De Nederlandse Wiskunde Olympiade

100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden

rationale en irrationale getallen
pythagoras
getallenraadsels
oppervlakte
gelijkvormigheid en congruentie
cirkels
deelbaarheid
rekenraadsels
van breuk naar decimale ontwikkeling
rijen getallen
veelhoeken met symmetrie
meetkundige getallen-schema's
meer over periodieke ontwikkelingen
redeneren
meetkunde varia
ruimtemeetkunde
sport en spel, roltrappen en badwater
handig tellen
vergelijkingen
tien opgaven van de tweede ronde
de kunst van het oplossen van problemen

De Nederlandse Wiskunde Olympiade

De

100 opgaven

Nederlandse

met hints,

Wiskunde

oplossingen

Olympiade

en achtergronden

Opgedragen aan de nagedachtenis van Ægle Hoekstra

samenstellers
Fred Bosman
Jos Brakenhoff
Jan van de Craats
Jan Donkers
Maxim Hendriks
Thijs Notenboom
Allard Veldman
Chris Zaal

eindredactie
Jan van de Craats

ISBN 90 76976 12 0

Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade
p/a Citogroep
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

inhoudsopgave

hoe lees je dit boek?

Dit is geen boek om van kaft tot kaft te lezen. Eerder is het een puzzelboek, een soort cryptogrammenbundel. Maar het gaat wel om wiskundige cryptogrammen, puzzels met een wiskundig tintje. Het zijn opgaven van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, een jaarlijkse wedstrijd voor scholieren. Ruim veertig jaar geleden, in 1962, werd die olympiade voor het eerst in Nederland georganiseerd, en sindsdien hebben al meer dan tachtigduizend scholieren er hun krachten op beproefd.

Aan gewone schoolwiskunde heb je als voorkennis genoeg, maar voor het oplossen van olympiadevraagstukken bestaan geen rechttoe-rechtaan methodes. Het is vooral een kwestie van creativiteit, van gezond verstand en van helder denken.

Hoe zou je dit boek kunnen lezen? Snuffel het door, laat je oog vallen op opgaven die je leuk of intrigerend vindt, en ga dan zelf met pen en papier aan de slag. Kijk pas naar de commentaarteksten, de voorbeeldoplossingen en de hints als je niet meer verder kunt.

wat is een wiskunde-olympiade?

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd in twee rondes. De eerste ronde vindt op de scholen plaats. De beste honderd leerlingen van het hele land gaan naar de tweede ronde, die centraal georganiseerd wordt aan de Technische Universiteit Eindhoven. Uit de prijswinnaars wordt elk jaar een team samengesteld dat Nederland vertegenwoordigt bij de Internationale Wiskunde Olympiade, een superwedstrijd waar scholieren uit meer dan tachtig landen hun krachten meten.

wat staat er in dit boek?

De hoofdmoot van dit boek is gewijd aan opgaven van de eerste rondes van de afgelopen twintig jaar. Die opgaven zijn naar thema gerangschikt. In sommige gevallen is de formulering wat aangepast of geactualiseerd.

In elk opgavenhoofdstuk vind je op de linkerpagina een stuk of zes vraagstukken. De rechterbladzijde bevat steeds een korte toelichting over de wiskunde van het thema van dat hoofdstuk en een volledig uitgewerkte voorbeeldoplossing van de eerste opgave. Voor de overige opgaven staan er hints in de linkerkantlijn naast de opgaven, in spiegelschrift afgedrukt om het lezen te bemoeilijken. Als je een hint nodig hebt, kun je een spiegeltje gebruiken om ze te lezen.

De opgavenhoofdstukken worden afgewisseld met hoofdstukken waarin wiskundige achtergrondkennis wordt gepresenteerd. Het gaat daarbij vooral om meetkunde, breuken, decimale ontwikkelingen en irrationale getallen. Die hoofdstukken kunnen los van de rest gelezen worden. Ter afsluiting bevatten ze extra opgaven.

antwoorden en oplossingen

Bij de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt bij elke som alleen maar het antwoord gevraagd. Zo is een objectieve en gemakkelijk uit te voeren correctie mogelijk. Achterin deze bundel staan ter controle ook de antwoorden van die opgaven. De voorbeeldoplossingen zijn echter helemaal uitgewerkt, en het is de bedoeling dat je zelf ook steeds volledig uitgewerkte oplossingen bedenkt en opschrijft. De voorbeeldoplossingen wijzen je de weg.

de tweede ronde

Hoofdstuk 20 bevat uitsluitend opgaven van de tweede ronde. In dit hoofdstuk staan geen hints of achtergronden. In plaats daarvan vind je in Hoofdstuk 21 een aantal algemene tips voor het oplossen van wiskundeproblemen, toegelicht met voorbeelden uit de opgaven van Hoofdstuk 20. Begin pas aan deze twee hoofdstukken als je al flink wat opgaven van de eerste ronde hebt geprobeerd. Bij de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gaat het niet meer uitsluitend om antwoorden. De deelnemers moeten daar volledige uitwerkingen inleveren die door een jury worden beoordeeld. Alleen voor correcte en volledig gemotiveerde oplossingen krijg je het volle puntenaantal.

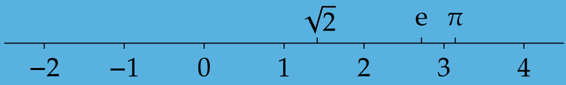
verantwoording

Deze bundel is samengesteld door een team van wiskundigen en wiskundestudenten, waaronder een aantal oud-olympiadedeelnemers. De theoriehoofdstukken zijn geschreven door Jan van de Craats. Dit boek wordt opgedragen aan de nagedachtenis van dr. Ægle H. Hoekstra (1952–1999) oud-bestuurslid van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, inspirerend wiskundedocent en een van de initiatiefnemers van dit olympiade-boek.
Een voorlopige versie van dit boek is in de zomer van 2002 op beperkte schaal onder leraren, deelnemers aan de tweede ronde en andere geïnteresseerden verspreid. Het is ondoenlijk om iedereen die de samenstellers op onvolkomenheden wees, suggesties deed voor verbeteringen, of ons alleen maar woorden van waardering zond, daarvoor op deze plaats individueel te bedanken. Alle reacties werden echter zeer op prijs gesteld, en ze hebben ook tot tal van verbeteringen geleid.

Een meetkundig beeld van de verzameling van alle reële getallen krijg je wanneer je op een onbegrensde rechte lijn twee punten kiest, ze 0 en 1 noemt, en daarop vervolgens de andere getallen op de voor de hand liggende wijze een plaats geeft. Zo ontstaat de *getallenrechte*, een lijn waarvan elk punt met een reëel getal correspondeert. Naast de gehele getallen

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

en de niet-gehele rationale getallen (de getallen die door breuken voorgesteld kunnen worden) bevat de getallenrechte ook de irrationale reële getallen zoals $\sqrt{2}$, e en π.



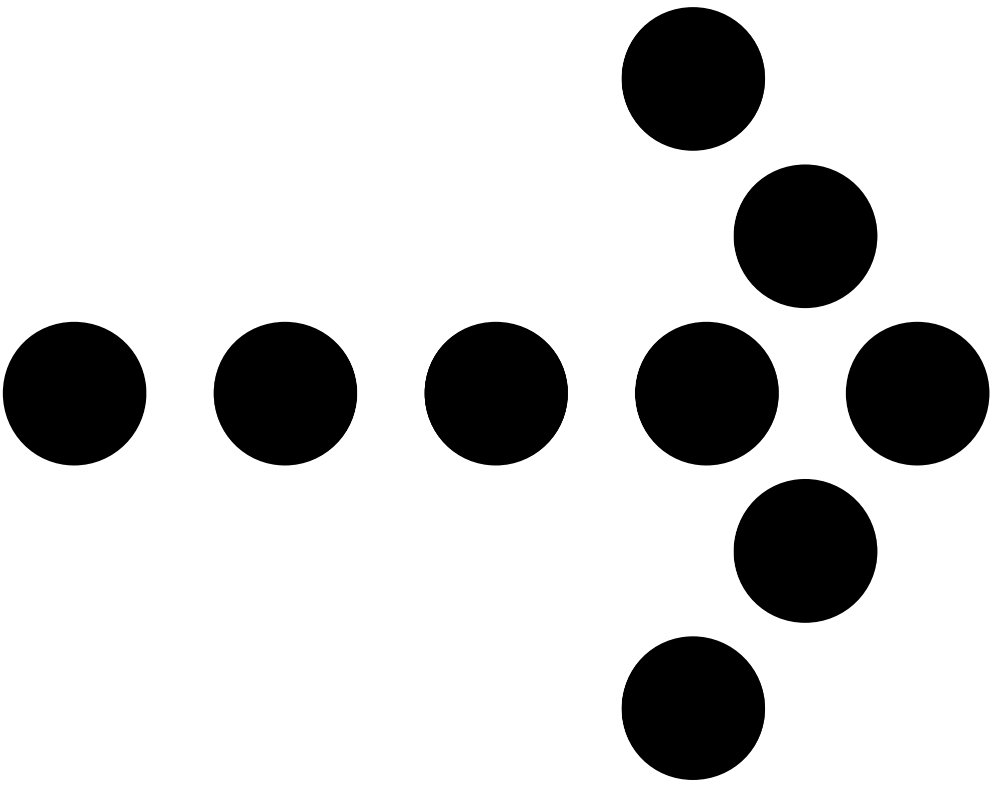
de reële getallenrechte

Elk reëel getal kun je schrijven als een eindigende of een oneindig voortlopende decimale ontwikkeling. Zo is

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.4142135623730950488\ldots \\
\frac{22}{7} &= 3.1428571428571428571\ldots \\
\pi &= 3.1415926535897932385\ldots \\
\mathrm{e} &= 2.7182818284590452354\ldots
\end{aligned}$$

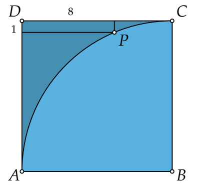
Meer hierover kun je lezen in de hoofdstukken 8, 12 en 16.

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.



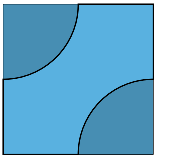
1

Binnen een vierkant $ABCD$ is een kwartcirkel beschreven met B als middelpunt en de zijde als straal. Een punt P op de kwartcirkel heeft afstand 1 tot CD en afstand 8 tot AD. Bereken de lengte van de zijde van het vierkant. 1993-B2



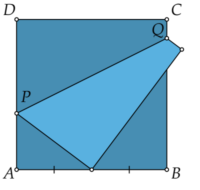
2

Uit een vierkant met zijde 2 worden twee kwartcirkels met straal 1 geknipt zoals in de figuur. Hoe groot is de straal van de grootste cirkel die nog binnen het overgebleven stuk past? 1999-B3



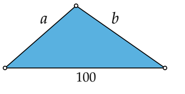
3

Een vierkant vel papier $ABCD$ met zijde 8 wordt zo gevouwen dat hoekpunt D op het midden van AB terecht komt. Bereken de lengte van de vouw PQ die zo ontstaat. 1994-A3



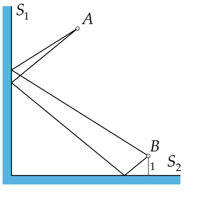
4

Gegeven zijn twee gehele getallen a en b met $0 < a < b < 100$. De driehoek waarvan de zijden de lengten a, b en 100 hebben, is stomphoekig. Wat is de grootste waarde die a kan hebben? 1993-B3



5

De spiegels S_1 en S_2 staan loodrecht op elkaar. Een lichtsignaal dat van A via spiegel S_1 naar B gaat, legt een afstand af van $5\sqrt{6}$. Een lichtsignaal dat van A eerst via spiegel S_1 en vervolgens via spiegel S_2 naar B gaat, legt een afstand af van $6\sqrt{5}$. Punt B ligt op een afstand 1 van S_2. Hoe ver ligt het punt A van spiegel S_2? 1990-A4



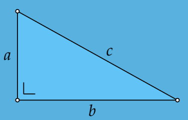
bij 2. Als twee cirkels elkaar raken ligt het raakpunt op de verbindingslijn van de beide middelpunten.

bij 3. De verbindingslijn van D en het midden van AB snijdt PQ loodrecht.

bij 4. Hoe zit het als a en b niet geheel hoeven te zijn?

bij 5. Teken het spiegelbeeld B_1 van B in S_1 en het spiegelbeeld B_2 van B_1 in S_2.

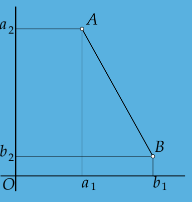
De opgaven in dit hoofdstuk hebben allemaal op de een of andere manier te maken met de *Stelling van Pythagoras* die zegt dat in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$. Je kunt die stelling zelfs nog wat uitbreiden: als de driehoek *scherphoekig* is, geldt $a^2 + b^2 > c^2$, en als hij *stomphoekig* is met de stompe hoek tegenover zijde c, dan geldt $a^2 + b^2 < c^2$.



$a^2 + b^2 = c^2$

In een rechthoekig coördinatenstelsel geldt volgens de stelling van Pythagoras voor de afstand $d(A, B)$ van twee punten A en B met coördinaten (a_1, a_2) respectievelijk (b_1, b_2) dat

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

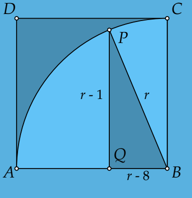


voorbeeldoplossing opgave 1

Noem de lengte van de zijde van het vierkant r. Pas Pythagoras toe op driehoek PQB (zie de figuur):

$$(r-1)^2 + (r-8)^2 = r^2$$

met als oplossingen $r = 5$ en $r = 13$. Omdat $r > 8$ is, voldoet alleen $r = 13$.



6 Gelijke letters staan voor gelijke cijfers, ongelijke letters voor ongelijke cijfers.
$4 \times ABCDE = EDCBA$. Bepaal $ABCDE$. 1998-A6

7 Een klimgetal is een positief getal van minstens twee cijfers waarvan ieder cijfer (behalve het eerste cijfer) groter is dan het cijfer dat er voor staat. Voorbeelden zijn: 16, 267, 13789. Hoeveel klimgetallen bestaan er? 1998-C1

8 Iemand schrijft alle getallen op van 1 tot en met 1987 en bepaalt vervolgens de som S van alle cijfers die hij heeft opgeschreven. Wat is de rest bij deling van S door 100? 1987-A3

9 Wat is het grootste getal dat kan overblijven als je uit de rij $1234567891011121314151617\ldots57585960$ honderd cijfers schrapt? De rij is ontstaan door de getallen 1 tot en met 60 achter elkaar op te schrijven. De geschrapte cijfers hoeven geen aaneengesloten blok te vormen. De overblijvende cijfers moeten wel op volgorde blijven staan. 1982-A6

10 M is een getal van drie cijfers, alle ongelijk aan 0. Door deze drie cijfers telkens in een andere volgorde te zetten krijg je zes verschillende getallen, waaronder natuurlijk M zelf. De som van die zes getallen is 2886. Wat is het grootste getal M waarvoor dit geldt? 1997-A6

11 a, b en c zijn positieve gehele getallen van respectievelijk twee, drie en vijf cijfers; alle cijfers zijn kleiner dan 9. De vijf cijfers van c zijn onderling verschillend. Er geldt $a \times b = c$. Als je alle cijfers van a, b en c met 1 vermeerdert dan klopt de vermenigvuldiging ook.
Bereken a, b en c. 1985-B4

12 $n = 99 + 999 + 9999 + \cdots + 9999\ldots9999$, waarbij het laatste getal in die som uit honderd negens bestaat. Hoe vaak komt het cijfer 1 voor in de uitgeschreven vorm van n? 2000-A4

bij 7. Als je een groepje van onderling verschillende cijfers kiest, kun je daarmee precies één klimgetal maken.

bij 8. Bepaal de som van alle getallen van één cijfer. Nu die van twee cijfers. Kijk steeds wat de rest is na deling door 100.

bij 9. Hoeveel cijfers heeft het getal dat je overhoudt? Hoe kun je dat zo groot mogelijk krijgen?

bij 10. Als abc de schrijfwijze van M is, dan is $M = a \times 100 + b \times 10 + c$. Schrijf de andere vijf getallen ook op die manier, en tel op.

bij 11. Stel $a = a_1a_2$ en $b = b_1b_2b_3$. Zoek naar verbanden. Begin met het laatste cijfer van c.

bij 12. Schrijf 99 als $100 - 1$, enzovoort.

getallen in het tientallige stelsel

Bij al deze vragen gaat het om gehele getallen waarbij de schrijfwijze van die getallen in het tientallige stelsel een belangrijke rol speelt. Bij de meeste opgaven moet je heel bewust onderscheid maken tussen cijfers en getallen. Veel mensen gebruiken die woorden door elkaar, maar dat is niet correct. We hebben maar tien cijfers, namelijk $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, maar daarmee kunnen we oneindig veel verschillende getallen maken. Een getal als 387562 betekent dan eigenlijk $2+6\times10+5\times100+7\times1000+8\times10000+3\times100000$. Je ziet dat de machten van 10 de bouwstenen zijn van het tientallige stelsel.

het tweetallige stelsel

In plaats van 10 kun je elk ander geheel getal groter dan 1 nemen. In de computerkunde werkt men veel met het *tweetallige* stelsel (ook wel *binaire* stelsel genoemd), waarin 0 en 1 de enige cijfers zijn. De bouwstenen zijn dan de machten van 2, dat wil zeggen $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, ... Het binaire getal $(111001)_2$ (de haakjes en het tweetje geven aan dat het een binair getal is), is dan in de gewone, tientallige schrijfwijze geschreven, gelijk aan

$$\begin{aligned}(111001)_2 &= 1\times1+0\times2+0\times4+1\times8+1\times16+1\times32\\ &= 57\end{aligned}$$

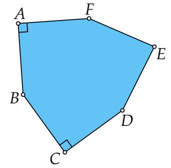
Sommige van de opgaven in deze serie kun je ook stellen in een ander talstelsel. Maar of ze dan ook een oplossing hebben, is nog maar de vraag!

voorbeeldoplossing opgave 6

Omdat $4\times ABCDE$ ook uit vijf cijfers bestaat, moet $A = 1$ of $A = 2$ zijn. Maar $EDCBA$ is een viervoud, dus $A = 1$ is onmogelijk. Conclusie: $A = 2$. Dan kan E alleen maar 3 of 8 zijn, maar 3 is als begincijfer van $EDCBA$ onmogelijk. Dus is $E = 8$, en daarom kan B niet groter zijn dan 2. Omdat $EDCBA$ deelbaar is door 4 en $A = 2$, moet dan $B = 1$ zijn. Het cijfer 2 is al gebruikt, dus D moet 7 zijn, en nagaan van alle mogelijkheden voor C levert dan $C = 9$ op. Conclusie: $ABCDE = 21978$.

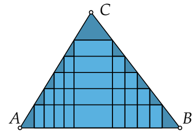
13

Van een zeshoek $ABCDEF$ hebben alle zijden lengte 1. Gegeven is verder dat $\angle A = \angle C = 90°$. Wat is de maximale oppervlakte die de zeshoek kan hebben? 1997-B4



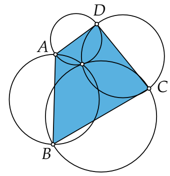
14

In een driehoek ABC kunnen op de aangegeven wijze rechthoeken worden getekend. De rechthoek met de grootst mogelijke oppervlakte heeft oppervlakte 12.
Bereken de oppervlakte van driehoek ABC. 1983-A3



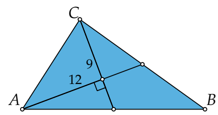
15

De vier cirkels die respectievelijk de vier zijden van een vierhoek $ABCD$ als middellijn hebben, snijden elkaar in één punt. De vierhoek heeft geen inspringende hoeken. Verder is gegeven dat $AC = 14$ en $BD = 18$. Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCD$. 1984-B4



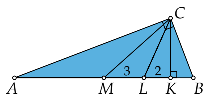
16

Twee zwaartelijnen in driehoek ABC, de ene met lengte 9 en de andere met lengte 12, staan loodrecht op elkaar.
Bereken de oppervlakte van de driehoek. 1999-C2



17

In een rechthoekige driehoek ABC met $\angle C = 90°$ snijden de hoogtelijn, de bissectrice (deellijn) en de zwaartelijn uit C de zijde AB in respectievelijk K, L en M. Bovendien geldt $KL = 2$ en $LM = 3$.
Bereken de oppervlakte van de driehoek. 1993-C3



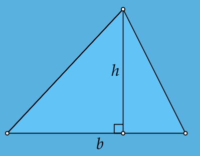
bij 14. Teken de hoogtelijn h uit C en druk de zijden van zo'n rechthoek uit in h en AB.

bij 15. Noem het snijpunt van de cirkels S en kijk naar de hoeken ASB, BSC, etc.

bij 16. Gebruik de zwaartelijnenstelling.

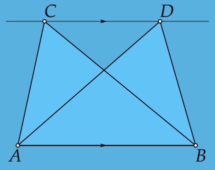
bij 17. CL is ook de bissectrice van een andere driehoek. Welke?

Voor de oppervlakte van een driehoek geldt de formule $O = \frac{1}{2}\,b \times h$, waarin b (de basis) een van de zijden is, en h (de hoogte) de hoogtelijn op die zijde. Een direct gevolg van die formule is dat de oppervlakte van een driehoek niet verandert wanneer je de top langs een lijn verplaatst die evenwijdig is aan de basis.

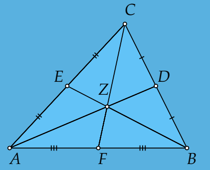


$O = \frac{1}{2}\,b \times h$

Er zijn nog wat andere eigenschappen van driehoeken die je bij sommige van deze opgaven gebruiken kunt: de *zwaartelijnen-stelling* die zegt dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan en elkaar verdelen in de verhouding $2:\ 1$, en de *bissectricestelling*, die zegt dat die zegt dat $AC : BC = AD : BD$ als CD de bissectrice uit C in driehoek ABC is (zie hiervoor ook Hoofdstuk 4).

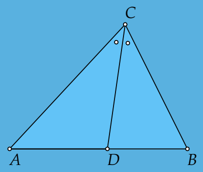


$O(ABC) = O(ABD)$



Zwaartelijnenstelling:

$AZ : ZD = BZ : ZE = CZ : ZF = 2{:}1$

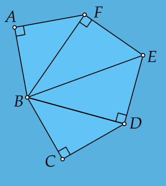


Bissectricestelling:

$AC : BC = AD : BD$

voorbeeldoplossing opgave 13

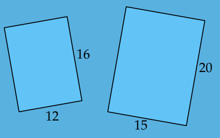
De driehoeken BAF en BCD zijn vaste 'geo-driehoeken', elk met oppervlakte $\frac{1}{2}$. Alleen de 'vlieger' $BDEF$ met zijden van lengte $\sqrt{2}$ en 1 is variabel. Die bestaat uit de twee congruente driehoeken BFE en BDE, waarvan de oppervlakte maximaal is wanneer de hoeken BFE en BDE recht zijn. De totale oppervlakte van de zeshoek is dan $1 + \sqrt{2}$.



In de vlakke meetkunde kun je door redeneren uit eenvoudige, vanzelfsprekende meetkundige eigenschappen andere, minder voor de hand liggende stellingen afleiden. In dit theoriehoofdstuk zullen we, uitgaande van eenvoudige eigenschappen van gelijkvormige figuren, een aantal minder vanzelfsprekende stellingen bewijzen, te weten de zwaartelijnenstelling en de bissectricestelling. Eerst geven we een paar definities zodat we precies weten waar we over praten.

gelijkvormige figuren

Twee figuren heten *gelijkvormig* als je de ene figuur uit de andere kunt verkrijgen door hem met een zekere *vermenigvuldigingsfactor* te vermenigvuldigen. Denk maar aan het kopieerapparaat, waarbij je zo'n factor (meestal aangegeven in procenten) zelf in kunt stellen.



Bij een vergrotingsfactor van 1.25 (dus 125 procent), worden alle afmetingen 1.25 maal zo groot. Een rechthoek van 12×16 centimeter komt er dan uit als een rechthoek van 15×20 centimeter. Hoeken veranderen niet: de rechthoek blijft een rechthoek. En ook de lengteverhoudingen blijven ongewijzigd: $12 : 16 = 15 : 20$. Kortom, de *vorm* blijft hetzelfde, maar alle *lengtes* worden met de gekozen vermenigvuldigingsfactor vergroot.

Overigens, de *oppervlakte* wordt natuurlijk met het *kwadraat* van die factor vermenigvuldigd. Zo is de oppervlakte van de nieuwe rechthoek $(1.25)^2 = 1.5625$ maal zo groot als die van oude rechthoek. Ga maar na.

congruentie

Als de vermenigvuldigingsfactor 1 is (dat wil zeggen: honderd procent), is de kopie van de figuur net zo groot als het origineel. Als je de figuur op een transparant gekopieerd hebt, kun je die precies over het origineel heenleggen. Hoeken, lengtes en oppervlakte blijven ongewijzigd. De twee figuren heten dan *congruent*. Congruentie is dus een bijzondere vorm van gelijkvormigheid, namelijk met factor 1.

gespiegelde congruentie en gelijkvormigheid

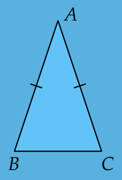
Je kunt de transparant waar de met vermenigvuldigingsfactor 1 gekopieerde figuur op staat ook omgeklapt neerleggen, dat wil zeggen met de beeldzijde naar beneden. Wat je dan ziet, is het spiegelbeeld van het origineel, want zo'n transparant is doorzichtig. Bij een rechthoek zie je geen verschil, want een rechthoek is symmetrisch. Maar bij asymmetrische figuren, bijvoorbeeld bij de letter F, wel. Nog steeds noemen we de twee figuren, de oorspronkelijke F en zijn spiegelbeeld, congruent: *gespiegeld congruent*, om precies te zijn.

Hetzelfde kan ook voorkomen bij gelijkvormige figuren waarbij de vermenigvuldigingsfactor niet gelijk aan 1 is: ook dan kunnen de twee figuren *gespiegeld gelijkvormig* zijn. In het vervolg zal 'gelijkvormig' zowel 'gewoon gelijkvormig' als 'gespiegeld gelijkvormig' kunnen betekenen.

Gespiegeld gelijkvormige letters

gelijkbenige driehoeken

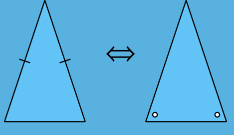
Is de figuur die je kopieert (met vergrotingsfactor 1) een gelijkbenige driehoek ABC, zeg met $AB = AC$, dan past de gekopieerde driehoek ook omgeklapt precies op het origineel: de driehoeken ABC en ACB (let op de volgorde!) zijn dus congruent, en dat betekent dat $\angle B = \angle C$ moet zijn.



Omgekeerd, als van driehoek ABC alleen maar gegeven is dat $\angle B = \angle C$ dan kun je een kopie op een transparant ervan omgeklapt op het origineel leggen met zijde BC op CB, dus met de eindpunten B en C verwisseld. Omdat de hoeken bij B en C gelijk zijn, past de gehele beelddriehoek dan ook weer precies op het origineel, met als gevolg dat $AB = AC$. Samengevat:

stelling van de gelijkbenige driehoek

Als van een driehoek twee zijden gelijk zijn, zijn ook de tegenover die zijden liggende hoeken gelijk, en omgekeerd.

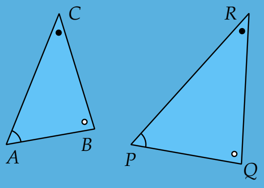


gelijkvormige driehoeken

Alle vierkanten zijn onderling gelijkvormig, maar twee rechthoeken zijn alleen maar gelijkvormig als ze dezelfde verhouding tussen hun lengte en breedte hebben. Bij driehoeken valt er meer over gelijkvormigheid te zeggen:

Wanneer twee driehoeken ABC en PQR gelijkvormig zijn geldt voor de corresponderende hoeken en zijden:

$$\angle A = \angle P, \quad \angle B = \angle Q, \quad \angle C = \angle R,$$
$$AB : PQ = BC : QR = CA : RP$$



We kunnen de relaties voor de zijden ook herleiden tot $AB : BC = PQ : QR$, $BC : CA = QR : RP$ en $CA : AB = RP : PQ$, of, iets korter opgeschreven, $AB : BC : CA = PQ : QR : RP$.

gelijkvormigheidskenmerken

Als, omgekeerd, aan alle bovenstaande eigenschappen voldaan is, zijn ABC en PQR gelijkvormig, maar om aan te tonen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn, hoef je niet al die eigenschappen na te gaan. Het kan zuiniger. We geven hier twee *gelijkvormigheidskenmerken* die ieder op zichzelf al gelijkvormigheid garanderen. Welk van beide kenmerken je in een bepaald geval hanteert, hangt af van de gegeven situatie.

gelijkvormigheidskenmerk hh

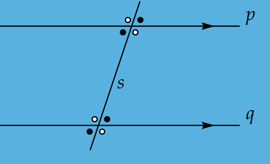
Als van de driehoeken ABC en PQR twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, bijvoorbeeld $\angle A = \angle P$ en $\angle B = \angle Q$, dan zijn ze gelijkvormig.

Je kunt hierbij opmerken dat in dat geval ook de derde hoek overeen moet komen omdat de som van de hoeken van elke driehoek 180 graden is. Maar om het kenmerk toe te passen hoef je dus slechts voor twee paren hoeken de gelijkheid te verifiëren.

gelijkvormigheidskenmerk zhz

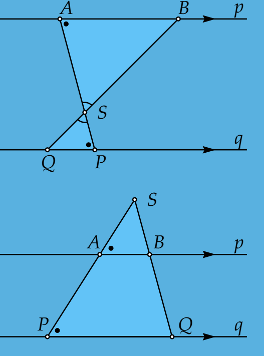
Als voor de driehoeken ABC en PQR geldt dat $\angle B = \angle Q$ en $AB : BC = PQ : QR$, dan zijn ABC en PQR gelijkvormig.

evenwijdige lijnen en gelijkvormigheid



Wanneer twee evenwijdige lijnen p en q gesneden worden door een derde lijn s, ontstaan er bij de twee snijpunten acht hoeken in twee hoekgrootten, hiernaast aangegeven met open en dichte rondjes. Zulke gelijke hoeken bij p en q worden wel F-hoeken of Z-hoeken genoemd, al naar gelang ze aan dezelfde kant van s liggen of aan verschillende kanten ervan.
Omgekeerd, als er bij de snijpunten van de lijnen p en q met s reeds één zo'n paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn p en q evenwijdig.

Wanneer twee evenwijdige lijnen p en q gesneden worden door twee andere lijnen die elkaar snijden in een punt S dat niet op p of q ligt, dan vormen de snijpunten twee driehoeken ASB en PSQ (zie de figuur) met gelijke hoeken bij S en bij A en P (en natuurlijk ook bij B en Q). Op grond van kenmerk **hh** zijn ze dan gelijkvormig, en dus geldt $AB : BS : SA = PQ : QS : SP$. We kunnen dit ook schrijven als $SA : SP = SB : SQ = AB : PQ$.

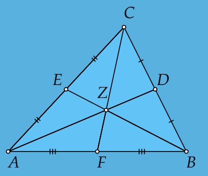


Als $p//q$ dan geldt
$SA : SP = SB : SQ = AB : PQ$

We kunnen hierbij twee gevallen onderscheiden, al naar gelang S wel of niet tussen p en q ligt. De redenering verloopt in beide gevallen precies hetzelfde. In de figuren hiernaast zijn de beide gevallen onder elkaar getekend.
Omgekeerd volgt in elk van de twee geschetste situaties reeds uit $SA : SP = SB : SQ$ dat $p//q$, want de driehoeken ASB en PSQ zijn dan op grond van kenmerk **zhz** gelijkvormig. Als gevolg hiervan geldt $\angle A = \angle P$ en $\angle B = \angle Q$ en dus vormen die hoeken Z-hoeken (als S tussen p en q ligt) of F-hoeken (als S niet tussen p en q ligt). In het tweede geval gebruikt men in plaats van de relatie $SA : SP = SB : SQ$ ook vaak de relatie $SA : AP = SB : BQ$, die ermee equivalent is.

de zwaartelijnenstelling

Wat we hierboven behandeld hebben, zal de meeste lezers in grote lijnen wel bekend zijn geweest. Maar misschien geldt dat niet voor de twee stellingen die we nu uit het voorgaande af gaan leiden, de zwaartelijnenstelling en de bissectricestelling. We beginnen met de zwaartelijnenstelling.

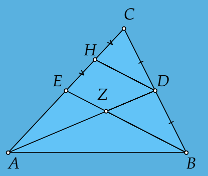


$AZ : ZD = BZ : ZE = CZ : ZF = 2 : 1$

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn die een hoekpunt verbindt met het midden van de tegenoverliggende zijde. De zwaartelijnenstelling luidt als volgt:

zwaartelijnenstelling

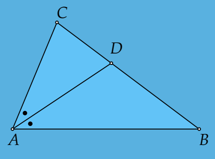
De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zogenaamde *zwaartepunt* van de driehoek. Verder verdeelt het zwaartepunt elk van de drie zwaartelijnen in de verhouding $2 : 1$.



Om deze stelling af te leiden tekenen we aanvankelijk alleen maar de zwaartelijnen AD en BE. Hun snijpunt noemen we wel vast Z. Vervolgens verbinden we D met het midden H van CE. Omdat $CH = \frac{1}{2}CE$ en $CD = \frac{1}{2}CB$ zijn de lijnen HD en EB evenwijdig. Kijken we nu naar driehoek ADH met daarin de lijn $EZ//HD$, dan zien we dat $AE : EH = AZ : ZD$ en omdat $EH = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}AE$ geldt $AE : EH = 2 : 1$, dus ook $AZ : ZD = 2 : 1$.
We zien dus dat de zwaartelijn BE de zwaartelijn AD snijdt in een punt Z waarvoor geldt dat $AZ : ZD = 2 : 1$. Precies dezelfde redenering, nu toegepast op de zwaartelijnen AD en CF, laat zien dat ook de zwaartelijn CF de zwaartelijn AD ***in ditzelfde punt*** Z moet snijden, want er is maar één punt Z op het lijnstuk AD waarvoor geldt dat $AZ : ZD = 2 : 1$.
De eerste conclusie die we trekken is dat de drie zwaartelijnen inderdaad door één punt Z gaan. Vervolgens bedenken we dat als Z zodanig op de zwaartelijn AD ligt dat $AZ : ZD = 2 : 1$ is, hetzelfde natuurlijk ook voor de andere zwaartelijnen moet gelden. Z verdeelt ze *alle drie* dus in de verhouding $2 : 1$, waarmee de gehele zwaartelijnenstelling bewezen is.

de bissectricestelling

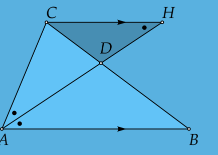
De lijn die een hoek van een driehoek in twee gelijke delen verdeelt, noemt men de *bissectrice* (ook wel: *deellijn*) van die hoek. Voor de bissectrice van een hoek van een driehoek geldt de *bissectricestelling*:



$AB : AC = DB : DC$

bissectricestelling

Als AD de bissectrice is van hoek A in driehoek ABC, waarbij D op BC ligt, dan geldt $AB : AC = DB : DC$.



Bewijs: Kies het punt H op het verlengde van AD zo, dat $CH // AB$. Dan is (Z-hoeken) $\angle CHA = \angle BAH$, en omdat AD de bissectrice van hoek A is, heeft driehoek AHC dan gelijke hoeken bij A en H, en dus is $AC = HC$. Omdat $CH//AB$ zijn de driehoeken ABD en HCD gelijkvormig, waaruit volgt dat $DB : DC = AB : HC = AB : AC$, zoals we wilden aantonen.

E1

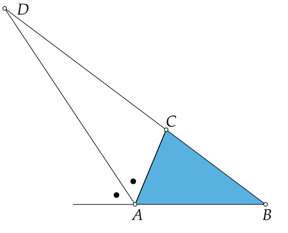
Geef een alternatief bewijs van de zwaartelijnenstelling door niet het lijnstuk DH, maar het lijnstuk DE als hulplijn te gebruiken.

E2

Stel dat Z het zwaartepunt is van driehoek ABC. Bewijs dat de driehoeken ABZ, BCZ en CAZ alle drie dezelfde oppervlakte hebben.

E3

Kies D op het verlengde van zijde BC van driehoek ABC zo, dat AD de *buitenbissectrice* is van hoek A. Bewijs dat ook in dit geval geldt dat $AB : AC = DB : DC$.
(Zie de figuur hiernaast. Deze stelling staat bekend als de *buitenbissectricestelling*.)



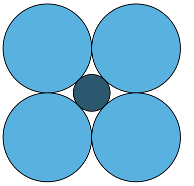
E4

De beide bissectricestellingen kunnen ook bewezen worden door de sinusregel toe te passen op de driehoeken ABD en ACD. Geef zo'n bewijs.
NB. De sinusregel luidt als volgt: in driehoek ABC met hoeken A, B, C en zijden a, b, c (zijde a tegenover hoek A, enzovoort) geldt

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

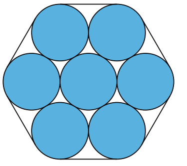
18

Rondom een centrale cirkel liggen vier even grote cirkels die alle aan de centrale cirkel raken, en elkaar bovendien twee aan twee raken (zie de figuur). De straal van elk van de vier grote cirkels is 1. Hoe groot is de straal van de centrale cirkel? 1989-A1



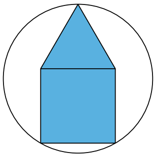
19

Een strak gespannen touw past precies om zeven cirkelschijven, die allemaal straal 1 hebben. Wat is de lengte van het touw? (De dikte is verwaarloosbaar. Zie de figuur.) 1984-A6



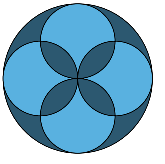
20

Een huisje bestaat uit een vierkant en een gelijkzijdige driehoek. Alle zijden hebben lengte 1. Wat is de lengte van de straal van de cirkel die precies om het huisje past? 1996-A2



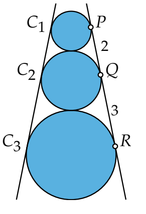
21

In een cirkel met straal 2 zijn vier kleinere cirkels getekend met straal 1; zie de figuur. Bereken de oppervlakte van het donkergekleurde deel van de figuur. 1994-B3



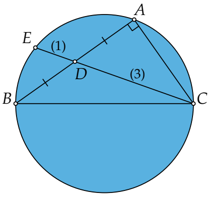
22

Drie cirkels C_1, C_2 en C_3 hebben twee gemeenschappelijke raaklijnen. C_1 en C_2 raken elkaar uitwendig, C_2 en C_3 raken elkaar uitwendig (zie de figuur). De raakpunten van de drie cirkels met één van de twee lijnen zijn respectievelijk P, Q en R, waarbij $PQ = 2$ en $QR = 3$. Bereken de straal van de kleinste cirkel. 1992-C3



23

Op een cirkel liggen drie punten A, B en C zo, dat $\angle CAB = 90°$. D is het midden van lijnstuk AB. De lijn CD snijdt de cirkel nogmaals in E. Verder is nog gegeven dat $CD : DE = 3 : 1$. Bereken de tangens van $\angle BCA$. 1988-B3



bij 19. Hoe lang zijn de rechte stukken touw?

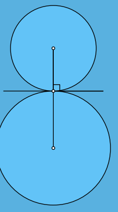
bij 20. Deze is te leuk om hints te geven!

bij 21. Teken ook het vierkant waarvan de hoekpunten de snijpunten zijn van de kleine cirkels.

bij 22. Verbindt P, Q en R met de middelpunten van de cirkels waar ze op liggen, en teken ook de verbindingslijn van die middelpunten.

bij 23. Teken BE en ga op zoek naar gelijkvormige driehoeken.

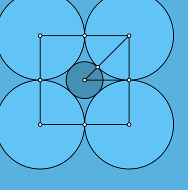
Om de vraagstukken van dit hoofdstuk op te kunnen lossen, moet je iets weten over cirkels. Bijvoorbeeld dat als twee cirkels elkaar raken, de verbindingslijn van de middelpunten door het raakpunt gaat. En dat een raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op de straal die het middelpunt met het raakpunt verbindt.



Verder is bij Opgave 23 de *Stelling van Thales* van belang, die zegt dat als A, B en C punten op een cirkel zijn waarvan het middelpunt M op BC ligt, $\angle CAB = 90°$ is. Ook de omgekeerde stelling geldt: als $\angle CAB = 90°$ dan ligt het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC op BC.

voorbeeldoplossing opgave 18

In de figuur hiernaast zie je dat de straal van de kleine cirkel samen met die van een van de grote cirkels de schuine zijde vormt van een $45° - 45° - 90°$-driehoek. De rechthoekszijden ervan hebben lengte 1, dus de schuine zijde heeft lengte $\sqrt{2}$ en de straal van de kleine cirkel is dus $\sqrt{2} - 1$.



24 De getallen 51760, 51982 en 52241 geven bij deling door een geheel getal $n > 1$ alle drie dezelfde rest. Bepaal n. 1983-A6

25 De drie positieve gehele getallen 30, 72 en N hebben de eigenschap dat het product van elk tweetal deelbaar is door het derde getal. Wat is de kleinst mogelijke waarde van N? 1999-A4

26 Door de zes cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6 in een willekeurige volgorde te zetten kun je getallen maken van zes cijfers waarin alle zes cijfers precies één keer voorkomen. Hoeveel van die getallen zijn er met de eigenschap dat de som van elke twee opeenvolgende cijfers niet deelbaar is door 2 en niet deelbaar is door 3? 1999-B2

27 Gegeven is een priemgetal p. De som van alle delers van het getal $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times p$ is 138240. Bepaal p.
(N.B.: De delers van bijvoorbeeld 12 zijn $1, 2, 3, 4, 6$ en 12. De getallen 1 en 12 tellen dus mee als delers!) 1984-B2

28 In deze opgave stellen a en b cijfers voor. We gebruiken de gewone decimale notatie. De getallen $25ab$, $63ab3$ en $44ab76$ hebben een gemeenschappelijke deler van twee cijfers. Bepaal die deler. 1988-C1

29 Alle getallen van zes verschillende cijfers die met de cijfers 1, 2, 3, 6, 8 en 9 worden geschreven, worden bij elkaar opgeteld. Bepaal van deze som de ontbinding in priemfactoren. 1992-C2

30 Het getal 36 is deelbaar door 2 opeenvolgende 2-vouden (bijvoorbeeld 4 en 6) en door 3 opeenvolgende 3-vouden (bijvoorbeeld 3, 6 en 9) maar niet door 4 opeenvolgende 4-vouden.
Bepaal het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door k opeenvolgende k-vouden voor $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. 1998-C2

31 Geef het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door 26, eindigt op 26 en waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 26. 2000-B1

bij 25. Wat zijn de priemfactoren van 30 en 72?

bij 26. Bepaal eerst eens alle oplossingen die met het cijfer 1 beginnen. Welk cijfer kan daarna komen? En daarna?

bij 27. Bepaal eerst alle delers van het product $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ en hun som.

bij 28. Kijk, net als in Opgave 24, naar handig gekozen combinaties van paren waardoor ab wegvalt.

bij 29. Bepaal eerst die som. Probeer regelmaat te ontdekken door de opgave te vereenvoudigen. Hoe zit het bijvoorbeeld met twee, of drie cijfers?

bij 30. Hoeveel priemfactoren 2, 3, 5 en 7 moet zo'n getal minstens bevatten?

bij 31. Kijk naar het getal dat je krijgt als je de laatste twee cijfers weglaat. Waardoor moet dit getal deelbaar zijn?

delen met rest

Als a en b positieve gehele getallen zijn, kun je het (gehele) *quotiënt* q en de *rest* r berekenen bij deling van a door b. Zo geven bijvoorbeeld $a = 2002$ en $b = 111$ als quotiënt $q = 18$ en als rest $r = 4$, want $2002 = 18 \times 111 + 4$.
In het algemeen zijn er bij elk tweetal positieve gehele getallen a en b een positief geheel getal q en een niet-negatief geheel getal r met

$$a = q \times b + r \qquad \text{met} \quad 0 \leq r < b$$

Als $r = 0$ is a deelbaar door b, en dan heet b een deler van a.

priemgetallen

Indien a groter dan 1 is en slechts de delers 1 en a heeft, dan heet a een *priemgetal*. De rij van alle priemgetallen, gerangschikt naar opklimmende grootte, begint als volgt: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$
Een van de redenen dat men 1 niet als priemgetal beschouwt, is dat elk geheel getal a groter dan 1 nu een *unieke ontbinding in priemfactoren* heeft: a is te schrijven als product van priemgetallen, en twee verschillende priemontbindingen van a bevatten precies dezelfde priemgetallen, alleen de volgorde waarin ze staan kan verschillen. Zou 1 ook een priemgetal zijn, dan zou deze stelling niet gelden, want dan zou je willekeurig veel 'priemfactoren' 1 kunnen toevoegen.

voorbeeldoplossing opgave 24

Er geldt $51760 = q_1 n + r$, $51982 = q_2 n + r$ en $52241 = q_3 n + r$ voor zekere q_1, q_2 en q_3. Kijken we naar *verschillen*, dan vallen de resten weg:

$$51982 - 51760 = 222 = (q_2 - q_1)n$$

en

$$52241 - 51982 = 259 = (q_3 - q_2)n$$

De getallen 222 en 259 hebben dus allebei n als deler. De enige deler groter dan 1 die deze twee getallen gemeen hebben, is het priemgetal 37, en dus moet $n = 37$ zijn.

32

Van een rechthoekige legpuzzel van m bij n stukjes is gegeven dat het aantal randstukjes inclusief de vier hoekstukjes precies 8% van het totaal aantal stukjes bedraagt.
Bepaal de mogelijke aantallen stukjes van de legpuzzel. 1996-C2

33

Toen oom Herman overleed was zijn leeftijd (in gehele jaren) precies $\frac{1}{34}$ van zijn geboortejaar. Zijn leukste verjaardagsfeest vierde oom Herman in 1969. Hoe oud werd hij toen? 1996-A1

34

Voor een positief geheel getal N geldt: $N/3$ is de derde macht van een geheel getal en $N/4$ is de vierde macht van een geheel getal.
Wat is het kleinste getal N met deze eigenschap? 1997-C1

35

Iemand zet een bedrag B op een spaarrekening tegen een vast rentepercentage per jaar. Hij ontvangt rente op rente, dat wil zeggen dat elk jaar het kapitaal met de ontvangen rente wordt verhoogd. In het eerste jaar groeit zijn kapitaal met 72 euro. In het tweede en derde jaar groeit zijn kapitaal in totaal met nog eens 182 euro. Bepaal B. 1995-C1

36

In een voor de eigenaar winstgevende geldwisselautomaat moet men of drie munten van 20 eurocent gooien of één munt van 50 eurocent. Voor drie 20-centsmunten krijg je één 50-centsmunt terug. Voor één 50-centsmunt krijg je twee 20-centsmunten terug. Harm, die de automaat moet testen, begint met 19 munten van 50 cent en 94 munten van 20 cent. Hij wisselt net zo lang tot het wisselen niet meer mogelijk is. Hoeveel munten heeft Harm dan in totaal in de automaat gegooid? 1994-C1

37

Een huisman doet boodschappen in de supermarkt. Telkens als hij een artikel pakt, toetst hij de prijs in op zijn zakrekenmachine. Maar in plaats van de opteltoets in te drukken na elk bedrag drukt hij steeds op de vermenigvuldigtoets. Bij de kassa, waar de bedragen keurig opgeteld worden, moet hij 7,35 euro betalen. De verstrooide huisman doet dat zonder protesteren omdat hij in het venster van zijn zakrekenmachine ook 7.35 heeft staan. Bereken de prijzen van de artikelen die hij kocht als verder gegeven is dat hij drie artikelen kocht die elk duurder waren dan 1 euro. 1989-C2

38

Op 20 maart 1990 vermenigvuldigt een wiskundelerares haar leeftijd met de leeftijd van haar echtgenoot en telt hierbij de som van de leeftijden van haar kinderen op. De uitkomst is 1545. Op 20 maart 1991 en op 20 maart 1992 herhaalt ze de berekening. Op 20 maart 1991 is de uitkomst 1627. Wat is de uitkomst op 20 maart 1992? (De samenstelling van het gezin is in de hele periode niet veranderd.) 1992-B2

bij 33. Zijn geboortejaar moet een 34-voud zijn.

bij 34. De ontbinding van N in priemfactoren bevat een aantal factoren 2 en een aantal factoren 3. Voor beide aantallen kun je een minimum bepalen.

bij 35. Bereken eerst het percentage door de jaarlijkse groeifactor te bepalen.

bij 36. Hoeveel munten moet je in de automaat stoppen om alleen het aantal 50-centsmunten met één te verminderen? En voor het aantal 20-centsmunten?

bij 37. Vertaal het probleem naar centen: de som van de getallen wordt dan 735, maar het product niet! Verder proberen na ontbinden van het product.

bij 38. Het is niet nodig om de leeftijd van iedereen en het aantal kinderen te weten!!

Bij de opgaven in dit hoofdstuk gaat het niet alleen om goed kunnen rekenen. Je moet ook door hebben wat het probleem precies is en hoe je het rekenwerk kunt beperken. Soms moet je een aantal mogelijkheden narekenen. Het is dan wel zaak om dat efficiënt te doen! En soms moet je extra opletten: heb je wel alle oplossingen gevonden?

voorbeeldoplossing opgave 32

Het totale aantal stukjes is gelijk aan mn. Het totaal aantal niet-randstukjes is gelijk aan $(m-2)(n-2)$. Voor de rand- en de hoekstukjes gaat het om precies 8% van de stukjes. Dat is $\frac{8}{100} = \frac{2}{25}$ en dus moet gelden: $mn - (m-2)(n-2) = \frac{2}{25}mn$. Uitwerken van deze vergelijking geeft $mn - 25m - 25n + 50 = 0$. Dat is ook te schrijven als $(m-25)(n-25) = 575$. Omdat m en n gehele positieve getallen moeten zijn, kunnen we verder zoeken door 575 te ontbinden: $575 = 5 \times 5 \times 23$. Dat leidt tot de volgende drie mogelijkheden:

1. $(m-25)(n-25) = 1 \times 575$,
   met als oplossing $m = 26$ en $n = 600$, dus 15600 stukjes,
2. $(m-25)(n-25) = 5 \times 115$,
   met als oplossing $m = 30$ en $n = 140$, dus 4200 stukjes,
3. $(m-25)(n-25) = 23 \times 25$,
   met als oplossing $m = 48$ en $n = 50$, dus 2400 stukjes.

Hieronder zie je een aantal breuken met hun decimale ontwikkeling, afgebroken na 50 decimalen.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{4}{7} &\approx 0.57142857142857142857142857142857142857142857142857\\
\tfrac{11}{12} &\approx 0.91666666666666666666666666666666666666666666666666\\
\tfrac{13}{17} &\approx 0.76470588235294117647058823529411764705882352941176\\
\tfrac{13}{20} &= 0.65000000000000000000000000000000000000000000000000\\
\tfrac{25}{59} &\approx 0.42372881355932203389830508474576271186440677966101\\
\tfrac{22}{23} &\approx 0.95652173913043478260869565217391304347826086956521\\
\tfrac{25}{68} &\approx 0.36764705882352941176470588235294117647058823529411\\
\tfrac{15}{16} &= 0.93750000000000000000000000000000000000000000000000\\
\tfrac{21}{22} &\approx 0.95454545454545454545454545454545454545454545454545
\end{aligned}
$$

De golvende 'ongeveer-gelijk'-tekens die bij zeven van de negen breuken staan, betekenen dat de breuk en de afgebroken decimale ontwikkeling niet helemaal aan elkaar gelijk zijn. Het linkerlid is altijd groter, maar het verschil is, omdat we de ontwikkeling bij de vijftigste decimaal afbreken, kleiner dan 10^{-50}. Door nog meer decimalen toe te voegen, kun je zo'n breuk steeds beter benaderen.

Bij de twee gevallen dat er gelijktekens staan, zijn linker- en rechterlid wél exact aan elkaar gelijk. In feite kun je de nullenrij daar net zo goed weglaten: $\frac{13}{20} = 0.65$ en $\frac{15}{16} = 0.9375$.

Hoe zit het met de andere zeven ontwikkelingen? Zijn we niet ver genoeg gegaan, en kom je ook daar op een zeker moment alleen nog maar nullen tegen zodat de ontwikkeling afbreekt? Of zal dat nooit gebeuren, en gaat de ontwikkeling oneindig lang door?

Bij de tweede breuk $\frac{11}{12}$ en de achtste breuk $\frac{21}{22}$ zie je onmiddellijk dat er regelmaat in de ontwikkeling zit. De rij zessen in de ontwikkeling van $\frac{11}{12}$ zal wel nooit afbreken, en hetzelfde zal wel gelden voor de afwisseling van vieren en vijven bij $\frac{21}{22}$. Maar in deze gevallen zie je ook dat de periodiciteit niet direct na de decimale punt hoeft te beginnen: bij $\frac{11}{12}$ begint het repeterende stuk pas bij de derde decimaal, en bij $\frac{21}{22}$ bij de tweede. Bij de eerste breuk $\frac{4}{7}$ begint het repeterende stuk wél direct na de punt.

Het is handig om zo'n repeterend stuk aan te geven door er een streep boven te zetten. Met die notatie kun je de bovenstaande tabel als volgt herschrijven, aangenomen dat de gevonden periodiciteiten inderdaad altijd zo door blijven gaan.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{4}{7} &= 0.\overline{571428} \\
\tfrac{11}{12} &= 0.91\overline{6} \\
\tfrac{13}{17} &= 0.\overline{7647058823529411} \\
\tfrac{13}{20} &= 0.65 \\
\tfrac{25}{59} &= 0.4237288135593220338983050847457627118644067796??? \\
\tfrac{22}{23} &= 0.\overline{9565217391304347826086} \\
\tfrac{25}{68} &= 0.36\overline{7647058823529411} \\
\tfrac{15}{16} &= 0.9375 \\
\tfrac{21}{22} &= 0.9\overline{54}
\end{aligned}
$$

Er is nog één plaats in de tabel waar we vraagtekens hebben staan: de getoonde decimalen van de ontwikkeling van $\frac{25}{59}$ laten geen periodiciteit zien. Komt die er wel als we verder doorgaan? En zo ja, hoe lang zal dat dan nog duren? En hoe berekenen wij (of een computer) eigenlijk de opvolgende cijfers van zo'n decimale ontwikkeling?

Dat zijn de vragen waar het hier om draait: hoe luidt het *algoritme* (dat wil zeggen het rekenrecept) waarmee je bij een gegeven breuk de bijbehorende decimale ontwikkeling kunt bepalen, en wat zijn de eigenschappen ervan. Maar eerst is het goed om precies vast te leggen wat we onder een breuk verstaan:

definitie

Een breuk is een tweetal gehele getallen t (de teller van de breuk) en n (de noemer van de breuk), waarbij n voldoet aan $n \neq 0$. Geldt bovendien $0 < t < n$ dan heet de breuk een echte breuk. De notatie voor zo'n breuk is t/n of $\dfrac{t}{n}$.

Let wel: we eisen niet dat de teller en de noemer geen delers gemeen hebben. Zo is $2/6$ net zo goed een breuk als $1/3$. Die twee breuken stellen natuurlijk wel hetzelfde getal voor, en hun decimale ontwikkelingen zijn ook gelijk, namelijk $0.33333\ldots = 0.\overline{3}$.

We gaan de verschillende rekenregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken hier natuurlijk niet behandelen. Je weet ongetwijfeld ook dat je elke positieve breuk kunt opsplitsen in een geheel getal en een echte breuk. Zo kun je bijvoorbeeld $337/15$ schrijven als $22 + 7/15$. De decimale ontwikkeling van $337/15$ bestaat dus uit 22 vóór de decimale punt, en de ontwikkeling van $7/15$ erachter. Als we nader onderzoek willen doen naar de eigenschappen van decimale ontwikkelingen van breuken, kunnen we ons daarom beperken tot echte breuken.

het staartdelingsalgoritme

Het omzetten van een breuk in een decimale ontwikkeling gaat via een *staartdeling*. Maar als je een staartdeling uitvoert bij onze 'probleembreuk' $\frac{25}{59}$ om op die manier meer dan vijftig decimalen te berekenen, heb je een flink stuk papier nodig. Rekenen kan de computer beter dan wij als we hem maar de juiste instructies geven, en dus gaan we eens kijken hoe we zo'n staartdeling tot een computerprogramma kunnen ombouwen.

Om te beginnen schrijven we de staartdeling enigszins anders op, namelijk in tabelvorm. Dat is niet alleen typografisch handiger, maar het zal ons ook een goed inzicht geven in wat een staartdeling eigenlijk is. In de afgebeelde tabel hebben we onze probleembreuk $25/59$ bij de kop genomen. Kijk zelf wat er gebeurt. In het staartdelingsalgoritme wordt de tabel van links naar rechts kolom voor kolom ingevuld. Herken je er de bekende staartdeling nog in? Zo nee, zet die er dan naast om te zien wat bij alle stappen gebeurt. De gezochte decimalen $0.4237288\ldots$ staan in de tabel op de onderste rij.

staartdelingsalgoritme voor $25/59$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	…
a_i	25	250	140	220	430	170	520	480	…
b_i	0	236	118	177	413	118	472	472	…
c_i	25	14	22	43	17	52	48	8	…
d_i	0	4	2	3	7	2	8	8	…

We geven het staartdelingsalgoritme voor een echte breuk t/n nu in formulevorm. Het bestaat uit twee onderdelen, een *beginstap* waarin de nulde kolom (dat wil zeggen de kolom met $i = 0$) wordt ingevuld, en een *iteratiestap* waarin beschreven wordt hoe je uit de $(i-1)$-e kolom de i-de kolom maakt. Door die iteratiestap achtereenvolgens uit te voeren voor $i = 1, 2, 3, \ldots$ kun je de tabel kolom voor kolom net zo ver invullen als je wilt, en daaruit de decimale ontwikkeling $0.d_1d_2d_3\ldots$ van t/n aflezen.

staartdelingsalgoritme voor een echte breuk t/n
beginstap: Stel $a_0 = t$, $b_0 = 0$, $c_0 = t$, $d_0 = 0$.
iteratiestap: Stel

$$a_i = 10 \times c_{i-1} \tag{8.1}$$

bepaal daarna het grootste gehele getal d_i zo, dat

$$d_i \times n \le a_i \tag{8.2}$$

en stel vervolgens

$$b_i = d_i \times n \quad \text{en} \quad c_i = a_i - b_i \tag{8.3}$$

Uit (8.2) en (8.3) volgt dat c_i de rest na deling van a_i door n is, en dat

$$0 \le c_i < n \qquad \text{voor elke } i \tag{8.4}$$

Het algoritme dat we hierboven gegeven hebben, kun je, als je daarin wat ervaring hebt, direct in een spreadsheetprogramma invoeren of op een programmeerbare rekenmachine zetten. Op die manier kun je nagaan dat de decimale ontwikkeling van onze 'probleembreuk' $\frac{25}{59}$ periodiek is met een periode van 58 decimalen, en dat die periode direct na de decimale punt begint.

E5

Controleer de gegeven decimale ontwikkelingen voor $4/7$ en $13/17$ door met de hand de bijbehorende tabel in te vullen totdat de periodiciteit optreedt.

E6

Wat kun je zeggen over de noemers n van de (echte) breuken die horen bij een decimale ontwikkeling die afbreekt (dat wil zeggen vanaf zeker moment uitsluitend uit nullen bestaat)?

E7

Wat kun je zeggen over de noemers n van de (echte) breuken waarvan de periodiciteit in de decimale ontwikkeling niet direct na de decimale punt begint (zoals bijvoorbeeld $0.16666\ldots = 0.1\overline{6}$)?

39 Het aantal deelnemers aan een marathon ligt tussen de 10 en 100. Ze dragen de startnummers 1, 2, 3, enzovoort. Een van de deelnemers merkt op dat de som van de nummers die kleiner zijn dan zijn eigen startnummer gelijk is aan de som van de nummers die groter zijn dan zijn eigen startnummer. Wat is zijn startnummer en hoeveel lopers deden er mee aan de marathon? 1988-C2

40 De deelnemers aan een hardloopwedstrijd dragen de startnummers 1 tot en met 97. Een van de lopers merkt op dat de som van alle even nummers gelijk is aan de som van alle oneven startnummers. Daarbij telt hij zijn eigen startnummer niet mee. Wat is zijn startnummer? 1997-B1

41 Een rij getallen wordt als volgt gemaakt. Het eerste getal is 7. Het tweede getal vind je door 7 te kwadrateren, de som van de cijfers van het kwadraat te nemen en daar nog eens 1 bij op te tellen. Het tweede getal wordt dus 14 want $7^2 = 49$ en $4 + 9 + 1 = 14$. Het derde getal vind je op eenzelfde manier uit het tweede getal: $14^2 = 196$ en $1 + 9 + 6 + 1 = 17$, dus het derde getal is 17. Op deze manier wordt telkens een volgend getal in de rij gemaakt. Wat is het 1999-ste getal in de rij? 1999-A6

42 Voor de rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ geldt $a_0 = 1$ en $a_n + a_{n-1} = 2n - 1$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ Bereken a_{1993}. 1993-A3

43 Voor $f(x)$ geldt $f(1) = 0$ en $f(2) = 1$. Verder geldt voor alle $x > 2$ dat

$$f(x) = x - f(x-1) - f(x-2)$$

Bereken $f(1990)$. 1990-B2

44 In een rij van 1990 reële getallen is elk getal – met uitzondering van het eerste en laatste getal – gelijk aan de som van zijn twee buurgetallen. De som van de eerste 16 getallen is gelijk aan 18 en de som van de laatste 20 getallen is gelijk aan 24.
Bepaal het eerste getal van deze rij. 1990-C3

bij 40. Is het nummer van de opmerkzame loper even of oneven?

bij 41. Schrijf nog wat meer termen van de rij uit.

bij 42. Schrijf ook van deze rij een wat langer beginstuk op. Wat merk je op over a_{n+1} en a_{n-1}? Kun je dat ook bewijzen?

bij 43. Zelfde hint als bij Opgave 42: eerst flink wat termen uitschrijven. Zie je een verband tussen $f(x)$ en $f(x+3)$ verschijnen?

bij 44. Noem de eerste twee getallen a en b, en druk de volgende getallen van de rij uit in a en b. Probeer een patroon te ontdekken!

Rijen getallen komen vaak voor in de wiskunde. Een belangrijk type is de *rekenkundige rij*. Bij zo'n rij is het verschil tussen twee opeenvolgende getallen constant. Die rij komt bij meer vragen in dit hoofdstuk voor dan je op het eerste gezicht zou denken. De eerste twee vragen gaan allebei over de bekendste rekenkundige rij, de rij $1, 2, 3, 4, \ldots$. Bij beide vragen heb je de som van een deel van die rij nodig. Dat is een oud probleem waar al heel vroeg een oplossing voor was. Het verhaal gaat dat de grote wiskundige Gauss als jongen op school aan het werk gezet werd. Hij moest alle getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar optellen. Daar was hij snel mee klaar: 5050, want hij vond zelf de regel voor het oplossen van dat probleem:

$$\begin{array}{rcrcccrcr} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & & 101 & & & & 101 & & 101 \end{array}$$

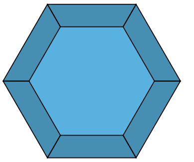
Zijn idee was als volgt: schrijf de som in gedachten twee maal op: eenmaal van 1 tot en met 100 en daaronder van 100 tot en met 1. Verticaal krijg je dan telkens twee getallen die samen 101 zijn. De totale som wordt dus 100 maal 101, en dat gedeeld door twee omdat je alle getallen twee maal hebt meegeteld. Algemeen geldt dus: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.
Bij de vragen 41, 42, 43 en 44 komen weer andere rijen ter sprake.

voorbeeldoplossing opgave 39

Als de loper startnummer k heeft dan is som van de lagere startnummers $\frac{1}{2}(k-1)k$, dus de totale som van alle startnummers is $2 \times \frac{1}{2}(k-1)k + k = k^2$. Dit is ook gelijk aan $\frac{1}{2}n(n+1)$, waarbij n het totale aantal lopers is. Er geldt dus $n(n+1) = 2k^2$. Omdat n en $n+1$ geen delers groter dan 1 gemeenschappelijk hebben, moet van de getallen n en $n+1$ een van beide een kwadraat, en de ander twee maal een kwadraat zijn. Omdat bovendien $10 < n < 100$ is, kunnen we de mogelijkheden snel nagaan. We vinden $n = 49 = 7^2$ als enige oplossing, met $k = 35 = 5 \times 7$ als het startnummer van de opmerkzame deelnemer.

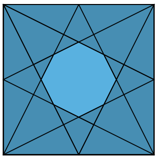
45

Twee regelmatige zeshoeken zijn verbonden door ‘spaken’ van gelijke lengte. De spaken delen de hoeken van de grote zeshoek middendoor. De kleine zeshoek heeft zijden van lengte 1. De oppervlakte van de grote zeshoek is twee maal de oppervlakte van de kleine zeshoek. Hoe lang is elke spaak? 1988-A3



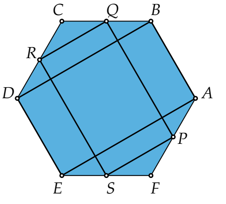
46

In een vierkant met zijde 1 verbindt men elk hoekpunt met de middens van de zijden waar dat hoekpunt niet op ligt. Wat is de oppervlakte van de achthoek die zo ontstaat? 1989-C3



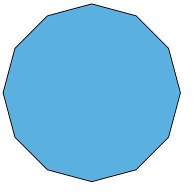
47

In een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ zijn twee rechthoeken getekend, de rechthoek $ABDE$ en de rechthoek $PQRS$, waarbij P, Q, R en S de middens zijn van respectievelijk de zijden FA, BC, CD en EF, zie de figuur. Wat is de verhouding Oppervlakte$(ABDE)$: Oppervlakte $(PQRS)$? 1995-A5



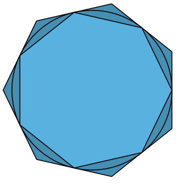
48

Hoeveel verschillend gevormde driehoeken kun je krijgen als je drie hoekpunten van een regelmatige twaalfhoek met elkaar verbindt? 1983-C2



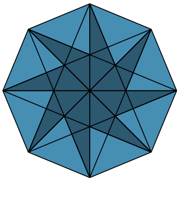
49

Gegeven is een cirkel met een omgeschreven en een ingeschreven regelmatige n-hoek. De verhouding van de oppervlakten van die twee n-hoeken is $4 : 3$. In de figuur is $n = 7$ genomen, maar dat is niet de correcte waarde. Wat is dan wel de juiste waarde van n? 1983-A1



50

De zijden van een regelmatige achthoek hebben de lengte 2. In de achthoek wordt een aantal diagonalen getrokken (zie de figuur). Bepaal de oppervlakte van de donkergekleurde ster. 1998-B3



bij 46. Verdeel de achthoek in taartpunten.

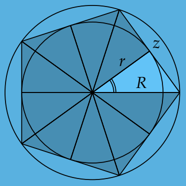
bij 47. Zijn de twee rechthoeken misschien gelijkvormig?

bij 48. Geef de zijden van zo'n driehoek aan met a, b en c, met $a \le b \le c$. Wat zijn nu de mogelijkheden?

bij 49. Hoe verhouden de zijden van die n-hoeken zich?

bij 50. Kijk naar de lichtgekleurde driehoeken. Kun je hun oppervlakte bepalen?

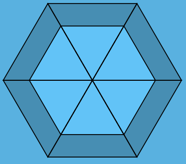
De opgaven in dit hoofdstuk gaan over regelmatige veelhoeken. Alhoewel – is de achthoek in opgave 46 wel helemaal regelmatig? Die vraag is gelijk een kleine hint voor de oplossing.



De meeste veelhoeken in dit hoofdstuk zijn echter wel degelijk regelmatig, dat wil zeggen dat alle zijden even lang en alle hoeken even groot zijn. Elke regelmatige n-hoek heeft een ingeschreven cirkel en een omgeschreven cirkel. Als z de lengte van de zijden, r de straal van de ingeschreven cirkel, en R de straal van de omgeschreven cirkel is, dan volgt uit de definities van de sinus en de tangens (met hoeken gemeten in graden) dat $\sin\frac{180}{n} = \frac{z/2}{R}$ en $\tan\frac{180}{n} = \frac{z/2}{r}$ zodat

$$z = 2R\,\sin\frac{180}{n} = 2r\,\tan\frac{180}{n}$$

voorbeeldoplossing opgave 45



De oppervlakte van de grote zeshoek is 2 maal die van de kleine, dus de zijden van de grote zeshoek zijn $\sqrt{2}$ maal zo groot als die van de kleine, die allemaal 1 zijn. Trek je de spaken door tot het middelpunt, dan zie je dat elke zeshoek opgebouwd is uit zes gelijkzijdige driehoeken. De lengte van een spaak is dus $\sqrt{2} - 1$.

51

We bekijken de rij $1, 5, 9, 13, \ldots$ van de viervouden plus 1. In deze rij komt ook het getal 1997 voor. Deze getallen worden als volgt in een schema gezet:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 5 & 9 & 13 & & & \\
 & & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 & & \\
 & 37 & 41 & 45 & 49 & 53 & 57 & 61 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Het getal 57 staat in de vierde regel op de zesde plaats. In welke regel en op welke plaats in die regel staat 1997? 1997-A4

52

De getallen $1, 2, 3, 4, \ldots$ worden uitgeschreven in een patroon zoals in de figuur hieronder. Op het snijpunt van de vierde rij en de vierde kolom staat het getal 13.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 9 & \rightarrow & 10 & & 25 \ \rightarrow \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
4 & \leftarrow & 3 & & 8 & & 11 & & 24 \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
5 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 7 & & 12 & & 23 \\
 & & & & & & \downarrow & & \uparrow \\
16 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 14 & \leftarrow & 13 & & 22 \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow \\
17 & \rightarrow & 18 & \rightarrow & 19 & \rightarrow & 20 & \rightarrow & 21
\end{array}$$

Welk getal staat op het snijpunt van de 25^e rij en de 25^e kolom? 1995-A1

53

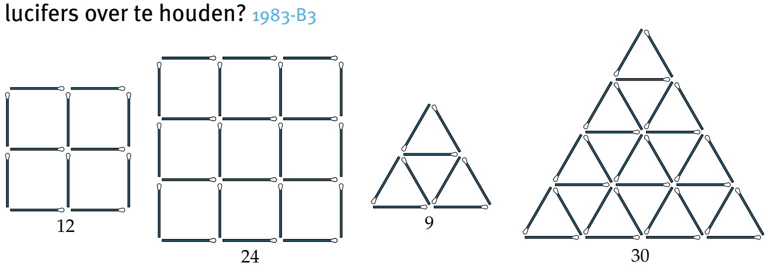
In het schema hieronder moeten op de plaatsen van de puntjes en het vraagteken getallen staan. Te beginnen met de tweede rij is elk getal gelijk aan de som van de twee getallen die er links en rechts schuin boven staan.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1400 & & \ldots & & ? & & \ldots & & -1700 \\
 & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\
 & & 11 & & \ldots & & -3 & & \\
 & & & \ldots & & \ldots & & & \\
 & & & & 1988 & & & &
\end{array}$$

Welk getal moet op de plaats van het vraagteken staan? 1988-A4

54

Hieronder staat een aantal voorbeelden van vierkante en driehoekige schema's die je met lucifers kunt leggen. Onder elk schema staat hoeveel lucifers je ervoor nodig hebt. Wat is het minimale aantal lucifers waarmee je zowel een vierkant schema als een driehoekig schema kunt leggen zonder lucifers over te houden? 1983-B3



bij 52. Het grondpatroon is een steeds groter wordend vierkant. Waar staan de getallen die een kwadraat zijn?

bij 53. Noem de onbekende getallen op de bovenste rij a, b en c, en probeer vergelijkingen op te stellen waaraan die getallen voldoen.

bij 54. Noem de zijden van zo'n vierkant v en de zijden van zo'n driehoek d. Druk de benodigde aantallen lucifers uit in v en d. Bij de driehoek komt weer de rekenkundige rij $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ tevoorschijn, die ook in Hoofdstuk 6 behandeld is. Je krijgt zo een vergelijking waaraan v en d voldoen, en waarvan je door wat te puzzelen de kleinste oplossing moet zien te vinden.

Het gaat er bij de vraagstukken uit dit hoofdstuk om de structuur die in de meetkunde zit te vertalen naar de getallen waarover iets gevraagd wordt. Dat is vaak niet zo lastig, maar je moet wel heel precies te werk gaan. Een kleine vergissing kan tot gevolg hebben dat je het verkeerde antwoord krijgt, en bij de Eerste Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade worden alleen maar de antwoorden gecontroleerd. Nauwkeurigheid is dus een voorwaarde voor succes.

voorbeeldoplossing opgave 51

De *aantallen* getallen die op elke regel staan, zijn respectievelijk $1, 3, 5, 7, \ldots$. Als je een tikkeltje anders naar het patroon kijkt, zie je dat er op de eerste twee regels samen precies $2^2 = 4$ getallen staan, dat er op de eerste drie regels samen precies $3^2 = 9$ getallen staan, en dat er in het algemeen op de eerste n regels samen precies n^2 getallen staan (zie ook opgave 52). Omdat $1997 = 4 \times 499 + 1$ is 1997 het 500^{e} getal in de rij. Het grootste kwadraat kleiner dan 500 is $484 = 22^2$. Het getal 1997 staat dus in de 23^{e} regel op de 16^{e} plaats.

We pakken de draad van Hoofdstuk 8 (zie bladzijde 26) weer op. Dat alle breuken in de tabel waarmee we dat hoofdstuk begonnen zijn, ontwikkelingen hebben die vanaf een zekere decimaal periodiek zijn, is geen toeval:

stelling 1

De decimale ontwikkeling van iedere breuk is vanaf een zekere decimaal periodiek.

Bewijs: We beperken ons tot echte breuken, en gebruiken de notaties van het staartdelingsalgoritme op bladzijde 28. Volgens (8.4) op bladzijde 28 geldt voor elke rest c_i dat $0 \leq c_i < n$. Na hoogstens $n + 1$ stappen moet er dus een rest verschenen zijn die al eens eerder aan de beurt is geweest. Stel dat dit voor het eerst gebeurde in de kolommen i en $i + k$, dus dat $c_i = c_{i+k}$, met $0 \leq i < i + k \leq n$. Maar dan is de gehele $(i + k + 1)$-e kolom gelijk aan de $(i + 1)$-e kolom, en dus zal de ontwikkeling zich vanaf dat moment herhalen, en wel met periodelengte k.

Hiermee is Stelling 1 bewezen. In feite kunnen we nog iets meer zeggen over de periodelengte. Er zijn namelijk twee mogelijkheden: óf er treedt ergens een rest $c_i = 0$ op, en dan breekt de decimale ontwikkeling af (alle decimalen zijn vanaf dat moment 0), óf de rest 0 treedt nooit op, en dan is de periodelengte dus hoogstens $n - 1$. In onze voorbeelden hebben we gezien dat de waarde $n - 1$ inderdaad op kan treden, maar ook dat de periodelengte kleiner kan zijn.

formules, formules, formules ...

Wie is er bang voor formules? Wij niet! Onvervaard schrijven we het staartdelingsalgoritme in de tabel met formules uit voor een echte breuk t/n (dus met $0 < t < n$). Daarbij ontdekken we al heel gauw een patroon:

staartdelingsalgoritme voor t/n

i	0	1	2	3	...
a_i	t	$10t$	$100t - 10d_1 n$	$1000t - (100d_1 + 10d_2)n$	...
b_i	0	$d_1 n$	$d_2 n$	$d_3 n$	...
c_i	t	$10t - d_1 n$	$100t - (10d_1 + d_2)n$	$1000t - (100d_1 + 10d_2 + d_3)n$	...
d_i	0	d_1	d_2	d_3	...

Je ziet in dit schema vanzelf algemene formules voor a_i en c_i verschijnen, maar het is nog veel interessanter om er direct de al eerder gevonden formule $0 \leq c_i < n$ (zie bladzijde 28) bij te betrekken. Voor $i = 1$ geeft dit:

$$0 \leq 10t - d_1 n < n$$

Deel alles door $10n$

$$0 \leq \frac{t}{n} - \frac{d_1}{10} < \frac{1}{10}$$

tel vervolgens bij alle drie de leden $\frac{d_1}{10}$ op, en je krijgt:

$$\frac{d_1}{10} \leq \frac{t}{n} < \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10}$$

Wanneer je net zo'n soort recept toepast op c_2 (nu delen door $100n$ en $\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100}$ optellen), krijg je

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} \leq \frac{t}{n} < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{1}{100}$$

In het linkerlid staat precies de decimale ontwikkeling van t/n, afgebroken na twee decimalen, en het rechterlid laat zien dat die ontwikkeling de breuk t/n benadert met een nauwkeurigheid die groter is dan $1/100$.

In het algemeen zie je op zo'n manier dat de decimale ontwikkeling na k stappen de breuk t/n benadert met een nauwkeurigheid die groter is dan $1/10^k$. Niet verwonderlijk natuurlijk, maar wel fraai dat het zo gemakkelijk uit de formules valt af te leiden. Als je dit ook een mooie afleiding vindt, heb je echt gevoel voor wiskunde! We vatten dit resultaat samen in een stelling:

stelling 2

Als t/n een echte breuk is, en x_k is de na k decimalen afgebroken decimale ontwikkeling van t/n, dan geldt

$$x_k \leq \frac{t}{n} < x_k + \frac{1}{10^k}$$

allemaal negens

Een bijzondere 'decimale ontwikkeling' is $0.999999\ldots = 0.\overline{9}$. Zou daar ook een echte breuk bij horen? Als dat zo was, dan zou er dus een echte breuk t/n bestaan waarvoor dit de bijbehorende decimale ontwikkeling is. Als de noemer n een getal van k cijfers is, geldt $n < 10^k$, en dus is

$$\frac{t}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{10^k} = 1 - 0.\underbrace{000\ldots01}_{k} = 0.\underbrace{999\ldots9}_{k} = x_k$$

Dan zou dus gelden dat $t/n < x_k$, in tegenspraak met de ongelijkheid $x_k \leq t/n$, die volgens Stelling 2 voor elke k geldt. Met dit *bewijs uit het ongerijmde* hebben we aangetoond dat er geen echte breuk is waarvan $0.\overline{9}$ de decimale ontwikkeling is.

De methode is zelfs nog algemener bruikbaar, want op net zo'n manier kun je laten zien dat er ook geen echte breuk bestaat waarvan de decimale ontwikkeling pas na een zeker aantal decimalen uitsluitend uit negens bestaat. In de volgende paragraaf zullen we aantonen dat bij alle andere decimale ontwikkelingen die op den duur periodiek worden, wél breuken behoren.

van periodieke decimale ontwikkeling naar breuk

We formuleren het hoofdresultaat van deze paragraaf weer als een stelling:

stelling 3

Iedere decimale ontwikkeling die vanaf een zekere decimaal periodiek is, maar die niet vanaf een zekere decimaal alleen maar uit negens bestaat, is de decimale ontwikkeling van een breuk.

We zullen deze stelling bewijzen door een expliciet recept te geven om zo'n breuk te vinden. We nemen daartoe eerst een heel eenvoudig voorbeeld, namelijk de ontwikkeling

$$A = 0.00001000010000100001\ldots = 0.\overline{00001}$$

waarin telkens vier nullen gevolgd worden door een 1. Je hoeft niet veel te puzzelen om te controleren dat dit de ontwikkeling is van de breuk $\frac{1}{99999}$. Het algoritme geeft namelijk:

staartdelingsalgoritme voor $1/99999$

i	0	1	2	3	4	5	6	...
a_i	1	10	100	1000	10000	100000	10	...
b_i	0	0	0	0	0	99999	0	...
c_i	1	10	100	1000	10000	1	10	...
d_i	0	0	0	0	0	1	0	...

Omdat de kolom bij $i = 6$ gelijk is aan die bij $i = 1$, treedt vanaf dat moment periodiciteit op, en dus levert deze breuk inderdaad de decimale ontwikkeling A op. Maar nu zien we ook hoe we een breuk kunnen vinden bij iedere andere periodieke ontwikkeling met een periodelengte van 5 waarvan de periodiciteit direct na de decimale punt begint. Zo vinden we bijvoorbeeld bij

$$0.142671426714267014267\ldots = 0.\overline{14267}$$

de breuk $\frac{14267}{99999}$. Het is leerzaam om het in dit geval zelf te controleren door de tabel voor het algoritme op te stellen.
Bij iedere andere periodelengte kun je net zo te werk gaan. Zo geldt bijvoorbeeld

$$0.571428571428571428\ldots = 0.\overline{571428} = \frac{571428}{999999}$$

Controleer het maar! Die laatste breuk kun je overigens vereenvoudigen tot $\frac{4}{7}$ want $571428 = 4 \times 142857$ en $999999 = 7 \times 142857$. Door zo'n vereenvoudiging krijg je altijd een breuk waarvan de decimale ontwikkeling dezelfde is als die van de onvereenvoudigde breuk.

Ten slotte is de vraag nog open hoe we een breuk moeten vinden als de periodiciteit niet direct na de decimale punt begint. Dat is simpel. We geven een voorbeeld: stel dat we de breuk willen vinden bij de ontwikkeling $x = 0.1\overline{6}$. Dan is $10x = 1.\overline{6} = 1 + 0.\overline{6} = 1 + (6/9) = 1 + (2/3) = 5/3$ en dus is $x = 5/30$.

E8

Schrijf de volgende periodieke decimale ontwikkelingen als een breuk

a. $0.\overline{6}$

b. $0.\overline{36}$

c. $0.\overline{2002}$

d. $0.11\overline{27}$

e. $0.999\overline{123}$

E9

Een alternatief staartdelingsalgoritme krijg je wanneer je de ongelijkheid (8.2) op bladzijde 28 vervangt door $d_i \times n < a_i$. Laat zien dat er in dat geval wél decimale ontwikkelingen op kunnen treden die alleen maar op negens eindigen, maar dat er nu geen ontwikkelingen voorkomen die afbreken.
Ga in het bijzonder na welke breuken corresponderen met de decimale ontwikkelingen $0.9999\ldots = 0.\overline{9}$ en $0.499999\ldots = 0.4\overline{9}$.

E10

Bij welke echte breuken levert het alternatieve staartdelingsalgoritme van de vorige opgave een andere decimale ontwikkeling dan het oorspronkelijke algoritme?

E11

Wij rekenen altijd in het tientallige stelsel, maar andere talstelsels zijn net zo goed mogelijk. In de computerkunde wordt bijvoorbeeld veel gewerkt in het tweetallige (binaire) stelsel, waarin alleen de cijfers 0 en 1 gebruikt worden (zie ook bladzijde 11). Ga na hoe je het staartdelingsalgoritme in dat geval moet aanpassen, en geef de binaire ontwikkeling van de breuk $2/5$ (die in het binaire stelsel als $10/101$ wordt geschreven).

55

Op een tafel liggen 1996 kaartjes uitgespreid, genummerd van 1 tot en met 1996. De achterzijde van de kaartjes is niet te zien, maar je weet dat op elke achterzijde een letter staat. Jan beweert:

– bij elk tienvoud staat op de achterzijde de letter A, en

– elke kaart met een letter B op de achterzijde heeft een nummer lager dan 1900.

René heeft gecontroleerd dat de bewering juist is.

Hoeveel kaartjes heeft hij daarvoor minimaal moeten omkeren? 1996-A3

56

In de uitverkoop kopen drie echtparen boeken. Ieder van de zes personen koopt en betaalt voor zichzelf en ieder koopt slechts boeken van één prijs en wel precies zoveel boeken als het aantal euro's dat zo'n boek kost (alle prijzen zijn in gehele aantallen euro's). Voor elk echtpaar geldt dat de totale uitgaven van de twee partners precies 99 euro's verschillen. De drie mannen kopen in totaal 26 boeken.

Hoeveel boeken kopen de drie vrouwen in totaal? 1988-B4

57

In een kring staan n personen $P_1, P_2, \cdots, P_n$, waarbij n groter is dan 20. Nu begint een aftelspelletje met de woorden "ga weg", te beginnen met P_1. Wie met "weg"wordt aangeduid is af en verdwijnt uit de kring. Zo verdwijnen achtereenvolgens $P_2, P_4, \cdots$ enzovoort. Ten slotte blijkt alleen P_n overgebleven te zijn.

Bepaal de kleinste waarde van n waarvoor dit het geval is. 1992-B3

58

Van vier positieve reële getallen a, b, c en d wordt elk tweetal met elkaar vermenigvuldigd. Vijf van de zes uitkomsten zijn 2, 3, 4, 5 en 6.

Wat is de zesde uitkomst? 1994-B4

59

Een jury van 100 personen heeft drie merken cola A, B en C beoordeeld. Ieder van deze proefpersonen moest daarbij voor zichzelf de drie merken van hoog naar laag rangschikken. Door 76 personen werd merk A hoger gewaardeerd dan merk B en door 67 personen merk B hoger dan C. Toch waardeerden sommige personen C hoger dan A.

Hoeveel personen kunnen dit maximaal zijn? 1995-A4

60

Bij een bepaald spel krijgen 75 personen, onder wie Herman en Rob, allemaal een rood, een wit of een blauw lapje stof op hun rug gespeld. Ze lopen zwijgend in een zaal rond en bekijken elkaars ruggen. Herman telt in totaal precies driemaal zoveel rode als witte lapjes, terwijl Rob precies tweemaal zoveel blauwe als witte lapjes ziet.

Hoeveel lapjes zijn er van iedere kleur uitgedeeld? 1995-B2

bij 56. Wat ieder in euro's besteedt is een kwadraat. Bij elk echtpaar is het verschil van twee kwadraten 99. Ontbind dat verschil.

bij 57. Verdeel het aftellen in rondes, waarbij elke ronde eindigt zodra je P_n passeert. Wat betekent het voor n dat P_n niet in de eerste ronde afvalt? En niet in de tweede?

bij 58. Verdeel de uitkomsten in paren met gelijk product.

bij 59. Bekijk de personen die B hoger waardeerden dan A en ook naar de personen die C hoger waardeerden dan B.

bij 60. Noem het aantal rode, witte en blauwe lapjes r, w en b. Leid betrekkingen af tussen r en w (via Herman) en tussen b en w (via Rob).

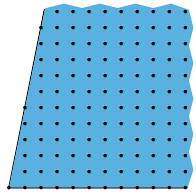
Redeneren leer je door het veel te doen. Een opgave goed lezen en je afvragen: Wat wordt er precies gevraagd? Welke gegevens heb je daarvoor nodig ? Zoek verbanden tussen de gegevens van de opgave en trek daaruit conclusies. Vaak kun je een overvloed aan mogelijkheden door te redeneren terugbrengen tot enkele gevallen die gemakkelijk zijn na te gaan. Bij de opgaven in dit hoofdstuk hoef je geen lange berekeningen te maken, maar een slimme redenering leid je, soms na wat simpel rekenwerk, tot de oplossing.

voorbeeldoplossing opgave 55

René moet in ieder geval alle kaartjes met tienvouden kleiner dan of gelijk aan 1996 op de letter A controleren, en dat zijn er 199. Voor de letter B moet hij dan nog de kaartjes met de nummers 1901 tot en met 1996 die géén tienvoud zijn controleren, en dat zijn er 87. In totaal moet hij dus minimaal 286 kaartjes omkeren.

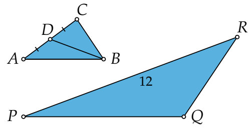
61

Van een driehoek hebben de hoekpunten de coördinaten $(0, 0)$, $(19, 0)$ en $(19, 95)$. Hoeveel roosterpunten (punten met gehele coördinaten) liggen er binnen of op de rand van de driehoek? (De figuur toont slechts een deel van de driehoek.) 1995-B4



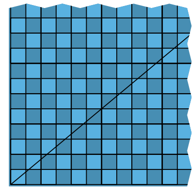
62

Van de driehoeken ABC en PQR is gegeven dat $PQ = 2AB$, $QR = 2BC$ en $\angle PQR = 180° - \angle ABC$ en $PR = 12$. Zij D het midden van AC. Hoe lang is BD? 1989-A4



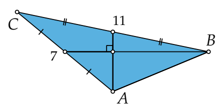
63

Een rechthoekige vloer is geheel belegd met vierkante tegels: 1082 in de lengte en 902 in de breedte. Hoeveel tegels doorsnijdt een diagonaal van de vloer? (We tellen een tegel alleen mee als de diagonaal door zijn binnengebied loopt.) 1982-C1



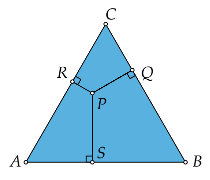
64

In driehoek ABC geldt $AC = 7$ en $BC = 11$. Bovendien snijden de zwaartelijnen vanuit A en B elkaar loodrecht. Bereken AB. 1982-C3



65

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met $AB = 12$. Binnen de driehoek ligt een punt P. De loodlijnen uit P op de zijden BC, AC en AB hebben respectievelijk Q, R en S als voetpunten. Voor de lengten van de loodlijnen geldt: $PR : PQ : PS = 1 : 2 : 3$. Bereken de lengte van PR en de lengte van CR. 1991-C2



bij 62. Leg de beide driehoeken met de hoeken B en Q op een handige manier tegen elkaar aan.

bij 63. Neem eerst eens wat kleinere afmetingen en kijk wat er gebeurt als je langs de diagonaal loopt.

bij 64. Gebruik de zwaartelijnenstelling.

bij 65. Probeer eerst PR te vinden. Kijk hiervoor naar de oppervlakte van driehoek ABC en de deeldriehoeken APB, BPC en CPA.

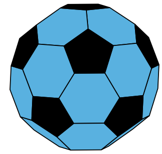
Een bonte verzameling meetkunde-opgaven in dit hoofdstuk, die allemaal een eigen aanpak vragen. Het zijn mooie opgaven om je algemene oplosvaardigheden te oefenen: kijk goed wat er gevraagd wordt, kun je de gegevens met elkaar in verband brengen? Kun je misschien eenvoudigere opgaven bedenken die een goed opstapje vormen? Waar doet de opgave je aan denken?
En als je de oplossing gevonden denkt te hebben, kun je dan direct zien dat die goed is? Is er ook een eenvoudigere oplossing? Kun je de vraagstelling misschien ook generaliseren?
Bij niet alle opgaven zullen deze vragen allemaal van toepassing zijn, maar vaak toch ook wel, en dan leer je er van. En pas als je er niet uitkomt, mag je naar de hints kijken!

voorbeeldoplossing opgave 61

Het verlossende idee bij deze opgave uit 1995 is om de driehoek te verdubbelen tot de rechthoek met hoekpunten $(0,0)$, $(19,0)$, $(19,95)$, $(0,95)$. Op de diagonaal daarvan liggen de 20 roosterpunten $(0,0),(1,5),\ldots,(18,90),(19,95)$. Binnen of op de rand van de rechthoek liggen $20 \times 96 = 1920$ roosterpunten. Binnen of op de rand van de gegeven driehoek liggen dus $\frac{1}{2}(1920 + 20) = 970$ roosterpunten.

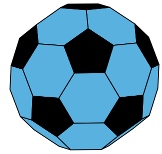
66

De meetkundige figuur waarop de huidige voetbal is gebaseerd, bestaat uit een aantal regelmatige zeshoeken en twaalf regelmatige vijfhoeken (zie tekening). Hoeveel ribben heeft deze figuur? 1992-A5



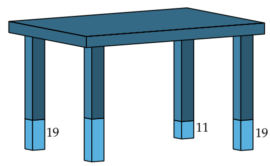
67

De tegenwoordige voetbal is gebaseerd op een meetkundig lichaam: een veelvlak dat bestaat uit 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken. Als je een kartonnen model van dit veelvlak hebt en je wilt er een uitslag van maken die uit één stuk bestaat, langs hoeveel ribben moet je het model dan openknippen? 1995-C3



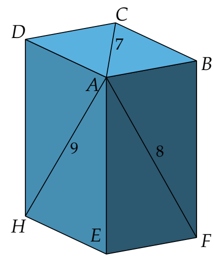
68

Van een rechthoekige tafel met vier even lange poten wordt van één van de poten een derde deel afgezaagd. Van de poot die hier diagonaal tegenover staat wordt 11 cm afgezaagd. Van elk van de resterende twee poten wordt 19 cm afgezaagd. De tafel blijkt hierna niet te wankelen. Hoe lang waren de poten in het begin? 1993-A5



69

Van een rechthoekig blok $ABCD \cdot EFGH$ zijn de lengten van de zijvlaksdiagonalen bekend: $AC = 7$, $AF = 8$ en $AH = 9$. Hoe groot is de inhoud van het blok? 1991-A5



70

Gegeven zijn vier punten die niet in één vlak liggen. Hoeveel vlakken zijn er die tot alle vier de punten gelijke afstand hebben? 1986-B3

71

Gegeven is een viervlak (driezijdige piramide) $ABCD$ met $AB = 6$, $BC = 8$ en $CA = 10$. De projectie van D op het vlak van driehoek ABC noemt men D'. Gegeven is $\angle DAD' = \angle DBD' = \angle DCD' = 60°$. Bereken de straal van de bol die door de vier hoekpunten van het viervlak gaat. 1987-C1

bij 67. Probeer het eerst eens met een kubus.

bij 68. Wat voor een bijzondere vierhoek vormen de uiteinden van de afgezaagde poten?

bij 69. Hier kan Pythagoras goede diensten bewijzen.

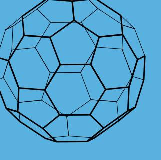
bij 70. Kunnen de vier punten allemaal aan één kant van het vlak liggen?

bij 71. Wat kun je zeggen over de afstanden van D' tot A, B en C? En vergeet ook hier Pythagoras niet!

Bij opgaven over ruimtemeetkunde gaat het er vaak om dat je je de ruimtelijke figuren goed voor kunt stellen. Een tekening kan daarbij helpen, maar zo'n plaatje blijft toch altijd tweedimensionaal. Bij vier van de zes vraagstukken hebben we een tekening gegeven; bij de eerste twee is het misschien nog beter om er even een echte voetbal bij te pakken. Maar bij de opgaven 69 en 70 is het maken van een tekening een wezenlijke stap in het oplossingsproces. We zouden te veel verklappen als we hier zo'n figuur zouden geven. Je moet het zelf doen!

voorbeeldoplossing opgave 66

In Opgave 67 kun je lezen dat zo'n voetbal 20 zeshoekige zijvlakken heeft, maar voor de oplossing van deze opgave hoef je dat niet te gebruiken. Er zijn in feite allerlei verschillende oplossingen mogelijk. Je kunt bijvoorbeeld constateren dat er bij elk hoekpunt twee zeshoeken en één vijfhoek samenkomen, en dus drie ribben. Er zijn in totaal $5 \times 12 = 60$ hoekpunten, dus zo krijg je $3 \times 60 = 180$ ribben, maar dan tel je iedere ribbe twee maal (één keer voor ieder eindpunt van zo'n ribbe). In werkelijkheid zijn er dus slechts $\frac{1}{2} \times 180 = 90$ ribben. In de tekening hiernaast kun je het natellen.



Er worden overigens thans ook voetballen gebruikt waarbij de vijfhoeken wel, maar de zeshoeken niet helemaal regelmatig zijn. Als ze opgeblazen zijn, benaderen die de zuivere bolvorm nog iets beter. De vijfhoeken hebben dan allemaal zijden van 40 mm, terwijl de zeshoeken afwisselend zijden van 40 mm en 27 mm hebben. Voor deze opgave (en voor opgave 67) maakt dat natuurlijk niets uit.

Getallen die je als een breuk kunt schrijven, heten *rationale getallen*. Die schrijfwijze ligt niet ondubbelzinnig vast, want als je teller en noemer met hetzelfde gehele getal (dat niet nul mag zijn) vermenigvuldigt, verandert de breuk wel, maar het getal niet. Als de teller en de noemer van een breuk geen gemeenschappelijke delers groter dan 1 hebben, heet zo'n breuk *onvereenvoudigbaar*. We geven twee voorbeelden van een serie breuken die allemaal hetzelfde rationale getal voorstellen. De laatste twee breuken in elke serie zijn onvereenvoudigbaar.

$$\frac{28}{49} = \frac{571428}{999999} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{-195}{66} = \frac{130}{-44} = \frac{65}{-22} = \frac{-65}{22}$$

Ook de gehele getallen zijn als breuk te schrijven, bijvoorbeeld

$$-5 = \frac{-5}{1} \qquad \text{en} \qquad 0 = \frac{0}{-2003} = \frac{0}{1}$$

Elk rationaal getal is op precies één manier te schrijven als een onvereenvoudigbare breuk met een positieve noemer.

Elk rationaal getal heeft een decimale ontwikkeling die periodiek is of na een zeker aantal decimalen periodiek wordt (zie Hoofdstuk 8). Zo is bijvoorbeeld

$$\frac{4}{7} = 0.571428571428571428\ldots \qquad \text{en} \qquad \frac{-65}{22} = -2.954545454\ldots$$

Omgekeerd kun je bij iedere periodieke of uiteindelijk periodieke decimale ontwikkeling een rationaal getal maken. Het recept daarvoor staat in Hoofdstuk 12.

irrationale getallen

Naast rationale getallen zijn er ook reële getallen die niet rationaal zijn, de *irrationale getallen*, zoals $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{3}$, ${}^{2}\log 3$, ${}^{10}\log 7$, π, e en τ. Daarbij is π de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel, e het grondtal van de natuurlijke logaritme en τ (uitgesproken als 'tau') het zogenaamde *gulden-snedegetal*, dat wil zeggen de lengteverhouding tussen een diagonaal en een zijde in een regelmatige vijfhoek.

Al die getallen hebben ook decimale ontwikkelingen zoals de op de volgende bladzijde afgebeelde tabel illustreert. Er zijn daarin inderdaad geen periodiciteiten te zien, maar op zichzelf zegt dat niets, want we zien maar 42 decimalen. Experimenteel kun je trouwens nooit vaststellen of een decimale ontwikkeling al dan niet periodiek wordt. Dat een getal irrationaal is moet je daarom op een andere manier bewijzen.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856967 1\ldots$$

$$\sqrt[5]{3} = 1.24573093961551732596668033664030508093930 9\ldots$$

$$^{2}\log 3 = 1.58496250072115618145373894394781650875981 4\ldots$$

$$^{10}\log 7 = 0.84509804001425683071221625859263619348357 2\ldots$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716 9\ldots$$

$$\tau = 1.61803398874989484820458683436563811772030 9\ldots$$

$$\mathrm{e} = 2.71828182845904523536028747135266249775724 7\ldots$$

Zoiets gaat vaak via een *bewijs uit het ongerijmde*. Je neemt daarbij aan dat het desbetreffende getal wél als een breuk geschreven kan worden, en leidt daar dan een ongerijmdheid, een innerlijke tegenspraak uit af. Een bewijs uit het ongerijmde dat je het getal $^{2}\log 3$ niet als een breuk kunt schrijven, is heel gemakkelijk:

een bewijs dat $^{2}\log 3$ irrationaal is

Stel dat $^{2}\log 3 = t/n$ waarbij t en n positieve gehele getallen zijn. Dan is $2^{t/n} = 3$, dus $2^t = 3^n$. Het linkerlid hiervan is een geheel getal met alleen maar factoren 2 in zijn priemgetallenontbinding, terwijl het rechterlid een geheel getal is met alleen maar factoren 3 in zijn priemgetallenontbinding. Die getallen kunnen dus niet aan elkaar gelijk zijn, tegenspraak.

Iets meer moeite kost het om te bewijzen dat je $\sqrt{2}$ niet als een breuk kunt schrijven:

het getal $\sqrt{2}$ is irrationaal

Stel dat $\sqrt{2} = t/n$, waarbij t en n positieve gehele getallen zijn zonder gemeenschappelijke deler groter dan 1. Dan is $2 = (t/n)^2$, dat wil zeggen

$$2n^2 = t^2$$

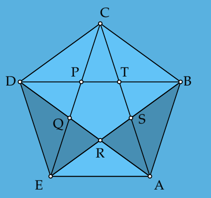
Het linkerlid is een geheel veelvoud van 2, dus het rechterlid ook. Maar dan kan t niet oneven zijn, want het kwadraat van een oneven getal is oneven (ieder oneven getal kun je immers schrijven als $(2k+1)$, en omdat $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ is het kwadraat ervan dus weer oneven). Als t even is, is t van de vorm $t = 2u$, en dan is $2n^2 = 4u^2$ dus

$$n^2 = 2u^2$$

Dezelfde redenering, nu toegepast op deze vergelijking, laat zien dat n ook even moet zijn. Maar nu hebben we een tegenspraak bereikt, want als t en n allebei even zijn, hebben ze de gemeenschappelijke deler 2, in tegenspraak met het feit dat we hadden aangenomen dat t en n geen gemeenschappelijke delers groter dan 1 hebben.

het gulden-snedegetal is irrationaal

Bij het gulden-snedegetal τ vertalen we de meetkundige definitie eerst in algebraïsche termen. In de figuur hiernaast zie je een regelmatige vijfhoek $ABCDE$ met diagonalen AC, BD, CE, DF en EA. Als de zijden van de vijfhoek lengte 1 hebben, hebben de diagonalen dus lengte τ. Elke diagonaal is evenwijdig aan de tegenoverliggende zijde, en dus is vierhoek $BCDR$ een parallellogram (zelfs een ruit!), zodat ook $DR = 1$ is.



Verder zijn om dezelfde reden de driehoeken EAR en DBC gelijkvormig, zodat $RA : EA = CB : DB = 1 : \tau$ en dus is $RA = 1/\tau$. Uit $\tau = DA = DR + RA = 1 + 1/\tau$ volgt dan dat τ een oplossing is van de vergelijking $x = 1 + 1/x$, die ook geschreven kan worden als $x^2 - x - 1 = 0$. Deze vergelijking heeft een positieve en een negatieve oplossing. De positieve is $(1 + \sqrt{5})/2$, en dat moet dus de waarde van τ zijn. Omdat $\sqrt{5}$ irrationaal is (dat bewijs je net zo als de irrationaliteit van $\sqrt{2}$), volgt hieruit dat τ irrationaal is.

Maar de irrationaliteit van τ kun je ook op een meer meetkundige manier bewijzen. Natuurlijk ook weer uit het ongerijmde. Neem aan dat de onvereenvoudigbare breuk t/n gelijk is aan τ. Uiteraard is de noemer n dan minimaal: elke andere breuk die τ voorstelt, heeft een grotere noemer. Uit de figuur is duidelijk dat $\tau < 2$ want $\tau = BD < BC + CD = 2$. Verder is $1/\tau = RA = DA - DR = \tau - 1 = (t/n) - 1 = (t - n)/n$ dus $\tau = n/(t - n)$ is ook een schrijfwijze van τ als breuk. Maar uit $\tau < 2$ volgt $t < 2n$ dus $t - n < n$, en dus heeft de nieuwe schrijfwijze $\tau = n/(t - n)$ een noemer die kleiner is dan n, tegenspraak!

Het geven van een bewijs dat π en e irrationaal zijn, is moeilijker. Je hebt daarvoor wiskundige technieken nodig die in het eerste jaar van een universitaire wiskundestudie worden behandeld. Ook het vinden en uitvoeren van algoritmen om de decimale ontwikkeling van zulke irrationale getallen te bepalen, is vaak veel moeilijker dan het toepassen van het staartdelingsalgoritme bij breuken. Het is een sport geworden om zoveel mogelijk decimalen in de ontwikkeling van π te bepalen: op dit moment zijn er al meer dan zes miljard decimalen bekend!

Wat men in feite altijd doet bij het bepalen van de decimale ontwikkeling van een irrationaal getal, is het berekenen van een rij breuken die het desbetreffende irrationale getal steeds nauwkeuriger benaderen. Elk van die breuken zet men daarbij om in een decimale ontwikkeling die men na een voldoende aantal stappen afbreekt.

E12

De volgende decimale ontwikkeling, waarbij na de decimale punt achtereenvolgens een 1, een nul, een 1, twee nullen, een 1, drie nullen, een 1, vier nullen, enzovoorts, staan, is duidelijk niet periodiek:

$$0.101001000100001000001000000100000001\ldots$$

Op welke plaats na de decimale punt staat de vijfentwintigste 1? En wat is de vijfduizendvijftigste decimaal (niet gokken!)?

E13

De decimale ontwikkeling van het irrationale reële getal R krijg je door alle natuurlijke getallen in hun decimale schrijfwijze op volgorde als decimalen te nemen:

$$R = 0.1234567891011121314151617\ldots$$

Bewijs dat R irrationaal is. Bepaal ook de tweehonderdste decimaal van R.

E14

Bewijs dat de getallen ${}^{10}\log 7$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[5]{3}$ en $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ irrationaal zijn.

E15

Toon aan dat de wortel uit een positief irrationaal getal zelf ook een irrationaal getal is. Is het omgekeerde ook waar?

E16

Probeer een bewijs te geven van de volgende stelling: als het positieve gehele getal n geen kwadraat van een geheel getal is, dan is $\sqrt{n}$ irrationaal.

E17

Voor het getal e, het grondtal van de natuurlijke logaritme, geldt de reeksontwikkeling

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

Als je die reeks voor het getal e na n termen afbreekt en alles onder één noemer brengt, krijg je een breuk die e benadert. Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ krijg je zo een rij breuken die e steeds beter benaderen naarmate n groter wordt. Bereken de eerste acht termen van die rij breuken, en kijk hoe goed de achtste benadering is door hem te vergelijken met die op bladzijde 47.
NB. Hierbij betekent $k!$ (uitgesproken als 'k-faculteit') het product $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k$.

72

Twee wielrenners doen mee aan een tijdrit. Aad, die als eerste start, rijdt constant 30 km/uur. Ben rijdt constant 36 km/uur. Als Ben start, passeert Aad een kerk. Op het moment dat Ben deze kerk passeert, finisht Aad. Ten slotte finisht Ben precies een half uur na Aad. Hoe lang is het traject van de tijdrit? 1992-A4

73

Annet, Berdien en Chris spelen een spel waarbij ieder die verliest al het geld van de anderen moet verdubbelen. Nadat eerst Annet, dan Berdien en vervolgens Chris verloren heeft, bezit ieder 16 euro. Hoeveel geld bezaten Annet, Berdien en Chris vóór het spel? 1986-A2

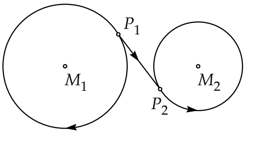
74

Naast elkaar liggen twee roltrappen. Bij elke trap zijn steeds 40 treden zichtbaar. De trappen hebben dezelfde snelheid, de ene leidt omhoog en de andere naar beneden. Adi en Ida lopen ieder een roltrap op. Adi neemt de roltrap die omhoog gaat en doet zelf nog 10 stappen op de trap, terwijl Ida omhoogrent langs de trap die naar beneden gaat. Geen van beiden slaan ze treden over. Ze starten tegelijk en komen ook tegelijk boven aan. Hoeveel stappen heeft Ida op de roltrap gedaan? 1999-A2

75

Een koudwaterkraan, geheel geopend, vult een badkuip in 10 minuten. Een warmwaterkraan, ook geheel geopend, vult hetzelfde bad in 12 minuten. Een stop in de bodem van het bad zorgt ervoor dat het bad niet leegloopt. Als de stop er uit is, dan loopt een vol bad in 20 minuten helemaal leeg. Als nu bij een leeg bad beide kranen geheel opengezet worden en ook de stop uit de bodem getrokken wordt, hoeveel minuten duurt het dan tot het bad vol is? 1991-A3

76



Een wielrenner legt een parcours af bestaande uit een cirkel met middelpunt M_1 en straal r_1, een recht stuk weg P_1P_2 met een lengte van 18 m en een cirkel met middelpunt M_2 en straal r_2. Hij begint in P_1 en eindigt in P_2 (zie tekening). Verder is gegeven dat P_1P_2 een gemeenschappelijk raaklijnstuk van de twee cirkels is, dat de afstand M_1M_2 en de stralen r_1 en r_2 alle een geheel aantal meters lang zijn en dat het gehele parcours langer is dan 500 m. Bereken de totale lengte van het parcours. 1987-B4

77

Boven een badkuip zitten drie verschillende kranen, A, B en C. Draait men de kranen A en B open dan is de badkuip in precies vier minuten vol. De kranen A en C vullen de badkuip samen in precies vijf minuten, terwijl de kranen B en C dat in precies zes minuten doen. In hoeveel minuten is het bad vol als de drie kranen tegelijk worden opengedraaid? 1989-A6

bij 73. Zie de aanwijzing in de tekst op de rechterbladzijde.

bij 74. Hoeveel treden beweegt de roltrap omhoog in de tijd dat Adi omhoog loopt?

bij 75. Stel dat het bad een inhoud heeft van 1 liter. Hoeveel liter komt er dan per minuut uit de kranen?

bij 76. Bedenk dat M_1P_1 en M_2P_2 loodrecht staan op P_1P_2 (waarom).

bij 77. Een slimme oplosser denkt zich in dat er twee kranen van elk type boven het bad zitten!

In al deze opgaven gaat het erom situaties uit het 'dagelijks leven' in wiskunde te vertalen. Met andere woorden, je probeert een wiskundig model te vinden waarin je door tekenen en rekenen de oplossing te weten kunt komen. Inderdaad, ook tekenen, want vaak helpt het als je een figuur of een schets maakt. In veel gevallen is het handig om letters te introduceren, bijvoorbeeld in opgave 73, waarin je de bedragen die Annet, Berdien en Chris bij het begin van het spel hebben, a, b en c zou kunnen noemen. Soms is het verstandig om te kijken wat er per tijdseenheid gebeurt, bijvoorbeeld bij de badwateropgaven. En verder: gewoon je gezonde verstand gebruiken. Kijk ook achteraf of de oplossing die je vindt, plausibel is. Dat kan bij dit soort vraagstukken meestal gemakkelijk gedaan worden.

voorbeeldoplossing opgave 72

Stel dat de afstand van de start tot de kerk a kilometer bedraagt, en de afstand van de kerk tot de finish b kilometer. Omdat Ben over die laatste afstand een half uur doet, is $b = 18$. Aad, die 30 kilometer per uur rijdt, doet over die 18 kilometer $18/30$ uur, en in diezelfde tijd legt Bert, die 36 kilometer per uur rijdt, de afstand a af, dus $a = (18/30) \times 36 = 21.6$ kilometer. Het totale parcours is daarom $a + b = 39.6$ kilometer lang.

78 Er zijn drie steden A, B en C, en elk tweetal is door verschillende wegen rechtstreeks met elkaar verbonden. Het aantal wegen van A naar C (inclusief die via B) is 11, het aantal wegen van A naar B (inclusief die via C) is 17. Hoe groot is het aantal directe wegen van B naar C? 1982-B3

79 Iemand wil een kubus verven. Hij heeft twee potten verf: rood en blauw. Elk zijvlak van de kubus moet één kleur krijgen (niet mengen). Op hoeveel manieren kan dat? (Kleuringen die alleen verschillen in de stand van de kubus worden als één mogelijkheid geteld.) 1984-A1

80 Een vogelwachter heeft om mussen te ringen de keuze uit vijf soorten ringetjes. Hij mag per poot niet meer dan één ringetje bevestigen. Hoeveel verschillende manieren van ringen heeft hij? 1986-A4

81 Negen staatslieden houden een ronde-tafelconferentie om hun onderlinge problemen op te lossen. Op hoeveel verschillende manieren kunnen zij zich om de ronde tafel schikken? Twee schikkingen waarbij iedere staatsman dezelfde twee buren heeft worden niet als verschillend gezien. 1989-A5

82 Een congres telt 350 deelnemers. De voertalen zijn Nederlands, Engels en Frans. Er zijn 150 congresgangers die Nederlands spreken, en die spreken ook allemaal Engels. In totaal zij er 305 mensen die Engels spreken en 157 die Frans spreken. Er zijn 125 deelnemers die maar één taal spreken. Hoeveel congresgangers spreken drie talen? 1991-A6

83 Bij het slot van een reünie neemt iedereen van iedereen afscheid. Daarbij geven een man en een vrouw elkaar een hand en een zoen. Twee vrouwen geven elkaar alleen een zoen en twee mannen geven elkaar alleen een hand. In totaal wordt 671 keer een zoen gegeven.
Bepaal hoeveel keer er een hand gegeven wordt, als verder gegeven is dat er meer vrouwen dan mannen zijn. 1993-C1

84 Van een trap met 15 treden wordt elke trede blauw of geel geverfd, waarbij geen twee opeenvolgende treden beide blauw mogen zijn. Op hoeveel manieren kan de trap geverfd worden? 1999-C3

bij 79. Laat r_i het aantal verschillende kubussen zijn met precies i zijvlakken rood. Bepaal r_0, r_1, r_2 en r_3.

bij 80. Bepaal eerst het aantal manieren met één ring, daarna het aantal met twee ringen.

bij 81. Kies één persoon vast. Rangschik nu de andere acht, maar let op: linksom of rechtsom zijn niet verschillend.

bij 82. Teken een plaatje (Venn-diagram) van de verzamelingen N, E en F van degenen die respectievelijk Nederlands, Engels en Frans spreken. Hoeveel Franssprekenden zijn er die geen Engels spreken?

bij 83. Bepaal het aantal zoenen tussen vrouwen onderling en daarna dat tussen mannen en vrouwen. Ontbind 671 in priemfactoren.

bij 84. Doe het eerst eens voor trappen met veel minder treden.

Bij het handig tellen moet je goed opletten dat je de dingen die je moet tellen ook maar één keer telt. Dat is natuurlijk vanzelfsprekend, maar niet altijd eenvoudig uit te voeren. Een voorbeeld: uit de letters a, b, c, d en e moet je er twee kiezen. De eerste letter kan je op 5 manieren kiezen en de tweede op 4, dat zijn dus in totaal $5 \cdot 4 = 20$ manieren, maar omdat de volgorde waarin de twee letters gekozen zijn er niet toe doet, moet je delen door 2. Vaak is het handig om een probleem te vereenvoudigen door eerst enkele bijzondere gevallen te bekijken. Probeer ook symbolische plaatjes (grafen of Venn-diagrammen) te maken; geef verzamelingen of aantallen elementen in verzamelingen passende namen.

voorbeeldoplossing opgave 78

Laat het aantal directe wegen van A naar B, van A naar C en van B naar C respectievelijk x, y en z zijn, waarbij x, y en z positieve gehele getallen zijn. Uit het gegeven volgt nu dat: $y + xz = 11$ en $x + yz = 17$. Linker- en rechterleden van deze vergelijkingen optellen geeft: $(x + y)(z + 1) = 28$. $z + 1$ is dus een deler van 28. Uit de eerste vergelijking volgt dat $z < 11$, $z = 1$ geeft $y + x = 11$ en $x + y = 17$ en dat is een tegenspraak, $z = 6$ geeft geen geheeltallige x en y, en dus blijft $z = 3$ als enige mogelijkheid over, met $x = 2$ en $y = 5$.

85

Bepaal alle oplossingen (x, y) van de vergelijking

$$xy = 11x + 4y + 97$$

waarbij x en y positieve gehele getallen zijn. 1997-C3

86

Bepaal het *aantal* reële getallen x dat voldoet aan

$$\sin(\pi x) = \frac{x}{1985}$$

1985-A3

87

Bepaal alle positieve gehele getallen n en m waarvoor geldt

$$(n+m)^m = n^m + 1413$$

1986-C1

88

Voor vier gehele getallen a, b, c en d met $0 < a < b < c < d$ geldt

$$\begin{cases} ad &= bc \\ a+d &= 128 \\ b+c &= 32 \end{cases}$$

Bepaal a, b, c en d. 1991-C1

89

Het getal N heeft de volgende eigenschappen:

1. N is het kwadraat van een natuurlijk getal,
2. N is een getal van vier cijfers, alle kleiner dan 7,
3. Vermeerder je elk cijfer van N met 3, dan ontstaat een getal dat weer het kwadraat is van een natuurlijk getal.

Bepaal N. 1985-A2

90

De natuurlijke getallen x en y zijn getallen van twee cijfers met $x < y$. Het product van x en y is een getal van vier cijfers dat met een 2 begint. Laten we dit cijfer 2 weg dan krijgen we de som van x en y. De combinatie $x = 30$, $y = 70$ voldoet, want $30 \times 70 = 2100$ en $30 + 70 = 100$.
Er is nog een oplossing. Bepaal die oplossing. 1983-B2

bij 86. Schets de grafiek van de functies $f(x) = \sin(\pi x)$ en $g(x) = x/1985$.

bij 87. Gebruik dat $(n+m)^m = n^m + \cdots + m^m \geq n^m + m^m$ en dat $1413 < 5^5 = 3125$. Voor m zijn er dus maar weinig mogelijkheden …

bij 88. Schrijf $ad = bc$ als $a(128 - a) = b(32 - b)$. Wat is de maximale waarde van het rechterlid? En kun je daaruit iets afleiden voor de maximale waarde van het positieve gehele getal a?

bij 89. Noem $N = p^2$ en noem het nieuwe kwadraat q^2. Bedenk dat je $q^2 - p^2$ kent, en ook dat $q^2 - p^2 = (q+p)(q-p)$ (vergelijk de voorbeeldoplossing).

bij 90. Het verschil tussen het product en de som is 2000. Zie verder de voorbeeldoplossing.

Vergelijkingen en formules worden door mensen die weinig van wiskunde weten vaak gezien als de essentie van de wiskunde, terwijl ze eigenlijk alleen maar ontwikkeld zijn om zaken precies op te schrijven. Het gaat bij wiskunde echter om de gedachten die er achter zitten. Het weergeven van getallen door letters en het rekenen met die letters bestaat trouwens nog helemaal niet zo lang; de wiskunde zelf is veel ouder. Het werken met letters is een taal, maar wel een taal die geleerd moet worden.
Vergelijkingen, zoals die bijvoorbeeld in de eerste vier opgaven staan, hebben op veel beginners een ontmoedigend effect. Je denkt al gauw: daar begin ik maar niet aan. Maar zo afschrikwekkend zijn die opgaven helemaal niet. Vaak helpt het als je eerst probeert een indruk te krijgen van wat er precies gevraagd wordt door wat getallen in te vullen of door een plaatje te tekenen.

voorbeeldoplossing opgave 85

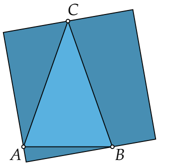
Herschrijven van de vergelijking geeft $xy - 11x - 4y - 97 = 0$, maar het linkerlid kunnen we zo nog niet ontbinden. Wel geldt $xy - 11x - 4y = (x-4)(y-11) - 44$, en dus is de oorspronkelijke vergelijking te schrijven als $(x-4)(y-11) - 44 - 97 = 0$, dat wil zeggen als

$$(x-4)(y-11) = 141$$

Omdat x en y geheel moeten zijn, moeten ook $x - 4$ en $y - 11$ geheel zijn. Verder geldt $141 = 3 \times 47$, en dus is het paar $(x-4, y-11)$ gelijk aan een van de paren $(1, 141)$, $(3, 47)$, $(47, 3)$, $(141, 1)$. De gevraagde oplossingen (x, y) zijn dus de vier paren $(5, 152)$, $(7, 58)$, $(51, 14)$ en $(145, 12)$.

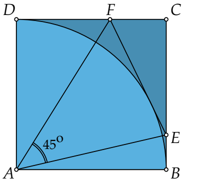
T1

Gegeven is een gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 2$ en $AC = BC = 3$. Men beschouwt vierkanten waarvoor geldt dat A, B en C op de zijden van het vierkant liggen (maar niet op het verlengde van zo'n zijde).
Bepaal de maximale en de minimale waarde van de oppervlakte van zo'n vierkant. Motiveer je antwoord. 1988-4



T2

E is een willekeurig punt op de zijde BC van een vierkant $ABCD$. Op de zijde CD ligt het punt F zo dat $\angle EAF = 45°$.
Bewijs dat het lijnstuk EF raakt aan de cirkel met middelpunt A en de lengte van de zijde van het vierkant als straal. 1989-2

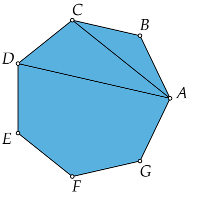


T3

Gegeven is een regelmatige zevenhoek $ABCDEFG$ met zijden van lengte 1. Bewijs dat voor de diagonalen AC en AD geldt dat

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$$

1990-4



T4

Bewijs dat voor alle gehele getallen $n > 1$ geldt dat

$$1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) < n^n$$

1990-1

T5

Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 13x + 10}{2x^2 - 9x}$$

Bepaal alle positieve gehele getallen x waarvoor $f(x)$ een geheel getal is. 2001-4

T6

In deze opgave staat elke letter voor een cijfer. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. De teller en de noemer van de breuk zijn onderling ondeelbaar en de decimale schrijfwijze repeteert met een periode van vier cijfers.

$$\frac{\text{ADA}}{\text{KOK}} = .\text{SNELSNELSNELSNEL}\ldots$$

Bepaal de waarde van deze breuk (Ada Kok won op de Olympische spelen in Mexico (1968) een gouden medaille op de 200 meter vlinderslag). 1992-2

T7

Voor ieder positief geheel getal n definieert men $n?$ als volgt:

$$n? = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ \dfrac{n}{(n-1)?} & \text{als } n \geq 2 \end{cases}$$

Bewijs dat geldt: $\sqrt{1992} < 1992? < \frac{4}{3}\sqrt{1992}$. 1992-4

T8

Deze opgave bestaat uit twee delen:
1. Bewijs dat elk geheel veelvoud van 6 te schrijven is als de som van vier derdemachten van gehele getallen.
2. Bewijs dat elk geheel getal te schrijven is als de som van vijf derdemachten van gehele getallen. 1994-3

T9

Je hebt 101 knikkers, genummerd van 1 tot en met 101. De knikkers zijn verdeeld over twee bakken A en B. De knikker met nummer 40 zit in bak A. Je pakt deze knikker uit bak A en gooit hem in bak B. Hierdoor stijgt het gemiddelde van alle nummers in A met $1/4$. Ook het gemiddelde in bak B stijgt hierdoor met $1/4$.
Hoeveel knikkers zaten er oorspronkelijk in bak A? 1995-3

T10

We zetten de getallen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ in een willekeurige volgorde op een rij. Van elk drietal opeenvolgende getallen uit die rij bepalen we de som. Het maximum van die acht sommen noemen we M.
Voorbeeld: voor de rij $4, 6, 2, 9, 0, 1, 8, 5, 7, 3$ is $M = 20$ $(= 8 + 5 + 7)$.
1. Bepaal een rij met $M = 13$.
2. Bewijs dat er geen rij bestaat met $M = 12$. 1998-1

Het zou mooi zijn als er voor elk probleem een pasklare oplossingsmethode gereed lag, maar zo zit de wereld natuurlijk niet in elkaar. De wiskunde op school geeft op dit punt vaak een vertekend beeld: daar krijg je bijna altijd vraagstukken voorgelegd waarbij het direct duidelijk is hoe je ze aan moet pakken. Maar bij olympiadesommen – en bij 'echte' vraagstukken binnen of buiten de wiskunde! – is dat meestal niet het geval. Je wordt dan als het ware in het diepe gegooid, en je moet maar zien hoe je je redt.

De wiskundige George Pólya heeft in zijn boekje ***How To Solve It*** **(Princeton, 1945) een algemeen stappenplan beschreven waarmee je 'echte' wiskundige vraagstukken te lijf kunt gaan. Zijn ideeën hebben ook buiten de wiskunde zozeer de aandacht getrokken, dat ze gelden als belangrijke bijdragen aan de heuristiek, de tak van de psychologie die zich bezighoudt met oplossingsmethoden en -strategieën. Het is passend om iets van Pólya's gedachten ook in een boek als dit te presenteren. Daarbij zullen we een paar van de vraagstukken van de Tweede Ronde die in Hoofdstuk 20 verzameld zijn als illustratiemateriaal gebruiken.**

stap 1: de probleemstelling begrijpen

Het lijkt een vanzelfsprekende zaak, maar toch zeggen we het hier: het is zinloos om aan een probleem te beginnen als je de probleemstelling niet volledig begrijpt. Wat wordt er gevraagd? Wat zijn de onbekenden? Wat zijn de gegevens? Ken je de precieze betekenis (de definitie) van alle termen die gebruikt worden? Aan welke voorwaarden moet voldaan zijn? Is de vraagstelling wel zinvol? Zijn de gegevens wel voldoende om het probleem volledig vast te leggen? Wat ligt er vast? Wat kan er gevarieerd worden? Probeer zo mogelijk een plaatje te tekenen.

Kijk bijvoorbeeld naar **Opgave T3**. Daar is al een plaatje bij getekend, maar als dat niet het geval was, zou dat het eerste zijn wat je zou moeten doen. Het gaat om een regelmatige zevenhoek, dus alle hoeken zijn even groot (hoe groot?) en alle zijden zijn even lang: in dit geval hebben ze lengte 1. De twee diagonalen zijn allebei langer dan 1, dus $1/AC$ en $1/AD$ zijn allebei kleiner dan 1, en hun som zou dus best 1 kunnen zijn, zoals gevraagd wordt te bewijzen.

Of kijk naar **Opgave T7**. De gegevens zien er nogal raadselachtig uit. Een n met een vraagteken erachter. Wat zou dat betekenen? Het doet misschien denken aan $n!$ (n faculteit, zie bladzijde 49), maar je zult die vraagtekennotatie nog nooit eerder zijn tegengekomen. Er staat in een formule wat $n?$ betekent, maar achter de accolade komt in de onderste regel weer een vraagteken voor. Hoe zit dat?

Het zal je misschien enige tijd kosten om je te realiseren dat hier eigenlijk een getallenrij gedefinieerd wordt, en wel stap voor stap, op een *recursieve manier*, zoals dat in vaktermen heet. Voor $n = 1$ is $n? = 1$. Als je dat weet, kunt je uit de tweede regel de waarde voor $n = 2$ halen, namelijk $2? = 2/(1?) = 2/1 = 2$. En nu je toch bezig bent: $3? = 3/(2?) = 3/2$, enzovoort. Nadat je deze stappen gezet hebt (en de rij misschien nog wat verder uitgerekend hebt), begin je al aardig thuis te raken in het sommetje.

Rest de vraagstelling: twee aan elkaar gekoppelde ongelijkheden. Daar is niet veel onduidelijks aan: wat bewezen moet worden, is helder, en je kunt dus aan de volgende stap van het oplossingsplan beginnen. Je hebt de probleemstelling volledig begrepen.

Kijk nu naar **Opgave T1**. Ook daar is al een plaatje getekend, maar dat geeft niet alle mogelijkheden weer. De driehoek ABC is vast, maar het vierkant kan variëren. Teken nog wat andere gevallen. Al doende zul je ontdekken dat de zijdelengte van het vierkant inderdaad afhangt van de manier waarop je het tekent. Op hoeveel manieren kan dat eigenlijk? Hoeveel vrijheid zit er in die keuze? Kun je een 'variabele' kiezen waar die keuze van afhangt? Kun je er een handige notatie bij kiezen?

En wat wordt er gevraagd? Een maximale en een minimale waarde. Zouden die er inderdaad zijn? Kun je een idee krijgen over de posities van het vierkant daarbij? Zo ja, dan weet je waar je naartoe kunt werken, want een vermoeden op zichzelf is natuurlijk niet voldoende: we willen bewijzen dat we het juiste antwoord gevonden hebben. Maar zo ver is het nog niet, we zijn nog in de verkenningsfase. Maar je ziet dat je daarin al heel wat kunt doen.

Bij **Opgave T8** denk je na vluchtig lezen misschien dat wat er gevraagd wordt, helemaal niet kan: hoe kun je bijvoorbeeld 6 schrijven als som van vier derdemachten? Maar dan zul je je al snel realiseren dat 0 ook een derdemacht is, en dat derdemachten ook negatief kunnen zijn. Dan lukt het wél voor 6 (want $6 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + 0^3$) en daarna kan de verdere oriëntatie beginnen: lukt het met 12? En met 18?

stap 2: een plan bedenken

Als je het probleem goed begrijpt, komt de volgende stap: het bedenken van een plan van aanpak. Dit is de moeilijkste stap omdat je daarbij helemaal op jezelf, je eigen creativiteit en je wiskundige ervaring bent aangewezen. Je weet wat je uitgangspunt is: je begrijpt de gegevens. En je weet waar je naartoe wilt: je begrijpt wat je moet bewijzen of afleiden. Maar de weg die van beginpunt naar eindpunt leidt, is vooralsnog niet duidelijk. Toch zijn er algemene principes die je op weg kunnen helpen. We zullen ze weer illustreren aan de hand van een paar opgaven van Hoofdstuk 20.

Het eerste wat je kunt doen, is putten uit je ervaring. Heb je al eens eerder een soortgelijk vraagstuk gezien? Welke technieken zouden er bruikbaar zijn? Vervolgens zijn er twee algemene methodes van aanpak: vooruit werken en terugwerken. Bij vooruit werken ga je uit van de gegevens, en probeer je van daaruit zo ver mogelijk in de goede richting te komen. Bij terugwerken ga je juist uit van wat je bewijzen moet, en probeer je dat om te werken tot iets wat je wel gemakkelijk bereiken kunt. Tot die categorie hoort ook het *bewijs uit het ongerijmde*: ga ervan uit dat wat je wilt bewijzen *niet* waar is, en probeer daar dan een ongerijmdheid uit af te leiden. We hebben in Hoofdstuk 16 al een aantal van zulke bewijzen laten zien.

Als voorbeeld nemen we **Opgave T6** bij de kop. Als je de hoofdstukken 8 en 12 gelezen hebt, weet je hoe je een periodieke decimale ontwikkeling om kunt zetten in een breuk (hier gebruik je dus je wiskundige ervaring), namelijk door een rijtje negens in de noemer te zetten, dus

$$.\mathsf{SNELSNELSNELSNEL}\ldots = \frac{\mathsf{SNEL}}{9999}$$

Die breuk moet hetzelfde getal voorstellen als de breuk ADA/KOK. Om ze gelijk te krijgen, moet je teller en noemer door hetzelfde getal delen, en het verdere plan van aanpak is daarmee duidelijk: kijk welke delers in aanmerking komen. Meer verklappen we niet . . .

Voor ons tweede voorbeeld gaan we naar **Opgave T10**. In stap 1, de oriëntatiefase, zul je al wat met die rijtjes gestoeid hebben, en daarbij ontdekt hebben dat je M klein moet houden. Dat lukt alleen als de grote getallen 9, 8 en 7 minstens twee plaatsen tussenruimte hebben. Dan is het verder een kwestie van puzzelen om een rij te vinden met $M = 13$. Moeilijker is het tweede onderdeel, het bewijzen dat $M = 12$ onmogelijk is. Daarvoor is een andere aanpak nodig. Misschien een bewijs uit het ongerijmde? Je kunt ook nog iets uit de gegevens afleiden wat je misschien gebruiken kunt, namelijk dat de som van alle getallen in zo'n rij altijd gelijk is aan 45.

Een derde voorbeeld is **Opgave T9**. In de oriëntatiefase heb je waarschijnlijk ontdekt dat het handig is om het aantal knikkers dat oorspronkelijk in bak A zat (de onbekende in dit vraagstuk), een naam te geven, laten we zeggen a. Ook de som van alle nummers van de knikkers in bak A in de beginsituatie zou je een naam kunnen geven, bijvoorbeeld s. Het plan is nu om alle gegevens uit te drukken in vergelijkingen waarin a en s als onbekenden optreden, zowel een vergelijking voor de begintoestand als een vergelijking voor de eindtoestand.

Natuurlijk zal het vaak gebeuren dat je eerste plan niet tot het einddoel leidt. Dan moet je niet opgeven, maar een ander plan bedenken. Het helpt vaak als je weet waarom de oorspronkelijke opzet mislukte. Dan was de moeite dus niet vergeefs.

stap 3: je plan uitvoeren

Ook hier weer iets dat haast vanzelf spreekt, maar dat toch vaak tot ongelukken leidt. Mensen zijn van nature slordig, en dat is in deze fase dan ook een groot risico. Daarom moet je jezelf dwingen om overzichtelijk en nauwkeurig te werken. Controleer elke stap. Schrijf alles expliciet op. Kijk bij elk deelresultaat of het plausibel is en of je de juistheid ervan ook op andere manieren kunt controleren. Kun je in één oogopslag je oplossingsmethode en de uitvoering van je plan overzien? Kun je *bewijzen* dat je resultaten correct zijn?

We gaan deze stap niet illustreren met voorbeelden, want dan verraden we de oplossingen, en het is de bedoeling dat je nu de opgaven van Hoofdstuk 20 zelf gaat oplossen. Maar Pólya's stappenplan is nog niet af. Er komt nóg een stap, en dat is misschien wel de belangrijkste.

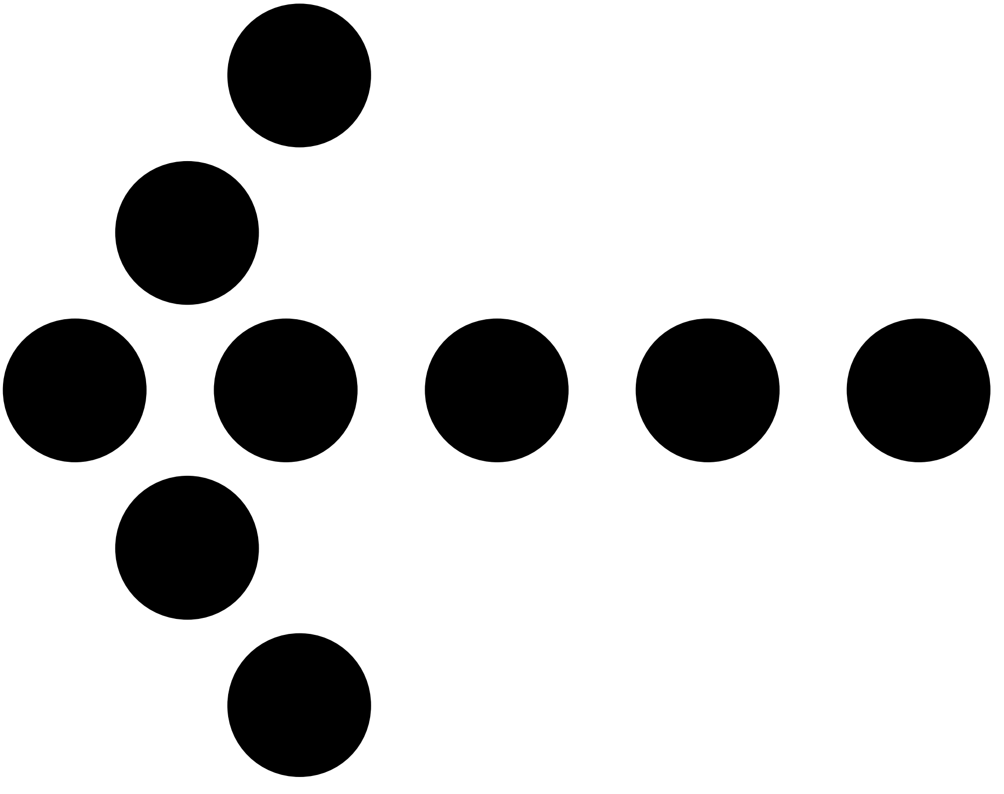
stap 4: terugkijken

Je hebt de oplossing gevonden, en leunt tevreden achterover. Maar neem daarna toch ook de moeite om je opnieuw over de opgave te buigen voor een terugblik. Is je oplossing volledig? Kun je je oplossing nog vereenvoudigen? Overzichtelijker opschrijven? Kun je ook op een andere manier de oplossing vinden? Kun je met dezelfde methode soortgelijke vraagstukken aanpakken? Kun je interessante varianten bedenken? Stel jezelf opnieuw de vraag of je alles in één keer kunt overzien. Vraag je af wat je geleerd hebt. Hoe past het in wat je al wist? Kun je hiermee zelf nieuwe opgaven verzinnen? Sommen oplossen is leuk, maar zelf sommen bedenken is nog veel leuker, en leerzamer bovendien.

je kunt altijd wat doen!

Hoe vanzelfsprekend de raadgevingen in Pólya's stappenplan er op het eerste gezicht ook uitzien, toch blijkt telkens weer dat ze in de praktijk van het oplossen van vraagstukken uitermate nuttig kunnen zijn. Ze structureren je denken en dwingen je tot systematisch en doelgericht werken. Maar misschien is wel de belangrijkste boodschap dat je, hoe moeilijk een som er op het eerste gezicht ook uitziet, bijna nooit helemaal machteloos bent. Je kunt altijd wel een paar stappen zetten. Staat er een rij, reken dan flink wat termen uit. Misschien zie je een patroon verschijnen. Staan er voorwaarden, probeer dan de geldigheid ervan te toetsen. Wat gebeurt er als je bepaalde voorwaarden weglaat of verzwakt? Zitten er variabelen in de opgave, kijk dan wat die doen in speciale gevallen. Test extreme gevallen en grenssituaties. Wat gebeurt er als de variabele 0 wordt of naar oneindig gaat (indien mogelijk)? En als je bijvoorbeeld de geldigheid van een formule moet bewijzen voor ieder natuurlijk getal n, probeer het dan eerst voor $n = 0$, voor $n = 1$, voor $n = 2$, enzovoorts.

Kortom, zit niet bij de pakken neer, maar ga aan het werk. Veel succes!!



De Nederlandse Wiskunde Olympiade

oplossingen

Pythagoras

2 $3-\sqrt{6}$
3 $4\sqrt{5}$
4 $a=70$ (en $b=71$)
5 $7\frac{1}{2}$

Getallenraadsels

7 502
8 12
9 99999785960
10 931
11 $a=56, b=334, c=18704$
12 99

Oppervlakte

14 24
15 126
16 72
17 30

Cirkels

19 $2\pi+12$
20 1
21 $4\pi-8$
22 $\sqrt{2/3}$
23 $\sqrt{2}$

Deelbaarheid

25 60
26 12
27 19
28 61
29 $2^3\times3^2\times5\times7\times11\times13\times29\times37$
30 $2^6\times3^4\times5^2\times7^2$
31 46826

Rekenraadsels

33 31
34 5184
35 432
36 539
37 1,20 euro, 1,25 euro en 4,90 euro
38 1711

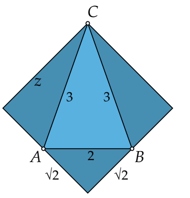
Rijen getallen

40 49
41 11
42 1992
43 663
44 −10

Veelhoeken met symmetrie	46	1/6
	47	4 : 3
	48	12
	49	6
	50	8
Meetkundige getallenschema's	52	601
	53	836
	54	84
Redeneren	56	29
	57	31
	58	12/5
	59	57
	60	36 rood, 13 wit, 26 blauw
Meetkunde varia	62	3
	63	1982
	64	$\sqrt{34}$
	65	$PR = \sqrt{3}$, $CR = 5$
Ruimtemeetkunde	67	59
	68	81 cm
	69	$48\sqrt{11}$
	70	7
	71	$10/\sqrt{3}$
Sport en spel	73	Annet 26, Berdien 14, Chris 8
	74	70
	75	$7\frac{1}{2}$
	76	$160\pi + 18$ meter
	77	120/37
Handig tellen	79	10
	80	35
	81	20160
	82	37
	83	630
	84	1597
Vergelijkingen	86	3971
	87	$n = 11$, $m = 3$
	88	$a = 2$, $b = 14$, $c = 18$, $d = 126$
	89	1156
	90	$x = 24$, $y = 88$

T1

Stel z is de zijde van het vierkant. Twee van de drie hoekpunten van driehoek ABC liggen op tegenover elkaar liggende zijden van het vierkant. A en B kunnen het niet zijn, want dan valt C buiten het vierkant, dus we mogen zonder beperking van de algemeenheid aannemen dat het B en C zijn. Dan is $BC \geq z$, waarbij gelijkheid optreedt als BC evenwijdig is aan een zijde van het vierkant. De maximale oppervlakte van het vierkant is dus $BC^2 = 9$. Het vinden van de minimale oppervlakte is lastiger. Een eerste idee is misschien om de zijde AB langs een zijde van het vierkant te leggen. Dit geeft een oppervlakte van 8 (teken de hoogtelijn uit C en gebruik Pythagoras). Maar toch is dit niet het kleinste omgeschreven vierkant.



Er is namelijk nóg een extreme situatie, en dat is wanneer C in een hoekpunt van het vierkant ligt, en A en B symmetrisch liggen op de beide tegenoverliggende zijden. In deze situatie geldt

$$z^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3^2$$

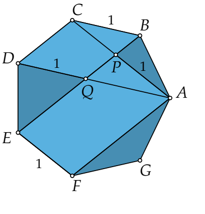
met $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}+2$ als enige positieve oplossing, en de oppervlakte van het vierkant is dan $z^2 = \frac{9}{2} + 2\sqrt{2} < 8$. Dit is de minimale waarde.

T2

Stel dat B' het spiegelbeeld is van B in de lijn AE. Dan ligt B' ook op de cirkel. Omdat $\angle FAB' = 45° - \angle EAB' = 45° - \angle EAB' = 45° - (90° - \angle DAE) = -45° + \angle DAE = \angle DAF$ is B' ook het spiegelbeeld van D in de lijn AF. Er geldt dus $\angle AB'F = \angle ADF = 90°$ en $\angle AB'E = \angle ABE = 90°$ zodat E, B' en F op één lijn liggen die loodrecht op de straal AB' staat, en dus een raaklijn is aan de cirkel.

T3

In een regelmatige zevenhoek is iedere diagonaal evenwijdig aan een van de zijden. Zo zijn AC en AD evenwijdig aan respectievelijk FE en BC. Als hulplijnen trekken we nu nog de diagonalen BE en AF. De lijn BE snijdt AC in P en AD in Q. De vierhoeken $BCDQ$ en $EFAP$ hebben evenwijdige overstaande zijden, en dus zijn het parallellogrammen. Daarom geldt $AP = FE = 1$ en $DQ = CB = 1$. Omdat PQ en CD evenwijdig zijn, geldt $AP : AC = AQ : AD$, dat wil zeggen dat



$$\frac{1}{AC} = \frac{AD - 1}{AD}$$

Hieruit volgt de gevraagde relatie.

T4

De grafiek van de functie $f(x) = x(2n - x)$ is een bergparabool met top n^2 voor $x = n$. Bijgevolg is $f(x) \leq n^2$ voor alle x, waarbij het gelijkteken alleen maar optreedt als $x = n$.
Met $P(n) = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n - 1)$ (een product van precies n termen) en de truc van Gauss (zie bladzijde 31) in het achterhoofd, maar deze keer met vermenigvuldigen in plaats van optellen, schrijven we

$$\begin{aligned} P(n)^2 &= (1 \times (2n-1))(3 \times (2n-3)) \cdots ((2n-1) \times 1) \\ &< \left(n^2\right)^n = (n^n)^2 \end{aligned}$$

waaruit de gevraagde ongelijkheid volgt

T5

Als x geheel is, is $f(x)$ een breuk. Als $f(x)$ bovendien een geheel getal is, is de noemer een deler van de teller. Omdat de noemer $2x^2 - 9x = x(2x - 9)$ een geheel veelvoud is van x, moet de teller dan ook een geheel veelvoud zijn van x. De teller is $2x^3 - 6x^2 + 13x + 10 = x(2x^2 - 6x + 13) + 10$, en als dit een geheel veelvoud van x is, moet ook 10 een geheel veelvoud van x zijn. De enige positieve delers van 10 zijn 1, 2, 5 en 10, en invullen levert $f(5) = 35$ en $f(10) = 14$ als de enige geheeltallige waarden. De oplossing is dus $x = 5$ en $x = 10$.

T6

Op bladzijde 60 hebben we al een deel van de oplossing verklapt. De breuken ADA/KOK en SNEL/9999 moeten hetzelfde getal voorstellen. Teller en noemer van de tweede breuk moeten daarvoor door een deler van 9999 gedeeld worden. Omdat $9999 = 3 \times 3 \times 11 \times 101$ moet KOK gelijk zijn aan 101, 303 of 909. Na wat puzzelen (we laten dat graag aan je over) vind je als enige oplossing $\dfrac{242}{303} = .79867986\ldots$

T7

We bewijzen de equivalente ongelijkheden

$$1992 < (1992?)^2 < \frac{16}{9} \times 1992$$

Door uitschrijven zie je al snel dat voor een even getal als 1992 geldt dat

$$1992? = \frac{1992 \times 1990 \times 1988 \times \cdots \times 6 \times 4 \times 2}{1991 \times 1989 \times 1987 \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1}$$

en dus ook, na kwadrateren,

$$(1992?)^2 = \frac{1992^2 \times 1990^2 \times 1988^2 \times \cdots \times 6^2 \times 4^2 \times 2^2}{1991^2 \times 1989^2 \times 1987^2 \times \cdots \times 5^2 \times 3^2 \times 1^2}$$

De factoren in teller en noemer van deze breuk kunnen we op twee manieren herschikken. Door in beide gevallen de ongelijkheid $n^2 > (n + 1)(n - 1)$ te gebruiken, krijgen we de gevraagde ongelijkheden:

$$\begin{aligned} (1992?)^2 &= \frac{1992^2}{1991} \times \frac{1990^2}{1991 \times 1989} \times \cdots \times \frac{4^2}{5 \times 3} \times \frac{2^2}{3 \times 1} \\ &> 1992 \times \frac{1992}{1991} > 1992 \end{aligned}$$

en

$$
\begin{aligned}
(1992?)^2 &= 1992 \times \frac{1992 \times 1990}{1991^2} \times \cdots \times \frac{6 \times 4}{5^2} \times \frac{4 \times 2}{3^2} \times 2 \\
&< 1992 \times \frac{16}{9}.
\end{aligned}
$$

T8

1. Omdat $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ en $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ geldt $6n = (n+1)^3 - n^3 - n^3 + (n-1)^3$.
2. Elk geheel getal m is een 6-voud, een 6-voud ± 1, een 6-voud ± 2 of een 6-voud $+3$. Elk 6-voud kun je als som van vier derdemachten schrijven. Door voor de vijfde derdemacht respectievelijk $0^3 = 0$, $\pm 1^3 = \pm 1$, $\pm 2^3 = \pm 8$ (een 6-voud ± 2) of $3^3 = 27$ (een 6-voud $+3$) te kiezen, krijg je in alle gevallen een schrijfwijze van m als som van vijf derdemachten.

T9

Stel dat er aanvankelijk a knikkers in bak A lagen, met op die knikkers getallen met een totale som van S. In bak B lagen er dan $101 - a$ knikkers met een totale som van $5151 - S$, want de som van alle getallen op alle knikkers is $\frac{1}{2} \times 101 \times 102 = 5151$ (zie de truc van Gauss op bladzijde 31). De gemiddelden in de bakken A en B zijn dan

$$\frac{S}{a} \quad \text{en} \quad \frac{5151 - S}{101 - a}$$

Na verplaatsen van knikker 40 worden deze aantallen

$$\frac{S - 40}{a - 1} \quad \text{en} \quad \frac{5191 - S}{102 - a}$$

Beide gemiddelden zijn met $\frac{1}{4}$ toegenomen, dus

$$\frac{S}{a} + \frac{1}{4} = \frac{S - 40}{a - 1} \quad \text{en} \quad \frac{5151-S}{101-a} + \frac{1}{4} = \frac{5191-S}{102-a} \text{D}\, e$$

ze vergelijkingen kunnen we herleiden tot

$$4S = a^2 + 159a \quad \text{en} \quad 4S = a^2 - 43a + 14746$$

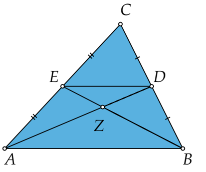
waaruit volgt $a = 73$ en $S = 4234$. Er zaten dus oorspronkelijk 73 knikkers in bak A.

T10

1. Neem bijvoorbeeld de rij $9, 3, 1, 7, 4, 2, 6, 5, 0, 8$.
2. De som van de getallen $0, 1, 2, \ldots, 9$ is 45. Stel dat er wel zo'n rijtje a_0, $a_1, \ldots, a_9$ zou bestaan. Dan kun je de som van de getallen op twee manieren tellen: $45 = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8) + a_9$ en $45 = a_0 + (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9)$ waarbij elk van de sommen van drie termen tussen haakjes hoogstens 12 is. Maar dat betekent dat zowel $a_9 \geq 9$ als $a_0 \geq 9$ is, in tegenspraak met het feit dat er maar één getal 9 voorkomt, en dat alle andere getallen kleiner dan 9 zijn.

gelijkvormigheid en congruentie

E1 Omdat $CE : CA = CD : CB = 1 : 2$ is $ED // AB$ en $ED : AB = 1 : 2$. Omdat $ED // AB$ is $EZ : ZB = DZ : ZA = ED : AB$ en omdat $ED : AB = 1 : 2$ geldt ook dat $EZ : ZB = DZ : ZA = 1 : 2$. Het punt Z verdeelt dus de beide zwaartelijnen AD en BE in de verhouding $2 : 1$, en volgens dezelfde redenering moet dit dan ook voor de derde zwaartelijn gelden. In het bijzonder gaat de derde zwaartelijn dus ook door Z.



E2 De driehoeken ABC en ABZ hebben dezelfde basis AB en hun hoogtelijnen verhouden zich als $3 : 1$. Hetzelfde geldt dus voor hun oppervlakten, met andere woorden: de oppervlakte van driehoek ABZ is het derde deel van de oppervlakte van driehoek ABC. Evenzo voor BCZ en CAZ.

E3 Noem het snijpunt van AD met de lijn door C evenwijdig aan AB weer H, en volg het bewijs van de gewone bissectricestelling.

E4 Pas de sinusregel toe op de driehoeken ADB en ADC en gebruik dat $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$.

van breuk naar decimale ontwikkeling

E6 De noemer n bevat alleen maar priemfactoren 2 en 5.

E7 De noemer n bevat ten minste één priemfactor 2 of 5.

meer over periodieke ontwikkelingen

E8 *a*. $2/3$, *b*. $4/11$, *c*. $182/909$, *d*. $31/275$, *e*. $83177/83250$.

E9 Neem als voorbeeld de ontwikkeling van $1/2$. Die wordt nu $0.49999\ldots = 0.4\overline{9}$.
Merk op dat bij het alternatieve algoritme de rest c_i voldoet aan $0 < c_i \leq n$. De rest 0 kan dus niet optreden, en de ontwikkeling breekt dus ook nooit af. $0.\overline{9} = 1$ en $0.4\overline{9} = 1/2$.

E10 Alleen bij de breuken waarvoor de noemer uitsluitend factoren 2 en 5 bevat. In het oorspronkelijke algoritme zijn dit de breuken met een afbrekende decimale ontwikkeling, in het alternatieve algoritme geven ze ontwikkelingen die op den duur uitsluitend negens bevatten. Bij alle andere noemers geven de twee algoritmen hetzelfde resultaat.

E11 De binaire breuk $10/101$ (in decimale notatie $2/5$) heeft de periodieke binaire ontwikkeling $0.\overline{0110}$.

rationale en irrationale getallen

E12 De n-de 1 staat op plaats $\frac{1}{2}n(n+1)$, dus de 25^e 1 staat op plaats 325. Omdat $5050 = \frac{1}{2} \times 100 \times 101$ is de 5050^e decimaal een 1.

E13 Zou R rationaal zijn, dan zou de decimale ontwikkeling periodiek worden met een periode van een zekere lengte k. Tegelijkertijd komen in die decimale ontwikkeling ook alle getallen van de vorm $100\ldots000$ voor met meer dan k nullen. Tegenspraak.
In de decimale ontwikkeling staan op de eerste 9 plaatsen alle getallen van 1 cijfer, op de volgende $90 \times 2 = 180$ plaatsen alle getallen van twee cijfers. Daarna komt $\ldots 100101102103 \ldots$ met op de elfde plaats een 0.

E14 Alleen het bewijs dat $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrationaal is, gaat anders dan in de voorbeelden. Zou a rationaal zijn, dan zou ook $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ rationaal zijn, en dus ook $\sqrt{6}$. Dit is niet het geval (volg het bewijs dat $\sqrt{2}$ irrationaal is).

E15 Stel dat a een positief irrationaal getal is, en dat $\sqrt{a} = p/q$ zou zijn, met p en q geheel. Dan was $a = p^2/q^2$, en dat is een rationaal getal; tegenspraak. Het omgekeerde geldt natuurlijk niet: de wortel uit een rationaal getal b kan best irrationaal zijn, neem maar $b = 2$.

E16 Alle letters in dit bewijs stellen positieve gehele getallen voor. Als n geen kwadraat is, kunnen we n schrijven als $n = k \times m^2$, waarbij in k alle priemfactoren slechts één maal voorkomen. Omdat $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$ is het voldoende om aan te tonen dat $\sqrt{k}$ irrationaal is. Laat p een priemfactor zijn van k. Dan is $k = p \times r$, waarbij r niet deelbaar is door p.
Stel nu dat $\sqrt{k} = a/b$, waarin a en b geen delers gemeen hebben. Dan is $k = a^2/b^2$, dus $b^2 \times k = a^2$. Omdat $k = p \times r$ geldt dan $b^2 p \times r = a^2$ dus a^2 is deelbaar door p. Omdat p een priemgetal is, moet a dan zelf ook door p deelbaar zijn: $a = p \times a'$. Delen door p geeft $b^2 \times r = p \times (a')^2$. Omdat r niet deelbaar is door p, moet b^2, en dus ook b, deelbaar zijn door p. Zowel a als b zijn dus deelbaar door p, tegenspraak.

E17 De eerste zeven breuken zijn $1, 2, 5/2, 8/3, 65/24, 163/60, 1957/720$. De achtste benadering is $685/252 = 2.71825\ldots$. Merk op hoe klein de fout al is! Deze reeks voor e convergeert zeer snel; om 50 correcte decimalen te vinden, hoef je niet verder te gaan dan de 42-e breuk.
Ter vergelijking: een andere bekende benadering van e door een rij breuken wordt gegeven door de formule $a_n = ((n+1)/n)^n$. Men kan bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$, maar bij de duizendste term zijn er nog maar twee decimalen goed: $a_{1000} = (1001/1000)^{1000} = 2.7169\ldots$.

Colofon

Dit boek is uitgegeven door de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.
Adres: F. Bosman, secretaris, p/a Citogroep, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem.

De uitgave van dit boek is mogelijk gemaakt door financiële steun van het WisKids Project, dr. A.H. Hoekstra †, het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de Nederlandse Onderwijs Commissie voor de Wiskunde, de Gratama Stichting.

eindredactie en figuren	Jan van de Craats, Oosterhout NB
grafische vormgeving	Kitty Molenaar, Amsterdam
zetwerk	Wybo Dekker, Deil
productie	Chris Zaal, Amsterdam
druk	drukkerij Giethoorn Ten Brink, Meppel

websites

Nederlandse Wiskunde Olympiade	olympiads.win.tue.nl/nwo/
Pythagoras wiskundetijdschrift voor jongeren. Geef je op als abonnee!	www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
Vierkant voor wiskunde zomerkampen en andere wiskunde-activiteiten en wiskunde-uitgaven voor scholieren	www.vierkantvoorwiskunde.nl
Kangoeroe wiskundewedstrijd voor scholieren	www-math.sci.kun.nl/math/kangoeroe/
WisKids	www.fi.uu.nl/wiskids/

Van een trap met 15 treden moet elke trede blauw of geel geverfd worden, waarbij geen twee opeenvolgende treden beide blauw mogen zijn. Op hoeveel manieren kan de trap geverfd worden?

Een dergelijk vraagstuk zul je niet zo snel in een schoolboek tegenkomen. Dat klopt, want deze opgave is afkomstig uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Voor het oplossen ervan bestaat geen rechttoe-rechtaan methode. Toch kun je met elementaire wiskunde, gezond verstand, creativiteit en logisch redeneren het juiste antwoord vinden.

Dit boek bevat de honderd leukste, spannendste en mooiste opgaven van de Nederlandse Wiskunde Olympiade van de afgelopen twintig jaar. Alle opgaven zijn voorzien van hints en antwoorden. Korte toelichtingen met de benodigde wiskundige theorie en voorbeeldoplossingen zetten je op het juiste spoor.

Speel met oppervlaktes, vierkanten en cirkels. Leer goochelen met getallen, breuken en symmetrie. Test je denkvermogen en je verbeeldingskracht. Zet je schrap en ga de uitdaging aan met de opgaven van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We beloven je urenlang puzzelplezier.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wiskundewedstrijd in twee rondes. De eerste ronde vindt plaats op middelbare scholen. De beste honderd leerlingen van het hele land gaan door naar de tweede ronde. Uit de prijswinnaars wordt elk jaar een team samengesteld dat Nederland vertegenwoordigt bij de Internationale Wiskunde Olympiade.

uitgave van Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade