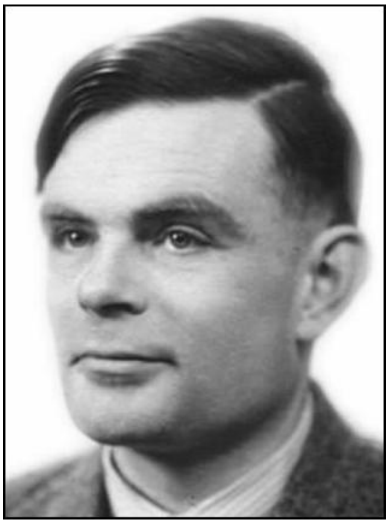
LOGICA OP HET MENU
DEEL 4

Luc Gheysens en Daniël Tant



Alan Turing (1912-1954) was een Britse wiskundige, logicus en computerpionier. Hij studeerde wiskunde aan de Universiteit van Cambridge. Daar maakte hij kennis met het zogeheten Entscheidungsproblem, en publiceerde hij een wereldberoemd artikel *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. Dit beslissingsprobleem laat zich als volgt omschrijven: bestaat er een algoritme om te beslissen of een logische bewering waar is of niet (is het antwoord op een logische vraag berekenbaar?). In 1936 kwamen Turing en onafhankelijk van hem Alonzo Church tot de conclusie dat het algemene antwoord nee luidt onder bepaalde voorwaarden, de Church-Turing-hypothese.

Met dit artikel als basis bedacht Turing de Logical Computing Machine. Dit gedachte-experiment werd later de Turingmachine genoemd. Na Cambridge werkte Turing van 1936 tot 1938 bij Church aan de Princeton-universiteit in de Verenigde Staten. Daarna keerde hij terug naar Cambridge.

In de jaren van de Tweede Wereldoorlogwerkte Turing in het geheim bij de Government Code and Cypher School, gehuisvest op het landgoed Bletchley Park, nabij Londen. Dit was de Britse crypto-analytische dienst, die als doel had de Duitse Enigmacode te ontcijferen, zodat de geallieerden de vijand een stap voor konden zijn. De ontcijfering ervan gebeurde met behulp van een elektromechanisch toestel – de zogenaamde bombe – die Turing had bedacht en ontworpen. Men neemt algemeen aan dat Turing hiermee een van de grootste prestaties van de Tweede Wereldoorlog op zijn naam schreef en dat de geallieerden hierdoor de uiteindelijke overwinning zouden kunnen behalen.

In 1952 werd Turing gearresteerd wegens homoseksuele handelingen (die tot 1967 in Engeland voor mannen strafbaar waren) en veroordeeld, waarbij hij kon kiezen tussen een experimentele chemische castratie gedurende een jaar, en een gevangenisstraf. Turing koos het eerste.

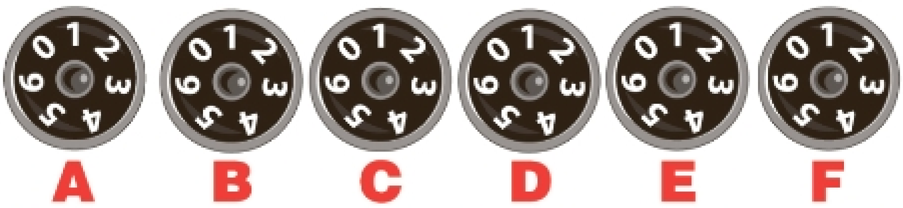
Op 7 juni 1954 werd hij dood aangetroffen met een appel, die - naar beweerd werd - met cyanide vergiftigd was. Er wordt over zijn dood veel gespeculeerd. De officiële doodsoorzaak is zelfmoord, maar er wordt beweerd dat hij door de Engelse geheime dienst is vermoord, omdat hij te veel zou weten over geheime codes en daardoor een te groot veiligheidsrisico werd. Op 24 december 2013 verleende koningin Elizabeth II Alan Turing gratie en werd zijn veroordeling wegens homoseksualiteit uit de boeken geschrapt.

In 2014 kwam de Brits-Amerikaanse film *The Imitation Game* uit over het leven van Turing.

Bron: wikipedia.

Puzzelaars zijn in feite dagelijks over heel de wereld bezig met het kraken van codes via het zoeken naar de oplossing van sudoku's, binairo's, kruiswoordraadsels, cryptogrammen, rebussen enzovoort … We dagen hierbij meteen de lezer uit om zelf een eenvoudige logische puzzel op te lossen. De oplossing staat op het einde van dit artikel.

KRAAK DE CODE



Zoek de zescijferige code met behulp van onderstaande aanwijzingen. De cijfers kunnen variëren van 0 t/m 6. Er komt dus nooit een 7, 8 of 9 in de code voor. Schrap op de buttons A-F de cijfers die afvallen tot de juiste oplossing overblijft.

A + C = 5	B - D = 5	B + C = 6
E x F = 6	B - E = 3	A + D = 6

Ook wiskundelessen bieden heel wat kansen tot logisch redeneren via bewijsvormen: een bewijs uit het ongerijmde, een bewijs door contrapositie, het belang van een tegenvoorbeeld, een bewijs door volledige inductie, een direct bewijs, een bewijs met een nodige en voldoende voorwaarde … Dat heel wat studenten hier toch enige moeite mee hebben, kunnen we o.a. besluiten over hoe goed (lees: slecht) logica-vragen werden opgelost in de voorbije 30 edities van de Vlaamse Wiskunde Olympiade (VWO voor leerlingen van de derde graad en JWO = Junior Wiskunde Olympiade voor leerlingen van de tweede graad). Vandaar dat een aantal leerkrachten toch weer teruggrijpen naar de elementaire propositielogica om zo het wiskundig redeneren toch wat te funderen. Een zaak die we zeker kunnen aanmoedigen. Met wat elementaire logica, gekruid met een leuke paradox kan een wiskundeleraar in elk geval 'scoren' bij een groot aantal leerlingen.

We bieden de lezer daarom graag een LOGICAMENU aan:

APERITIEF: een uitdagend logica-raadsel

VOORGERECHT: een vleugje propositielogica

HOOFDGERECHT: 5 meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie

NAGERECHT: een wiskundige bewijsvorm in de kijker

AFZAKKERTJE: een logische paradox

SMAKELIJK!

Een uitdagend logicaraadsel.

Een oude Griek liegt altijd op donderdag en spreekt steeds de waarheid op zaterdag en zondag. Op alle andere dagen van de week liegt hij soms. Men vroeg hem gedurende op zeven opeenvolgende dagen naar zijn echte naam. De eerste zes dagen gaf hij achtereenvolgens deze antwoorden: Epimenides, Zeno, Aristoteles, Zeno, Protagoras en Zeno. Wat was zijn echte naam?

Oplossing. Aangezien hij op twee opeenvolgende dagen (zaterdag en zondag) de waarheid spreekt en hij gedurende de eerste zes dagen nooit twee keer na elkaar dezelfde naam opgaf, moet hij de naam Epimenides op een maandag of op een zondag uitgesproken hebben. Als dat op een maandag gebeurde, dan zou hij op donderdag en op zaterdag de naam Zeno uitgesproken hebben. Maar dat is in tegenspraak met het feit dat hij op donderdag altijd liegt en op zaterdag altijd de waarheid spreekt. Bijgevolg sprak hij de naam Epimenides op zondag uit en is dat zijn echte naam.

Een beetje propositielogica.

Om de waarheidswaarde van logische uitdrukkingen op een visueel overzichtelijke manier voor te stellen gebruikt met zogenaamde waarheidstabellen (zie ook de vorige drie artikels van ‘Logica op het menu’).

Voorbeeld 1. De waarheidstabel voor de logische uitdrukking $(p \wedge q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

p	q	(p	∧	q)	∨	(¬ p	⇒	q)
1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	1
1	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0	1	0
0	1	0	0	1	$\boxed{1}$	1	1	1
0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	1	0	0
1	**1**	**2**	**3**	**2**	**4**	**2**	**3**	**2**

De cijfertjes in de onderste rij van de tabel staan in het vetjes gedrukt en verwijzen naar de volgorde waarin men de cijfers 1 (voor waar) en 0 (voor onwaar) invult. Het eindresultaat staat in een rechthoekje (met onderaan het in vetjes afgedrukte cijfer 4).

Voorbeeld 2. De wet van de **contrapositie**: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

p	q	(p	⇒	q)	⇔	(¬ q	⇒	¬ p)
1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	0
1	0	1	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0
0	1	0	1	1	$\boxed{1}$	0	1	1
0	0	0	1	0	$\boxed{1}$	1	1	1
1	**1**	**2**	**3**	**2**	**4**	**2**	**3**	**2**

Deze bewering is een **tautologie** of **logische stelling** omdat haar waarheidswaarde altijd 1 (waar) is onafhankelijk van de waarheidswaarde van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.
Een **contradictie** of **tegenspraak** is een samengestelde bewering waarvan de waarheidswaarde altijd 0 (onwaar) is, voor alle mogelijke waarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.
De bewering in voorbeeld 1 is dus geen tautologie en ook geen contradictie. In dit geval spreekt men van een **contingentie**.

Voorbeeld 3. Een vaak gebruikte bewijsvorm in de wiskunde is het zogenaamde bewijs uit het ongerijmde. Net zoals bij een bewijs door contrapositie veronderstelt men hierbij dat het gevolg (consequens q) niet waar is. Als dit samen met het antecendens p tot een tegenspraak leidt, is het gevolg noodzakelijkerwijze waar. Het verschil is dat men bij een bewijs uit het ongerijmde een willekeurige tegenspraak bekomt, niet noodzakelijk de negatie van het antecedens p.

Een bewijs uit het ongerijmde steunt op de volgende tautologie:

$$((\neg q \wedge p) \Rightarrow 0) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q),$$

waarbij 0 staat voor een propositie die altijd onwaar is.

p	q	(($\neg$ q	$\wedge$	p)	$\Rightarrow$	0)	$\Leftrightarrow$	(p	$\Rightarrow$	q)
1	1	0	0	1	1	0	$\boxed{1}$	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	$\boxed{1}$	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	$\boxed{1}$	0	1	0
1	**1**	**2**	**3**	**2**	**4**	**3**	$\boxed{\mathbf{5}}$	**3**	**4**	**3**

We vermelden heironder nog een reeks logische wetten.

1. De modus ponens: $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

2. De dubbele negatie: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

3. De implicatie en de negatie van de implicatie: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
   $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

4. Syllogisme (transitiviteit van de implicatie): $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

5. De wet van de uitgesloten derde: $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$

6. Commutativiteit van conjunctie en disjunctie: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
   $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

7. Associativiteit van conjunctie en disjunctie: $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
   $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

8. Distributiviteit van de conjunctie t.o.v. de disjunctie:

   $$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

   Distributiviteit van de disjunctie t.o.v. conjunctie:

   $$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

9. Bewijs van equivalentie (‘de pijl in twee richtingen’ of nodig en voldoende voorwaarde):

   $$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

10. De wetten van De Morgan (zie ook deel 3 van Logica op het menu):

    $$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
    $$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Vijf meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie.

We dagen je uit om deze vijf vragen op te lossen. Op het einde vind je – ter controle – de juiste antwoorden.

VRAAG 1 – VWO 1995-1996 – tweede ronde – vraag 19

Van drie beweringen A, B en C is het volgende geweten:

- Als A juist is, dan zijn B en C juist.
- Als B juist is, dan is er van A en C tenminste één juist.
- Als C juist is, dan is A juist en B fout.

Welke van de beweringen A, B, C zijn dan juist?

(A) enkel A	(B) enkel B	(C) enkel C
(D) geen enkele	(E) allemaal	

VRAAG 2 – VWO 1996-1997 – tweede ronde – vraag 21

An, Bert en Chris dragen elk een jeans van verschillende kleur (grijs, blauw, zwart). Bovendien is het volgende geweten:

- Als An een blauwe draagt, dan draagt Bert een grijze.
- Als An een zwarte draagt, dan draagt Chris een grijze.
- Als Bert geen zwarte draagt, dan draagt Chris een blauwe.

Hieruit volgt

(A) Chris draagt een blauwe jeans.
(B) Chris draagt een grijze jeans.
(C) Chris draagt een zwarte jeans.
(D) De beweringen zijn strijdig.
(E) De gegevens zijn niet bepalend voor de kleur van Chris' jeans, er zijn meerdere mogelijkheden.

VRAAG 3 – VWO 2004-2005 – eerste ronde – vraag 6

Jan liegt altijd op maandag, dinsdag en woensdag en niet op de overige dagen. Piet liegt altijd op donderdag, vrijdag en zaterdag en niet op de overige dagen. Op een dag zegt Jan tegen Piet: "Morgen zal ik liegen." Piet reageert: "Morgen zal ik ook liegen." Op welke dag vond dit gesprek plaats?

(A) woensdag	(B) donderdag	(C) vrijdag
(D) zaterdag	(E) zondag	

VRAAG 4 – VWO 2004-2005 – tweede ronde – vraag 2

Indien alle lieve mensen blond zijn, hoeveel van volgende uitspraken zijn dan juist?

(a) De mensen die niet blond zijn, zijn niet lief.

(b) De mensen die niet lief zijn, zijn niet blond.

(c) De mensen die lief zijn, zijn blond.

(d) De mensen die niet blond zijn, zijn lief.

(e) De blonde mensen zijn lief.

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

VRAAG 5 – VWO 2006-2007 – eerste ronde – vraag 13

Een ver land is verdeeld in twee gebieden: het oosten en het westen. De mensen uit het westen spreken steeds de waarheid. De mensen uit het oosten liegen altijd. De koning vroeg aan zijn hofmaarschalk waar de premier woont. De hofmaarschalk wist het antwoord niet en mailde naar de premier. Nadat hij antwoord kreeg van de premier, zei de hofmaarschalk tegen de koning: "De premier woont in het oosten". Wat kan hieruit met zekerheid besloten worden?

(A) De premier komt uit het oosten.
(B) De premier komt uit het westen.
(C) De hofmaarschalk komt uit het oosten.
(D) De hofmaarschalk komt uit het westen.
(E) De koning komt uit het westen.

OPLOSSINGEN

VRAAG 1. Antwoord: D.

Als A juist is, dan volgt uit het eerste gegeven dat ook B en C juist zijn. Evenwel, B en C kunnen niet tegelijk juist zijn, want volgens het derde gegeven is B fout als C juist is. Bijgevolg kan A niet juist zijn.
Als B juist is, dan volgt uit het derde gegeven dat C niet juist is en bijgevolg uit het tweede gegeven dat A juist moet zijn. Maar dit kan al niet.
Als C juist is, dan volgt uit het derde gegeven dat A juist is en dat kan niet.
We mogen besluiten dat geen enkele bewering juist is.

VRAAG 2. Antwoord: A.

Onderstel dat Chris een grijze jeans draagt, dan volgt uit het derde gegeven (via contrapositie) dat Bert een zwarte jeans draagt en bijgevolg moet An een blauwe jeans dragen. Dit is in tegenspraak met het eerste gegeven.
Onderstel dat Chris een zwarte jeans draagt, dan volgt op dezelfde manier uit het derde gegeven dat Bert eveneens een zwarte jeans draagt en dit kan niet.
Bijgevolg draagt Chris een blauwe jeans. Door contrapositie volgt uit het tweede gegeven dat An een grijze jeans draagt en dus draagt Bert een zwarte jeans. Dit levert geen tegenspraak op met de overige gegevens.

VRAAG 3. Antwoord: A.

We stellen de gegeven situatie voor in een overzicht. Hierbij betekent '0' dat de persoon dei dag liegt en '1' dat de persoon die dag de waarheid spreekt.

	maandag	dinsdag	woensdag	donderdag	vrijdag	zaterdag	zondag
Jan	0	0	0	1	1	1	1
Piet	1	1	1	0	0	0	1

Jan kan de uitspraak "Morgen zal ik liegen." enkel doen op woensdag of zondag. Piet kan de uitspraak "Morgen zal ik liegen." doen op woensdag of zaterdag. Het gesprek vond dus plaats op woensdag.

VRAAG 4. Antwoord: B.

Men gaat (met een beetje logisch nadenken) gemakkelijk na dat de uitspraken (a) en (c) juist zijn.

VRAAG 5. Antwoord: C.

We kunnen een tabel opstellen, waarbij ‘O’ staat voor ‘woont is het oosten’ en ‘W’ voor ‘woont in het westen’. De verschillende mogelijkheden worden hierin aangeduid en in de slotkolom staat telkens de resulterende uitspraak die de hofmaarschalk doet.

premier	hofmaarschalk	resulterende uitspraak van de hofmaarschalk
O	O	De premier woont in het westen.
O	W	De premier woont in het westen.
W	O	De premier woont in het oosten.
W	W	De premier woont in het westen.

We kunnen hieruit met zekerheid besluiten dat de hofmaarschalk in het oosten woont.

Een wiskundige bewijsvorm: een bewijs uit het ongerijmde (Latijnse term: reductio ad absurdum = herleiding tot een absurditeit).

Eerder in dit artikel kon je lezen hoe een bewijs uit het ongerijmde verloopt. Het best gekende voorbeeld hiervan staat in heel wat wiskundehandboeken vermeld:

STELLING. $\sqrt{2}$ is irrationaal.

Bewijs uit het ongerijmde.
Veronderstel dat $\sqrt{2}$ een rationaal getal is, dan mogen we aannemen dat dit getal gelijk is aan een onvereenvoudigbare breuk $\frac{a}{b}$ en dan is $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$. Vermits $a^2 = 2b^2$, is a even (want het kwadraat van een oneven getal is oneven). Dus is a = 2c voor een zeker natuurlijk getal c. Dan is $4c^2 = 2b^2$ of nog $b^2 = 2c^2$ en dit impliceert dan weer dat b even is. Bijgevolg hebben be en c een gemeenschappelijke factor . Dit is meteen een tegenspraak omdat $\frac{a}{b}$ onvereenvoudigbaar is.

De lezer weet ongetwijfeld dat Euclides via een bewijs uit het ongerijmde kon aantonen dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Je kunt dit bewijs bijvoorbeeld nalezen op http://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Euclides).

Georg Cantor toonde via een bewijs uit het ongerijmde aan dat er geen bijectie kan bestaan tussen de verzameling van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en de verzameling van de reële getallen in het interval [0,1], waarmee hij in feite aantoonde dat er ‘meer’ reële getallen in het interval [0,1] liggen dan er natuurlijke getallen zijn. Dit fundamenteel bewijs kan je nalezen op http://nl.wikipedia.org/wiki/Diagonaalbewijs_van_Cantor.

We passen tenslotte deze bewijsvorm ook toe voor een eenvoudige eigenschap uit de getallenleer.

EIGENSCHAP. Er bestaan geen gehele getallen m en n zodat 8m – 6n = 2017.

Bewijs uit het ongerijmde.
Veronderstel dat er wel dergelijke getallen bestaan. Dan is 8m – 6n = 2(4m – 2n) en dat is een even getal. Dit kan dus onmogelijk gelijk zijn aan het oneven getal 2017.

Enkele paradoxen uit de ‘oude Griekse doos’ (bron: www.hhofstede. nl).

PARADOX 1. De leugenaarsparadox van Epimenides.

De paradox is de volgende uitspraak, gedaan door de Kretenzische filosoof Epimenides:

"Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται (Kretenzers liegen altijd)".

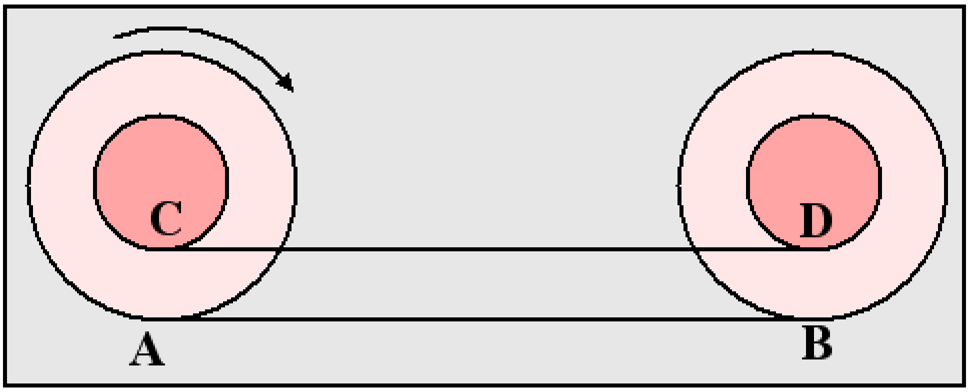
Wanneer men deze uitspraak interpreteert als ‘Alle uitspraken van alle Kretenzers zijn altijd gelogen”, dan is het blijkbaar onmogelijk te beslissen of de uitspraak van Epimenides (zelf een Kretenzer!) juist is of fout.

PARADOX 2. De gerechtsparadox van Protagoras.

Protagoras was een Griekse sofist, die les gaf in het pleiten bij het gerecht. Een leerling van hem, een zekere Euathlus, studeerde bij hem af zonder zijn lesgeld te betalen. Protagoras kwam met Euathlus overeen dat hij hem zou betalen van zodra hij zijn eerste proces zou winnen. Maar Euathlus slaagde hij blijkbaar niet direct is, zodat Protagoras besloot hem voor het gerecht te dagen. Protagoras redeneerde als volgt: “Als ik dat proces win, moet Euathlus me betalen. Als ik echter verlies, dan wint Euathlus het proces en moet hij ook betalen volgens onze eerdere overeenkomst.” Euathlus daarentegen redeneerde als volgt: “Als ik win, dan draait Protagoras hoe dan ook op voor de gerechtskosten. En als ik verlies, dan moet ik hem volgens onze overeenkomst nog altijd niet betalen.”

Wie had gelijk?

PARADOX 3. De wielparadox van Aristoteles.



Aan een wiel is een kleiner wiel zó bevestigd dat hun middelpunten samenvallen. We nemen aan dat het grote wiel over een vlakke bodem van A naar B rolt en hierbij één volledige omwenteling maakt. Dan zal het punt C op het kleine wiel tegelijkertijd op een rechte lijn van naar D bewegen en hierbij ook één volledige omwenteling maken. Maar |AB| = |CD| dus is de omtrek van het kleine wiel gelijk aan de omtrek van het grote wiel!

PARADOX 4. De paradoxen van Zeno.

Zeno van Elea leefde in de 5de eeuw voor Christus. Aan hem wordt de welbekende paradox van Achilles en de schildpad toegeschreven, waarmee hij o.a. wou aantonen dat beweging een illusie is. Maar op zijn naam staan nog een aantal andere paradoxen in dit verband. Meer hierover kan je lezen op http://nl.wikipedia.org/wiki/Zeno's_paradoxen .

Oplossing van KRAAK DE CODE: 5-6-0-1-3-2.

REFERENTIES

1. **W. Berkelmans**, Logica waar of onwaar, Faculteit der Wetenschappen, Vrije Universiteit Amsterdam, 2005.
2. **M. Roelens, P. Tytgat**, Logica (onder de loep), Uitwiskeling**,** jaargang 27 nummer 2, lente 2011.
3. **V. Vandewalle, D. Tant et al.,** Richting Analyse A, Uitgeverij Pelckmans, 1993.
4. **S. Verwulgen, E. Soetens,** Wiskunde voor de beginnende bachelor, Academia Press, 2008.

Luc Gheysens <lucgheysens@yahoo.com>
Populierenlaan 10, 8520 Kuurne
Ere-pedagogisch adviseur wiskunde

Daniël Tant <tant.daniel@telenet.be>
Beekstraat 61, 8730 Oedelem,
is tevens hoofdredacteur van dit tijdschrift