |

| //             | 0 | 1 | $\frac{\pi}{2}$ | II | $\pi$ | III | $\frac{3\pi}{2}$ | IV | $2\pi$ |
|----------------|---|---|-----------------|----|-------|-----|------------------|----|--------|
| $\sin \varphi$ | 0 | + | 1               | +  | 0     | -   | -1               | -  | 0      |
| $\cos \varphi$ | 1 | + | 0               | -  | -1    | -   | 0                | +  | 1      |
| $\tan \varphi$ | 0 | + | /               | -  | 0     | +   | /                | -  | 0      |

**Som- en verschilformules**

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi$$

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi$$

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi$$

$$\tan(\varphi + \psi) = \frac{\tan \varphi + \tan \psi}{1 - \tan \varphi \tan \psi}$$

$$\tan(\varphi - \psi) = \frac{\tan \varphi - \tan \psi}{1 + \tan \varphi \tan \psi}$$

## Simpson

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

## Formules voor de dubbele hoek

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

## Formules voor de halve hoek

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

## Tangensformules

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

## Oplossen van goniometrische basisvergelijkingen

$$\sin x = \sin \alpha \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \text{(met } k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = \cos \alpha \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \text{(met } k \in \mathbb{Z})$$

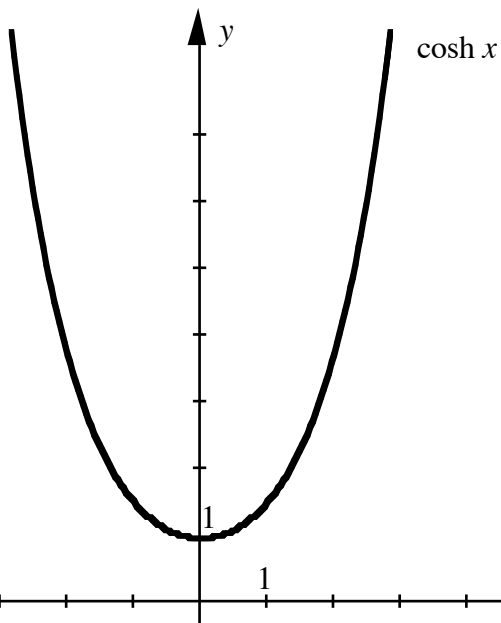
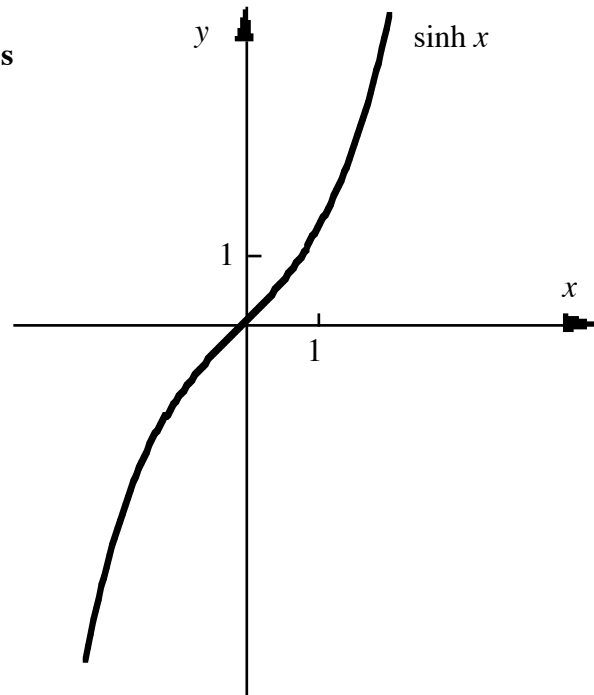
$$\tan x = \tan \alpha \quad x = \alpha + k\pi \quad \text{(met } k \in \mathbb{Z})$$

## 7. Hyperbolische functies

### Hyperbolische sinus of sinus hyperbolicus

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(Andere afkorting: sh  $x$ )



### Hyperbolische cosinus of cosinus hyperbolicus

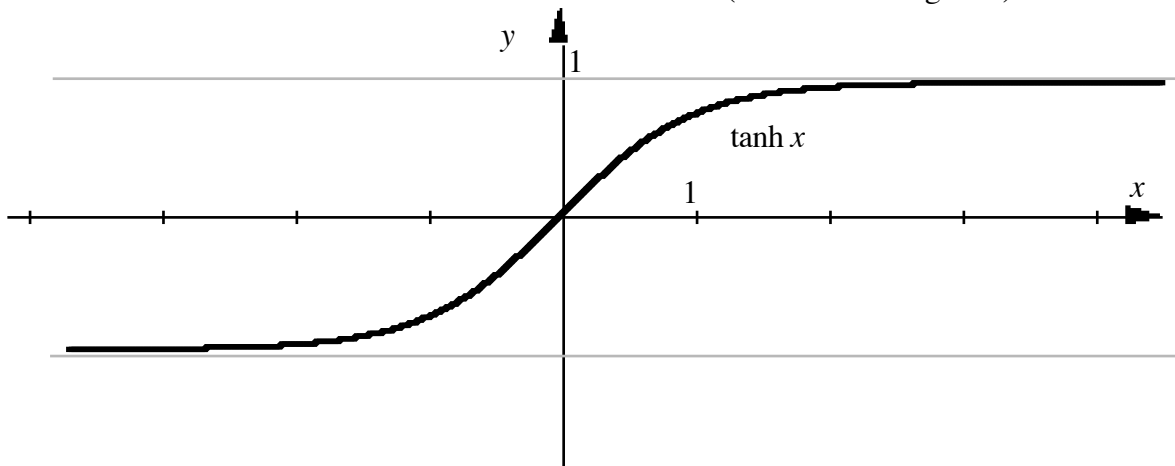
$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty) : x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(Andere afkorting: ch  $x$ )

$$\tanh x: \mathbb{R} \rightarrow ]-1,1[ : x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

**hyperbolische tangens of tangenshyperbolicus**

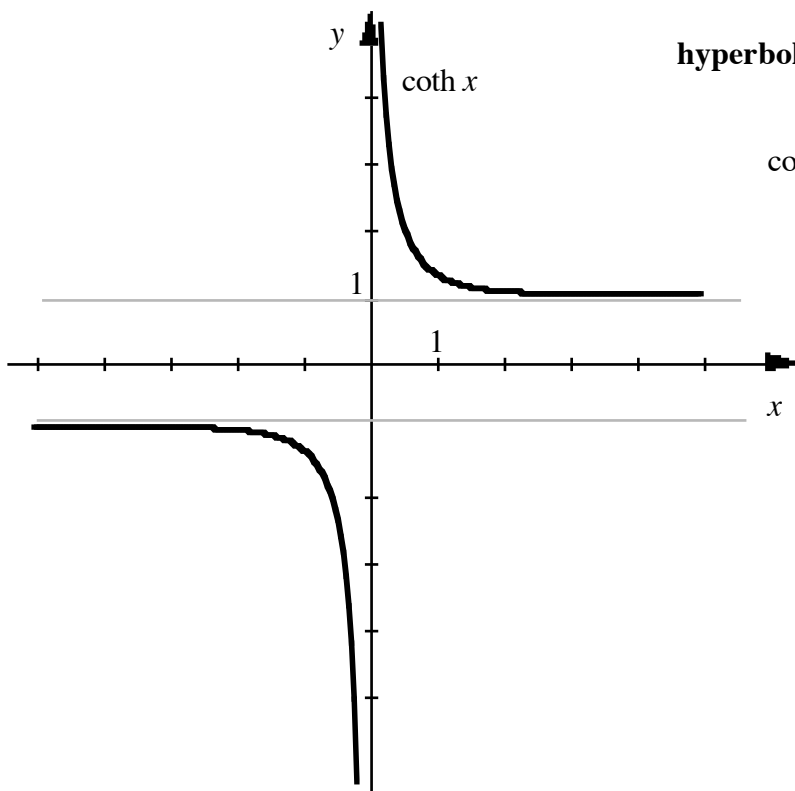
(andere afkorting:  $\text{th } x$ )



**hyperbolische cotangens of cotangenshyperbolicus**

$$\coth x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus ]-1,1[ : x \mapsto \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

(andere afkorting:  $\text{cth } x$  of ook  $\text{cotanh } x$ )



## formules

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh 2x + 1 = 2 \cosh^2 x$$

$$(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh nx - \sinh nx$$

$$\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

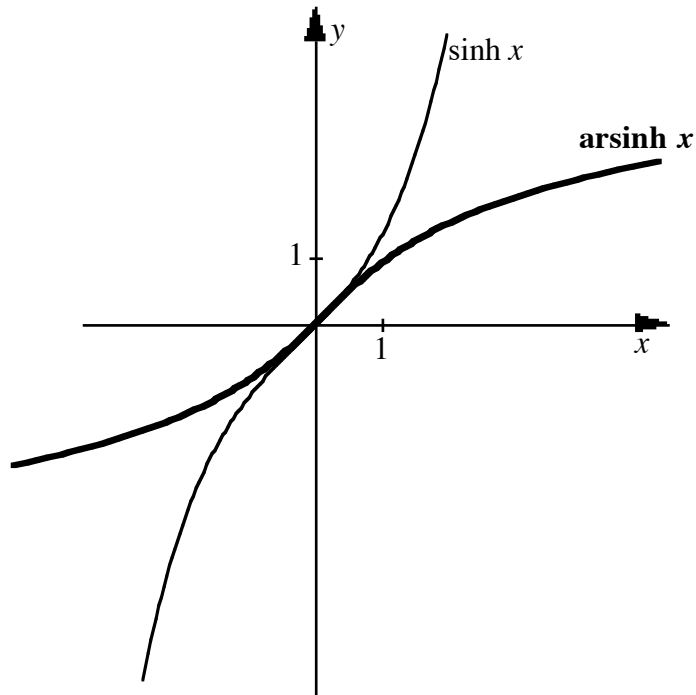
$$\cosh 2x - 1 = 2 \sinh^2 x$$

## Inverse functies

$$\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{arsinh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

**argument sinus hyperbolicus**

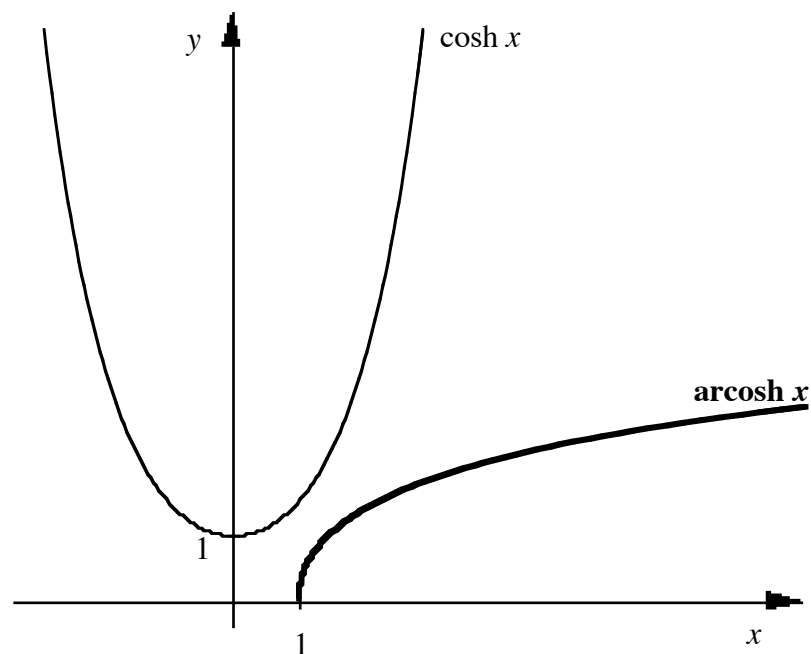
Men noteert ook:  $\operatorname{argsinh} x$ ,  $\operatorname{argsh} x$  en  $\operatorname{arsh} x$ .

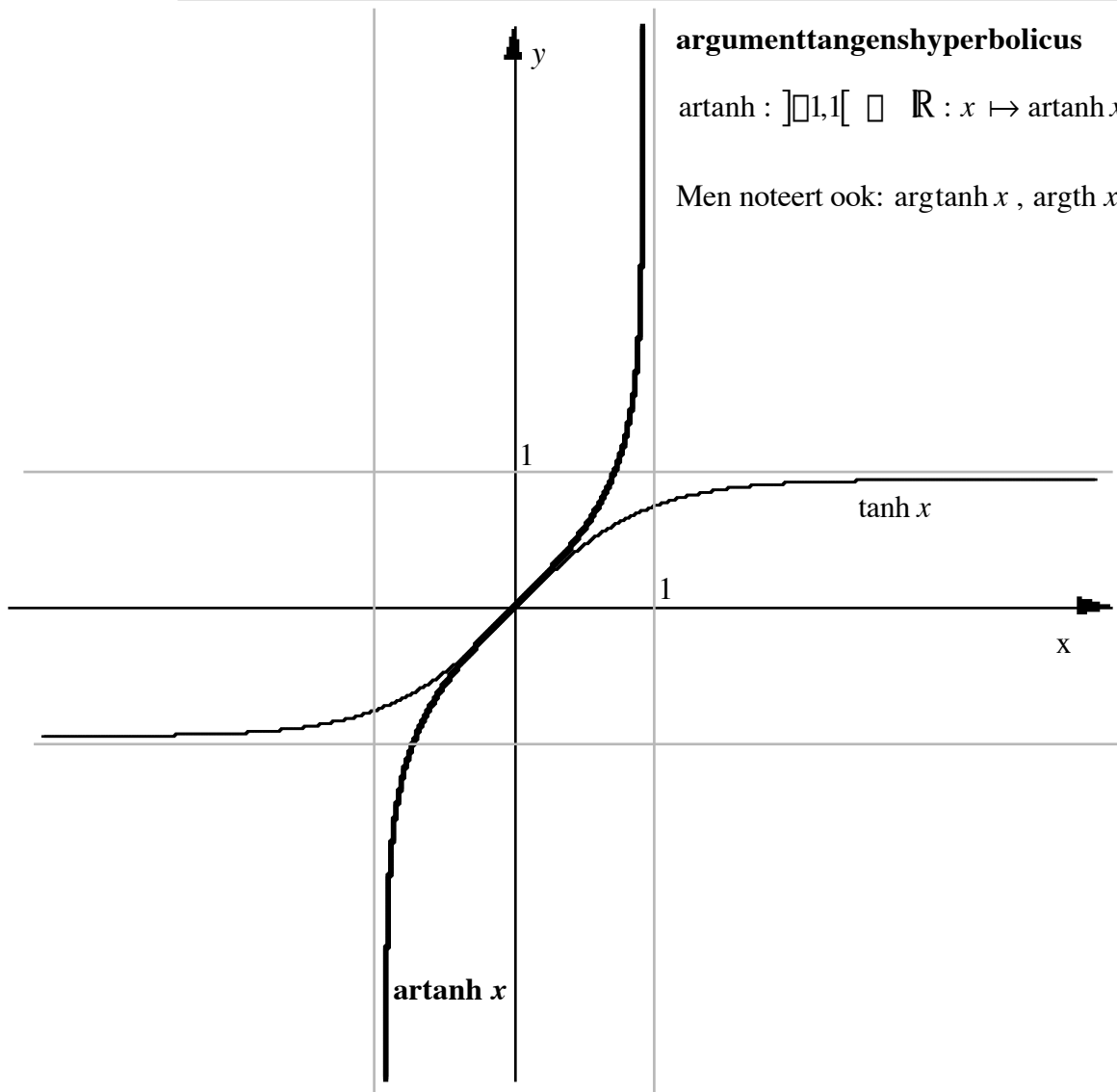


$$\operatorname{arcosh}: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \operatorname{arcosh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

**argument cosinus hyperbolicus**

Men noteert ook:  $\operatorname{argcosh} x$ ,  $\operatorname{argch} x$  en  $\operatorname{arch} x$ .

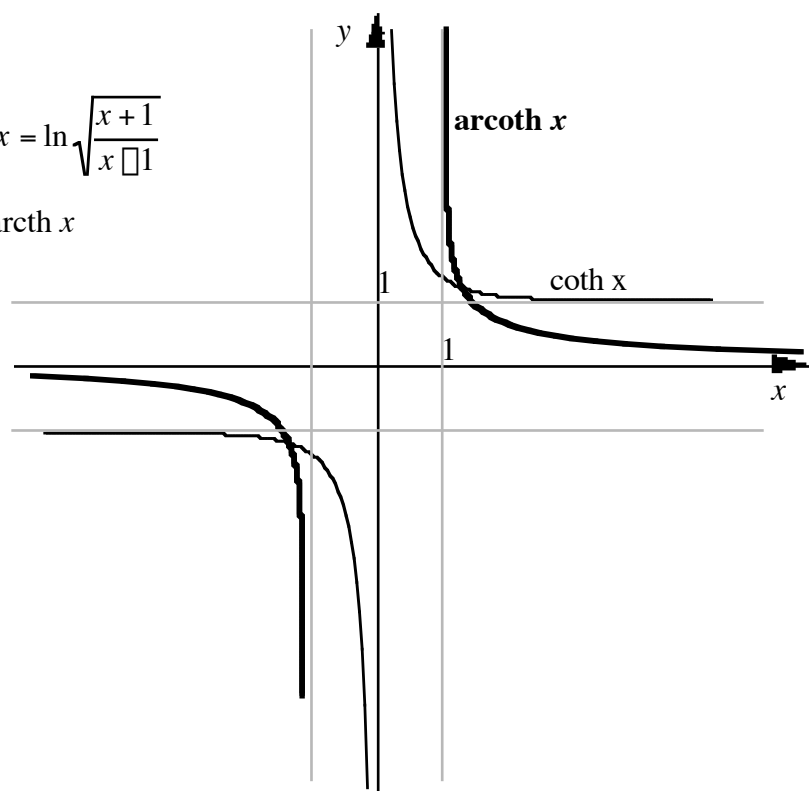




**argumentcotangenshyperbolicus**

$$\operatorname{arcoth} : \mathbb{R} \setminus ]-1,1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{arcoth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Men noteert ook:  $\operatorname{argcoth} x$ ,  $\operatorname{argcth} x$  en  $\operatorname{arch} x$



## 8. Complexe getallen

$\sqrt{-1} = i$  (men gebruikt ook  $j$  als imaginaire eenheid)

met  $z = a + bi$  :  $\operatorname{Re}(z) = a$  (reële deel)

$\operatorname{Im}(z) = b$  (imaginaire deel) dus  $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$

$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$  (modulus)

$a = \arg(z) \Leftrightarrow 0 < \varphi < 2\pi$   $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  ((hoofdwaarde van) argument)

(alle argumenten:  $\varphi + 2k\pi$  met  $k \in \mathbb{Z}$ )

$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  (goniometrische vorm)

$e^{k(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = e^{k+i\varphi}$  (definitie van Euler)

$z = e^{\ln|z| + i\varphi} = |z| \cdot e^{i\varphi}$  (exponentiële vorm)

$\bar{z} = a - bi$  (complex toegevoegde)

$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n \cdot e^{in\varphi}$  (voor gehele machten)

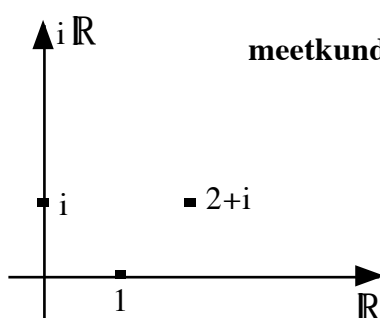
$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right] = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n} i}$

(geeft, voor  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , de  $n$ -demachtswortels uit  $z$ ;  $\sqrt[n]{z} = w_0$ )

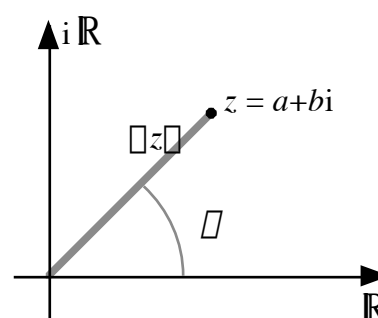
met  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$  en  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1| |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$



meetkundige voorstelling



$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\sin iz = i \sinh z$$

$$\sinh iz = i \sin z$$

$$\sin(a + bi) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cos iz = \cosh z$$

$$\cosh iz = \cos z$$

$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (\text{logaritmische functie})$$

$$\text{Ln} z = \ln z + 2k\pi i = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (\text{met } k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{inverse relatie van exponentiële functie})$$

$$\text{Opm: } \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad \text{voor een } k \in \mathbb{Z} \quad (\text{met } k = 0 \text{ als } z_1 \text{ en } z_2 \in \mathbb{R})$$

### Opm.: Complexe machten

$$(\text{met } u \text{ en } z \in \mathbb{C}): u^z = e^{\ln u^z} = e^{z \ln u}$$

$$\text{voorbeeld: } i^i = e^{i \ln i} = e^{i \left( \ln 1 + i \frac{\pi}{2} \right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

### Opm.: Complexe nulpunten van reële tweedegraadsfunctie

$$\text{Neem } y = ax^2 + bx + c \text{ met } a, b \text{ en } c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Dan wordt: } D = b^2 - 4ac.$$

$$\text{Als dan } D < 0, \text{ dan zijn de nulpunten: } x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

## 9. Analyse

### Afgeleide in een punt

\*  $f: \text{dom}f \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$

indien  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$  bestaat in  $\mathbb{R}$ , dan noemen we deze limiet: “**de afgeleide van  $f$  in  $a$** ”.

we noemen  $f$  dan “**afleidbaar in  $a$** ” of ook “**differentieerbaar in  $a$** ”.

We noteren:  $f'(a)$ ,  $Df(a)$  of  $\frac{df}{dx}(a)$

of, met  $y = f(x)$ :  $y'(a)$ ,  $Dy(a)$  of  $\frac{dy}{dx}(a)$ .

### Afgeleide functie of afgeleide

\*  $A \subseteq \mathbb{R}$ : de verzameling van de punten waar  $f$  afleidbaar is.

$f': A \subseteq \text{dom}f \subseteq \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$  noemen we “**de afgeleide functie van  $f$** ”  
of kortweg: “**de afgeleide van  $f$** ”

We noteren:  $f'(x)$ ,  $Df(x)$  of  $\frac{df(x)}{dx}$  of zelfs  $f'$ ,  $Df$  of  $\frac{df}{dx}$

### Partiële afgeleide in een punt

\*  $f: \text{dom}f \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ , met  $(a, b)$  een inwendig punt van  $\text{dom}f$ :

indien  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$  bestaat in  $\mathbb{R}$ , dan noemen we deze limiet:

“**de partiële afgeleide van  $f$  naar  $x$  in het punt  $(a, b)$** ” en we noteren  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

indien  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$  bestaat in  $\mathbb{R}$ , dan noemen we deze limiet:

“**de partiële afgeleide van  $f$  naar  $y$  in het punt  $(a, b)$** ” en we noteren  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

### Partiële afgeleide

$\frac{\partial f}{\partial x}: A \subseteq \text{dom}f \subseteq \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  noemen we “**de partiële afgeleide van  $f$  naar  $x$** ”  
 $\frac{\partial f}{\partial y}: A \subseteq \text{dom}f \subseteq \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  noemen we “**de partiële afgeleide van  $f$  naar  $y$** ”

## Totale differentiaal

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \quad \text{noemen we "de totale differentiaal van f"}$$

$$\text{korter: } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

## Afgeleide van een samengestelde functie van één veranderlijke

\*  $f(x) = f(u(x), v(x))$ :  $f$  is een samengestelde functie in één veranderlijke.

$$Df = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}$$

## Totale differentiaal en partiële afgeleiden van een samengestelde functie van twee veranderlijken

\*  $f(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ :  $f$  is een samengestelde functie van twee veranderlijken.

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

met

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

en

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

## Rekenregels voor afgeleiden en differentialen ( $a \in \mathbb{R}$ )

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(fg) = fDg + gDf$$

$$D(af) = aDf$$

$$D(fgh) = fgDh + fhDg + ghDf$$

$$Df^n = nf^{n-1}Df$$

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

$$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$D\frac{f}{g} = \frac{gDf - fDg}{g^2}$$

$$D\sin x = \cos x$$

$$D\cos x = -\sin x$$

$$D\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$D\sec x = \sec x \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$D\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$D\sinh x = \cosh x$$

$$D\cosh x = \sinh x$$

$$D\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$D\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$D\operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$D\operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D\operatorname{artanh} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$D\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$D\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$D\ln x = \frac{1}{x}$$

$$Da^x = a^x \ln a$$

$$De^x = e^x$$

als  $z = f^g$ , dan:

$$* Dz = \frac{\partial z}{\partial f} Df + \frac{\partial z}{\partial g} Dg = g f^{g-1} Df + f^g (\ln f) Dg$$

$$* \ln z = g \ln f, \text{ dus: } \frac{1}{z} Dz = g \frac{1}{f} Df + (\ln f) Dg$$

$$* z = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}, \text{ dus: } Dz = e^{g \ln f} \left( g \frac{1}{f} Df + (\ln f) Dg \right)$$

als  $f = f(u(x))$ , dan: (kettingregel)

$$Df = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

**voorbeelden:**

$$D \sin^5 3x = 5 \sin^4 3x \cdot D \sin 3x = 5 \sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot D 3x = 5 \sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot 3$$

$$d \arcsin(\ln(x + 4^x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln(x + 4^x))^2}} \cdot \frac{1}{x + 4^x} (1 + 4^x (\ln 4)) dx$$

$$d(x + y)^{\sin xy} = \sin xy (x + y)^{\sin xy - 1} (dx + dy) + (x + y)^{\sin xy} (\ln(x + y)) \cos(xy) (y dx + x dy)$$

## Rekenregels voor integralen

$$\int df(x) = f(x) + C$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{Partiële integratie})$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{met } n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^k} = \frac{x}{2(k-1)(1+x^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{k-1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right| + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{2x - \sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} dx$$



$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x dx$$

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$\text{als } \tan \frac{\varphi}{2} = t, \text{ dan: } \sin \varphi = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan \varphi = \frac{2t}{1-t^2} \quad d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}$$

### Splitsen in partiëlebreuken

$$\text{voor } f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)(x-b)^n(x^2+px+q)(x^2+kx+l)^m}$$

met:  $\text{graad}(T) < \text{graad}(N)$   
 N niet verder te ontbinden  
 de breuk niet verder te vereenvoudigen

bestaan er coëfficiënten, zodat :

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{E_1x+F_1}{x^2+kx+l} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+kx+l)^2} + \dots + \frac{E_mx+F_m}{(x^2+kx+l)^m}$$

De coëfficiënten kunnen we vinden met volgende formules of met de methode der onbepaalde coëfficiënten.

$$A = \frac{g(x)}{N_{A(x)}} \Big|_{x=a} \quad B_{n-k} = \frac{1}{k!} D^{(k)} \left[ \frac{g(x)}{N_{B(x)}} \right] \Big|_{x=b} \quad (\text{met } k = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$(\varphi + \varphi h)C + D = \frac{g(x)}{N_{C(x)}} \Big|_{x=(\varphi + \varphi h)} \quad (\varphi + \varphi h)E_{m-k} + F_{m-k} = \frac{1}{k!} D^{(k)} \left[ \frac{g(x)}{N_{E(x)}} \right] \Big|_{x=(\varphi + \varphi h)} \quad (\text{met } k = 0, 1, \dots, m-1)$$

Telkens wordt een nulpunt van de noemer ingevuld.  $N_K$  staat voor de veelterm die we bekomen door in de gegeven noemer de factor die 0 wordt weg te laten.

**voorbeeld:**

$$f(x) = \frac{2x - 5}{(x - 1)(6 - 3x)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{6 - 3x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

**1° manier**

$$A = \frac{2x - 5}{(6 - 3x)(x^2 + 1)} \Big|_{x=1} = \frac{-3}{6} \quad B = \frac{2x - 5}{(x - 1)(x^2 + 1)} \Big|_{x=2} = \frac{-1}{5}$$

$$Ci + D = \frac{2i - 5}{(i - 1)(6 - 3i)} = \frac{2i - 5}{-3 + 9i} = \frac{(2i - 5)(-3 - 9i)}{9 + 81} = \frac{33}{90} + \frac{39}{90}i$$

**2° manier**

Op gelijke noemer brengen en noemer wegwerken, geeft:

$$2x - 5 = A(6 - 3x)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)(6 - 3x)$$

uitgewerkt:  $(-3A + B - 3C)x^3 + (6A - B + 9C - 3D)x^2 + (-3A + B - 6C + 9D)x + 6A - B - 6D$   
dit levert volgend stelsel: (Coëfficiënten van overeenkomstige termen gelijkstellen)

$$0 = -3A + B - 3C$$

$$0 = 6A - B + 9C - 3D$$

$$2 = -3A + B - 6C + 9D$$

$$-5 = A + B - 6D$$

**3° manier**

vertrek weer van

$$2x - 5 = A(6 - 3x)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)(6 - 3x)$$

vul links en rechts waarden in voor x, te beginnen met de nulpunten van de noemer:

$$-3 = 6A \quad (\text{na invullen: } x = 1)$$

$$-1 = 5B \quad (\text{voor } x = 2)$$

$$2i - 5 = (Ci + D)(i - 1)(6 - 3i) \quad 2i - 5 = 9C - 3D + i(-3C + 9D) \quad (\text{voor } x = i)$$

deze laatste vergelijking

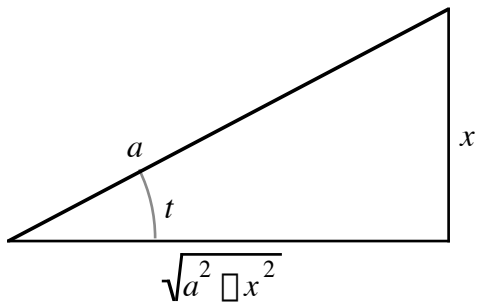
$$\text{valt uiteen in:} \quad \begin{cases} -5 = 9C - 3D \\ 2 = -3C + 9D \end{cases}$$

In plaats van de laatste twee vergelijkingen, bekomen met een complexe wortel in te vullen, kunnen we ook gewoon "eenvoudige" getallen invullen, bv.:

$$-5 = 6A + B - 6D \quad (\text{voor } x = 0)$$

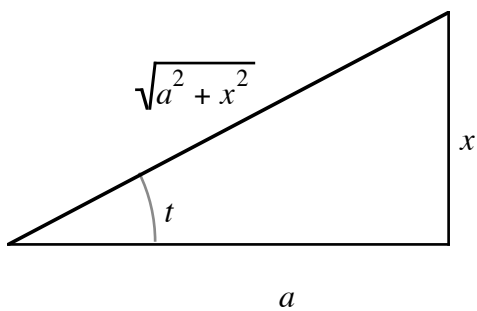
$$-7 = 18A - 4B + 18C - 18D \quad (\text{voor } x = -1)$$

# Goniometrische substituties:



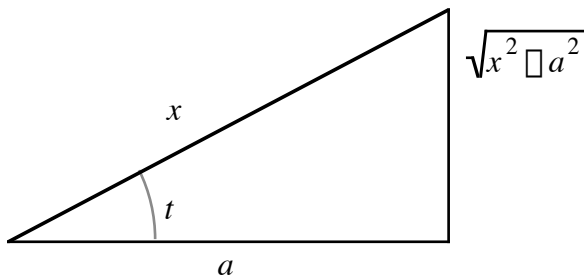
$$x = a \sin t$$

$$a^2(1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t$$



$$x = a \tan t$$

$$a^2(1 + \tan^2 t) = a^2 \sec^2 t$$



$$x = a \sec t$$

$$a^2(\sec^2 t - 1) = a^2 \tan^2 t$$

## 10. Vectorrekenen

Een vector is een voorstelling (presentatie) van een fysische grootheid.

Een vector wordt volledig bepaald door een richting (rechte, eventueel de richtingscosinussen), zin en lengte (norm): Bv. kracht, snelheid.

Grafisch kan een vector worden voorgesteld door een pijl.

Als symbool gebruiken we een letter met een pijltje boven. Bv.  $\vec{f}$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{v}$ . In gedrukte werken gebruikt met ook vette letters:  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{v}$ .

In de mechanica bepalen we de vectoren, gelegen in één vlak (vb. het  $xy$ -vlak), door een richting (een hoek tussen  $0^\circ$  en  $360^\circ$  in tegenwijzerzin t.o.v. de  $x$ -as) en een lengte.

De eenheidsvector  $\vec{e}$  is een vector waarvan de lengte 1 is ( $\|\vec{e}\|=1$ ), zodat een vector evenwijdig met  $\vec{e}$  wordt geschreven als  $\vec{V} = V\vec{e}$ .  $V$  (wordt ook abscis genoemd) is de projectie van  $\vec{V}$  op  $\vec{e}$ . De vector  $\vec{e}$  bepaalt altijd een richting. Is  $V > 0$  dan heeft  $V$  dezelfde zin als  $e$ .

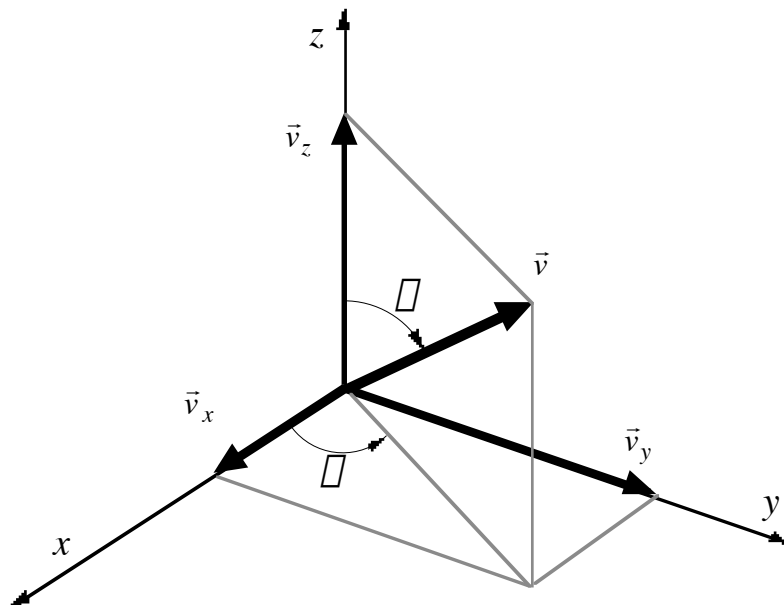
Evenwijdige vectoren  $\vec{V}$  en  $\vec{V}'$  kunnen geschreven worden als  $\vec{V} = k\vec{V}'$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).

### Componenten van een vector en richtingscosinussen:

In een rechthoekig assenkruis wordt een vector geschreven als de som van loodrecht op elkaar staande vectoren.

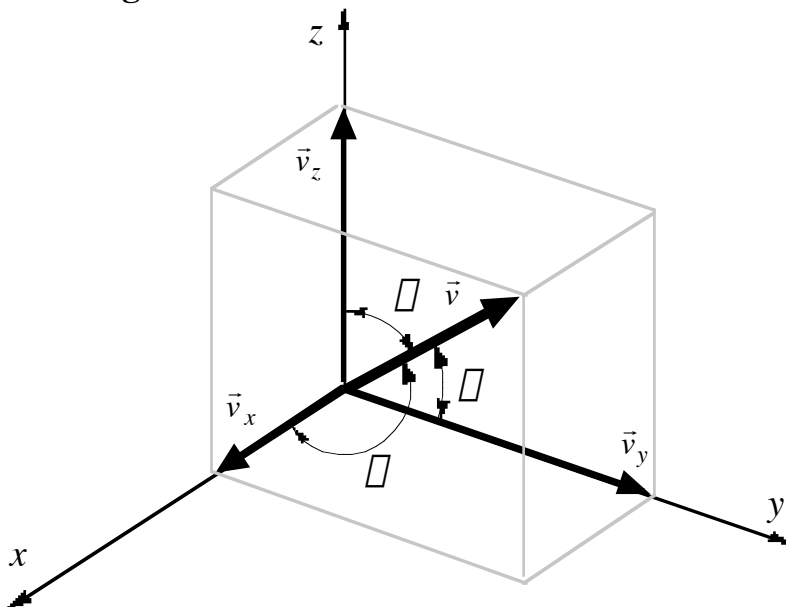
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

$$\text{andere notatie: } \mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad \text{of} \quad \mathbf{v} = v_x \mathbf{1}_x + v_y \mathbf{1}_y + v_z \mathbf{1}_z \quad \text{of} \quad \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}.$$



$$v_x = v \sin \alpha \cos \beta \quad v_y = v \sin \alpha \sin \beta \quad v_z = v \cos \alpha \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

## Richtingscosinussen



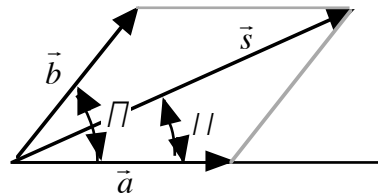
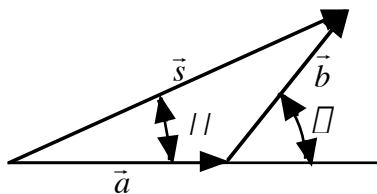
$\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  vormen de hoek van de vector met respectievelijk de x-, de y- en de z-as.

$$v_x = v \cos \alpha \quad v_y = v \cos \beta \quad v_z = v \cos \gamma$$

$$\text{waarbij } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

## Som van twee vectoren: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

grafisch:

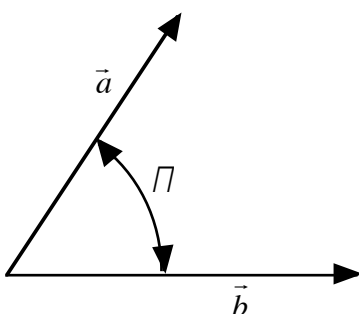


$$\text{lengte van } \vec{s}: \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

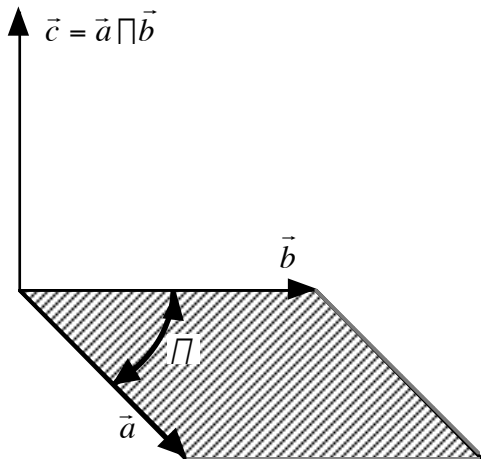
$$\text{richting en lengte van } \vec{s}: \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{s}{\sin \beta} \quad \text{met } b = |\vec{b}| \text{ en } s = |\vec{s}|$$

$$\text{analytisch: } \vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z$$

## Scalair product: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$



**Vectorieel product:**  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$



De vector  $\vec{c}$  staat loodrecht op het vlak bepaald door  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  (d. i. de richting).

De zin van  $\vec{c}$  wordt bepaald aan de hand van de rechtsdraaiende kurketrekker.

De lengte van  $\vec{c}$  wordt gegeven door  $c = |\vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab \sin \varphi$ . Dit is ook de oppervlakte van het parallellogram gevormd door de twee vectoren.

In determinantvorm krijgen we:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

## 11. Toepassingen integraalrekenen

We geven de formules telkens voor 3 gevallen:

Cartesisch

parametervorm

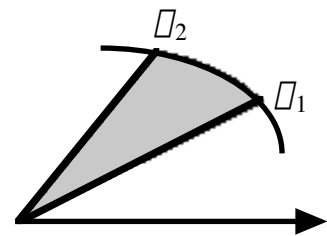
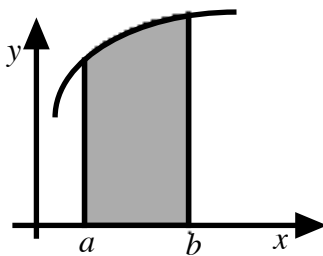
poolcoördinaten

$$y = y(x)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$r = r(\varphi)$$

### Oppervlakte van vlakdelen begrensd door grafieken

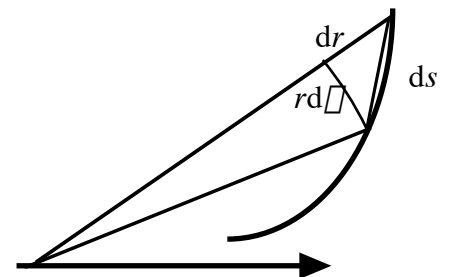
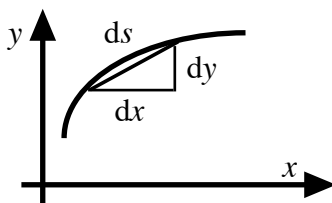


$$\int_a^b |y| dx$$

$$\int_t^{\varphi} |y(t) \cdot x'(t)| dt$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

### Booglengte



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2}$$

een differentiaal buitenbrengen geeft:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

### lengte van een kromme

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\int_{t_0}^{\varphi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$$

### oppervlakte bekomen door een kromme te wentelen rond de x-as

Algemeen geldt:  $\int_a^b 2\pi |y| ds$ . Voor de verschillende gevallen geeft dit:

$$\int_a^b 2\pi |y| \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} 2\pi |y| \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} 2\pi r |\sin \theta| \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta$$

### inhoud van een omwentelingslichaam (wentelen rond x-as)

$$\int_a^b \pi y^2 dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \pi y^2 x' dt$$

### Volume

van het lichaam ingesloten door de grafiek van  $f(x,y)$ , het  $xy$ -vlak en de rechte cilinder op  $D$

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

### Oppervlakte

van de grafiek van een functie van 2 veranderlijken, begrensd door de rechte cilinder op  $D$

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

### Substitutie bij dubbelintegralen

Indien bij dubbelintegralen het integratiedomein cirkelvormig is (of ringvormig, of een deel van een cirkel of een ring) kan het nuttig zijn om over te gaan naar poolcoördinaten; gebruik volgende omzettingen:

$$dx dy = r dr d\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta$$

## 12. Laplace transformatie

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad \text{definitie}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) \quad \text{notatie}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0 \\ t & \text{als } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{eenheidsstapfunctie (functie van Heaviside)}$$

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(p - a) \quad \text{eerste verschuivingseigenschap}$$

$$\mathcal{L}\{f(t) u(t - a)\} = e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t + a)\} \quad \text{tweede verschuivingseigenschap}$$

$$\mathcal{L}\{f(t - a) u(t - a)\} = e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{tweede verschuivingseigenschap}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-ap} F(p)\} = f(t - a) u(t - a)$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF}{dp} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^{\infty} F(u) du$$

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F}{dp^n}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f_1(t)\}}{1 - e^{-pT}} \quad \text{als } f_1(t) = f(t) u(t - T) \cdot f(t) \quad \text{met } f(t) \text{ een periodieke functie: } f(t) = f(t+T)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(+0) \quad \text{met } f(+0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(+0) - p^{n-2} \cdot f'(+0) - \dots$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{p} F(p)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^s f(s) ds du\right\} = \frac{1}{p^2} F(p)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t, a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial F(p, a)}{\partial a}$$

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-u)g(u) du\right\} = F(p) \cdot G(p) \quad f * g: \text{convolutie}$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p - a}$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot e^{at}\} = \frac{1}{(p - a)^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \sin at\} = \frac{a}{(p + b)^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot \sin at\} = \frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \cos at\} = \frac{p + b}{(p + b)^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot \cos at\} = -\frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{p}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$\delta(t)$  : Diracfunctie of unit impuls

### 13. Fourrierreeksen

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{k\pi x}{h} + b_k \sin \frac{k\pi x}{h} \right]$$

$f(x)$ : periodieke functie met periode  $2h$

met:  $a_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(x) \, dx$   $c \in \mathbb{R}$

$$a_k = \frac{1}{h} \int_{-h}^{+h} f(x) \cos \frac{k\pi x}{h} \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{h} \int_{-h}^{+h} f(x) \sin \frac{k\pi x}{h} \, dx$$

## Inhoud

|                                         |    |                                            |    |
|-----------------------------------------|----|--------------------------------------------|----|
| Griekse alfabet.....                    | 1  | Boogtangens.....                           | 19 |
| Konstanten.....                         | 1  | Basisformules.....                         | 20 |
| Getallen.....                           | 1  | Formules verwante hoeken.....              | 20 |
| <b>Vlakke meetkunde</b>                 |    | Bijzondere waarden, tekenverloop.....      | 20 |
| Oppervlakte van vlakke figuren.....     | 2  | Som- en verschilformules.....              | 20 |
| <b>Ruimte meetkunde</b>                 |    | Formules van Simpson.....                  | 21 |
| Oppervlakte en inhoud van lichamen..... | 3  | Formules dubbele hoek.....                 | 21 |
| <b>Analytische meetkunde</b>            |    | Formules halve hoek.....                   | 21 |
| Coördinatenstelsels in het vlak.....    | 6  | Tangensformules.....                       | 21 |
| Cartesische coördinaten.....            | 6  | Oplossen gon. basisvergelijkingen.....     | 21 |
| Poolcoördinaten.....                    | 6  | <b>Hyperbolische functies</b>              |    |
| Transformatieformules.....              | 6  | Sinus hyperbolicus.....                    | 22 |
| Coördinatenstelsels in de ruimte.....   | 6  | Cosinus hyperbolicus.....                  | 22 |
| Cartesische coördinaten.....            | 6  | Tangens hyperbolicus.....                  | 23 |
| Cylindercoördinaten.....                | 6  | Cotangens hyperbolicus.....                | 23 |
| Transformatieformules.....              | 6  | Formules hyperbolische functies.....       | 23 |
| Bolcoördinaten.....                     | 7  | Inverse functies.....                      | 24 |
| Transformatieformules.....              | 7  | Argument sinus hyperbolicus.....           | 24 |
| Vlakke Analytische meetkunde.....       | 7  | Argument cosinus hyperbolicus.....         | 24 |
| Rechte door twee punten.....            | 7  | Argument tangens hyperbolicus.....         | 24 |
| Rechte door punt en met gegeven rc..... | 7  | Argument cotangens hyperbolicus.....       | 24 |
| Scalair product.....                    | 7  | <b>Complexe getallen</b>                   |    |
| Norm.....                               | 7  | Definitie, reële en imaginaire deel,       |    |
| Afstand tussen twee punten.....         | 7  | modulus, argument, goniometrische          |    |
| Afstand punt tot rechte.....            | 7  | vorm, exponentiële vorm, machten,          |    |
| Kegelsneden.....                        | 7  | wortels.....                               | 26 |
| Cirkel.....                             | 7  | Definitie van Euler.....                   | 26 |
| Ellips.....                             | 8  | Product en quotiënt.....                   | 26 |
| Hyperbool.....                          | 8  | Complexe functies.....                     | 27 |
| Parabool.....                           | 8  | <b>Analyse</b>                             |    |
| <b>Algebra</b>                          |    | Afgeleide in een punt.....                 | 28 |
| Rekenregels voor exponenten.....        | 9  | Afgeleide functie.....                     | 28 |
| Machten van een som.....                | 10 | Partiële afgeleide in een punt.....        | 28 |
| Driehoek van Pascal.....                | 10 | Partiële afgeleide.....                    | 28 |
| Ontbinden in factoren.....              | 10 | Totale differentiaal.....                  | 29 |
| Reststelling.....                       | 10 | Afgeleide van samengestelde functie        |    |
| Schema van Horner.....                  | 10 | van één veranderlijke.....                 | 29 |
| Eerste-en tweedegraadsfuncties.....     | 11 | Totale differentiaal van samengestelde     |    |
| Eerstegraadsfunctie.....                | 11 | functie van meerdere veranderlijken...     | 29 |
| Tweedegraadsfunctie.....                | 11 | Rekenregels voor afgeleiden en             |    |
| nulpunten.....                          | 11 | differentialen.....                        | 30 |
| grafiek.....                            | 11 | Kettingregel.....                          | 31 |
| tekenverloop.....                       | 12 | Rekenregels: integralen.....               | 32 |
| Tekenvoortgang rationale functie.....   | 12 | Splitsen in partiële breuken.....          | 33 |
| Nulpunten derdegraadsfunctie.....       | 13 | Goniometrische substituties.....           | 35 |
| Het getal $e$ .....                     | 14 | <b>Vectorrekenen</b>                       |    |
| Exponentiële functie.....               | 14 | Componenten van een vector .....           | 36 |
| Logaritmische functie.....              | 15 | Richtingscosinussen.....                   | 37 |
| <b>Determinanten</b> .....              | 16 | Som van twee vectoren.....                 | 37 |
| <b>Goniometrie</b>                      |    | Scalair product.....                       | 37 |
| Meetkundige voorstelling gon. get.....  | 16 | Vectorieel product.....                    | 38 |
| Goniometrische functies.....            | 17 | <b>Toepassingen integraalrekenen</b> ..... | 39 |
| Sinus.....                              | 17 | <b>Laplacetransformatie</b> .....          | 41 |
| Cosinus.....                            | 18 | <b>Fourierreksen</b> .....                 | 42 |
| Tangens.....                            | 18 | <b>Inhoud</b> .....                        | 43 |
| Cyclometrische functies.....            | 19 |                                            |    |
| Boogsinus.....                          | 19 |                                            |    |
| Boogcosinus.....                        | 19 |                                            |    |