

LOGICA OP HET MENU DEEL 3

Luc Gheysens en Daniël Tant



George Boole (1815–1864) werd geboren in Lincoln, Engeland, als zoon van een schoenmaker. De universiteit van Cork (Ierland) benoemde hem in 1849 tot hoogleraar in de wiskunde.

Boole was een autodidact en schreef meerdere boeken en artikels over het gebruik van logica in de wiskunde. Beroemd is vooral zijn 'An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities' uit 1854. Hij bedacht de zogenaamde Booleaanse algebra en werd hiermee een van de grondleggers van de moderne computerwetenschap.

In de informatica is een **booleaanse algebra** of **Boole-algebra** een algebraïsche structuur met de logische operatoren AND (en), OR (of) en NOT (niet). Deze operatoren zijn direct gerelateerd aan de begrippen doorsnede, vereniging (unie) en complement uit de verzamelingenleer. Andere bewerkingen zijn NAND (niet-en), NOR (niet-of) en XOR (exclusieve of). Booleaanse algebra's vinden bijvoorbeeld toepassing in het samenstellen van digitale elektronische schakelingen, zoals die in computers worden gebruikt. In de praktijk kan men de werking ervan onder meer zien in sommige zoekmachines op het internet.

Een logigram is een logica-puzzel waarbij booleaanse algebra een toepassing vindt. Logicaraadsels zijn trouwens nog steeds erg populair. Maar ook wiskundelessen bieden heel wat kansen tot logisch redeneren via bewijsvormen: een bewijs uit het ongerijmde, een bewijs door contrapositie, het belang van een tegenvoorbeeld, een bewijs door volledige inductie, een direct bewijs, een bewijs met een nodige en voldoende voorwaarde ... Dat heel wat studenten hier toch enige moeite mee hebben, kunnen we o.a. besluiten over hoe goed (lees: slecht) logica-vragen werden opgelost in de voorbije 30 edities van de Vlaamse Wiskunde Olympiade (VWO voor leerlingen van de derde graad en JWO = Junior Wiskunde Olympiade voor leerlingen van de tweede graad). Vandaar dat een aantal leerkrachten toch weer teruggrijpen naar de elementaire propositielogica om zo het wiskundig redeneren toch wat te funderen. Een zaak die we zeker kunnen aanmoedigen. Met wat elementaire logica, gekruid met een leuke paradox kan een wiskundeleraar in elk geval 'scoren' bij een groot aantal leerlingen.



We bieden de lezer daarom graag een LOGICAMENU aan:

APERITIEF: een uitdagend logica-raadsel

VOORGERECHT: een vleugje propositielogica

HOOFDGERECHT: 5 meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie

NAGERECHT: een wiskundige bewijsvorm in de kijker

AFZAKKERTJE: een logische paradox

SMAKELIJK!

Een uitdagend logicaraadsel.



De winnaar van een quiz krijgt van de quizmaster drie omslagen. Op elk van de omslagen staat een nummer en een uitspraak. De quizmaster zegt erbij dat op slechts één van de drie omslagen een juiste uitspraak staat. Welke omslag moet de kandidaat dan kiezen om de hoofdprijs te winnen?

De hoofdprijs kan niet in omslag 3 zitten, want anders staat zowel op omslag 2 als op omslag 3 een juiste uitspraak. De hoofdprijs kan ook niet in omslag 1 zitten, want anders staat zowel op omslag 1 als op omslag 2 een correcte uitspraak. De hoofdprijs zit bijgevolg in omslag 2 en in dat geval is enkel de uitspraak op omslag 1 correct.

Een beetje propositielogica.

Een belangrijke logische wet, die in heel wat wiskundige redeneringen kan toegepast worden is de zogenaamde wet van de **contrapositie**: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$. Dit komt erop neer dat men uit een gegeven propositie p moet afleiden dat de propositie q daar steeds uit volgt. Dit kan men doen door aan te tonen dat uit de negatie van q ook blijkt dat p niet waar is.

Via een waarheidstabel blijkt dat men hier inderdaad met een tautologie te maken heeft. De cijfertjes die vetjes gedrukt staan onderaan de kolommen geven aan in welke volgorde de kolommen zijn ingevuld. Bij een tautologie staat in de slotkolom (hier kolom 4) op alle posities 1.

p	q	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$						
1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	2	3	2	4	2	3	2

Zo kan een oneven getal nooit een viervoud zijn want als een getal een viervoud is, is het ook deelbaar door 2. Een driehoek ABC waarvan de drie hoeken een verschillende grootte hebben, kan niet gelijkbenig zijn, omdat elke gelijkbenige driehoek twee even grote hoeken heeft. Verderop in dit artikel vermelden we nog enkele **bewijzen door contrapositie**.

De wet van de contrapositie kan men ook ‘vertalen’ naar de verzamelingenleer: als P een deelverzameling is van Q , dan is het complement van Q een deelverzameling van het complement van P :

$$P \subset Q \Leftrightarrow Q^C \subset P^C.$$

Twee wetten uit de propositielogica worden aan De Morgan toegeschreven. Ze werden allebei reeds behandeld in het vorige nummer van Wiskunde en Onderwijs.

De eerste wet van De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

de negatie van (p en q) is (niet p of niet q).

Dit wordt in verzamelingenleer:

$$(P \cap Q)^C = P^C \cup Q^C$$

het complement van de doorsnede is gelijk aan de unie van de complementen

De tweede wet van De Morgan

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

de negatie van (p of q) is (niet p en niet q).

Dit wordt in verzamelingenleer:

$$(P \cup Q)^C = P^C \cap Q^C$$

het complement van de unie is gelijk aan de doorsnede van de complementen.

Vijf meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie.



© Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

We dagen je uit om deze vijf vragen op te lossen. Op het einde vind je – ter controle – de juiste antwoorden.

VRAAG 1 – VWO 1998-1999 – tweede ronde – vraag 30

Vijf mensen (A , B , C , D en E) zijn ofwel rechter, ofwel advocaat. Rechters spreken altijd de waarheid, advocaten liegen altijd. Verder is geweten

- A is rechter;
- B beweert dat ook hij rechter is;
- C beweert dat D rechter is;
- D beweert dat B en E niet allebei rechter zijn;
- E beweert dat A en B rechter zijn.

Hoeveel rechters telt het gezelschap?

(A) 2	(B) 3	(C) 4
(D) 5	(E) niet af te leiden	

VRAAG 2 – VWO 2007-2008 – eerste ronde – vraag 3

Welk van volgende getallen p kan worden gebruikt als tegenvoorbeeld om de uitspraak “Als p een priemgetal is, dan is $p + 3$ een viervoud” te weerleggen?

(A) 9	(B) 11	(C) 13	(D) 15	(E) 17
-------	--------	--------	--------	--------

VRAAG 3 – VWO 2012-2013 – eerste ronde – vraag 21

Een vergadering met vijf aanwezigen, uitsluitend elfen of trollen (minstens één van elke categorie), wordt bijgewoond door Aislin, Bevan, Calum, Deirde en Erin. Trollen liegen altijd, elfen spreken altijd de waarheid. Aan de vergadertafel gebeuren de volgende uitspraken:

Aislin: "Calum en Deirde zijn allebei elfen."

Bevan: "Ik behoor niet tot dezelfde categorie als Calum."

Calum: "Bevan en Deirde zijn allebei elfen."

Deirde: "Ik ben een elf."

Erin: "Aislin is een elf."

Hoeveel trollen zitten er aan tafel?

(A) 1	(B) 2	(C) 3
(D) 4	(E) Het aantal is niet eenduidig te bepalen.	

VRAAG 4 – JWO 2013-2014 – eerste ronde – vraag 18

Barcelona, Feyenoord en Paris SG spelen een toernooi. Het reglement bepaalt dat bij afloop van het toernooi een gelijke stand uitgesloten is. Vier supporters doen een voorspelling die na afloop van alle wedstrijden blijkt te kloppen.

- Barcelona of Paris SG gaat winnen.
- Feyenoord eindigt achter Paris SG.
- Paris SG eindigt voor Barcelona of wordt laatste.
- Paris SG of Feyenoord wordt tweede.

Het klassement na alle wedstrijden is

(A) 1. Paris SG 2. Feyenoord 3. Barcelona	(B) 1. Paris SG 2. Barcelona 3. Feyenoord	(C) 1. Feyenoord 2. Paris SG 3. Barcelona
(D) 1. Barcelona 2. Feyenoord 3. Paris SG	(E) 1. Barcelona 2. Paris SG 3. Feyenoord	

VRAAG 5 – JWO 2013-2014 – tweede ronde – vraag 18

In een hoed liggen acht kaartjes met de getallen van 1 tot en met 8. An, Bert en Carol nemen ieder twee kaartjes. Ze tellen hun getallen op en verkrijgen 10, 5 en 7. Wat is het kleinste van de twee overblijvende getallen in de hoed?

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 7
-------	-------	-------	-------	-------



OPLOSSINGEN

VRAAG 1. Antwoord: B.

Veronderstel dat E rechter is. Uit de vijfde uitspraak volgt dan dat ook B rechter is. B en E zijn allebei rechter en dus moet D advocaat zijn (vierde uitspraak). Uit de derde bewering volgt dan dat ook C advocaat is. We tellen dus 3 rechters (A, B en E).

Indien we veronderstellen dat E advocaat is, volgt uit de vijfde en de eerste bewering dat ook B advocaat is. De bewering van D is dus juist (D is rechter). Ook de uitspraak van C is juist. We tellen opnieuw 3 rechters (A, C en D).

VRAAG 2. Antwoord: B.

De uitspraak “Als p een priemgetal is, dan is $p + 3$ een viervoud” kan alleen weerlegd worden als het eerste deel van de uitspraak waar is (dus p is een priemgetal) en het tweede deel onwaar (dus $p + 3$ is geen viervoud). Hieraan voldoet bij de voorgestelde alternatieven alleen het getal 11.

VRAAG 3. Antwoord: D.

Veronderstel dat Aislin een elf is, dan zijn Calum en Deirde dat ook. Omwille van de bewering van Calum betekent dit dat ook Bevan een elf is, en dus behoort hij tot dezelfde categorie als Calum. Dit is echter in contradictie met de bewering van Bevan. Bijgevolg is Aislin een trol en dus Erin ook.

Veronderstel nu dat Calum een elf is. Dan is Deirde dat ook, maar dan heeft Aislin de waarheid gesproken. Dit is echter een contradictie zodat ook Calum een trol is.

Bevan en Deirde kunnen niet allebei elfen zijn, want anders zou Calum de waarheid spreken. Maar Bevan en Deirde kunnen ook niet allebei trollen zijn, aangezien er dan geen elfen zijn. Bijgevolg is een van hen een trol en de andere een elf. Deze configuratie is inderdaad mogelijk zodat er bijgevolg vier trollen zijn.

VRAAG 4. Antwoord: A.

- | | |
|---|-----|
| Barcelona of Paris SG gaat winnen. | (1) |
| Feyenoord eindigt achter Paris SG. | (2) |
| Paris SG eindigt voor Barcelona of wordt laatste. | (3) |
| Paris SG of Feyenoord wordt tweede. | (4) |

Uit (1) volgt dat alleen nog A, B, D en E mogelijk zijn.

Uit (2) volgt dat ook D niet kan.

Uit (3) volgt dan dat ook E niet kan.

Uit (4) volgt ten slotte dat alleen A juist is;

VRAAG 5. Antwoord: D.

In het begin is de som van de getallen in de hoed gelijk aan 36. Daarna nemen An, Bert en Carol $10 + 5 + 7 = 22$ voor hun rekening. Daarmee blijft de som 14 in de hoed. En 14 kan men alleen vormen via $6 + 8$.

Een wiskundige bewijsvorm: een bewijs door contrapositie.

We illustreren deze bewijsmethode aan de hand van drie concrete voorbeelden.

BEWERING 1. Voor elk natuurlijk getal n geldt : als n^2 even is, dan is n zelf ook even.

Bewijs door contrapositie.

Stel dat n een oneven natuurlijk getal is, dan bestaat er een natuurlijk getal m zodat $n = 2m + 1$. Hieruit volgt dat $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Dit betekent dat er een natuurlijk getal p bestaat zodat $n^2 = 2p + 1$ of dat n^2 zelf oneven is.

BEWERING 2. Als het product van twee gehele getallen even is, dan is minstens één van beide getallen even.

Bewijs door contrapositie.

Stel dat de twee gehele getallen m en n allebei oneven zijn. Dan is $m = 2k + 1$ en $n = 2l + 1$, met k en l gehele getallen.

Bijgevolg is $mn = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$. Dit betekent dat er een geheel getal p bestaat zodat $mn = 2p + 1$ of dat mn zelf oneven is.

BEWERING 3. Als a , b en z gehele getallen zijn en als z geen deler is van het product ab , dan is z geen deler van a en geen deler van b .

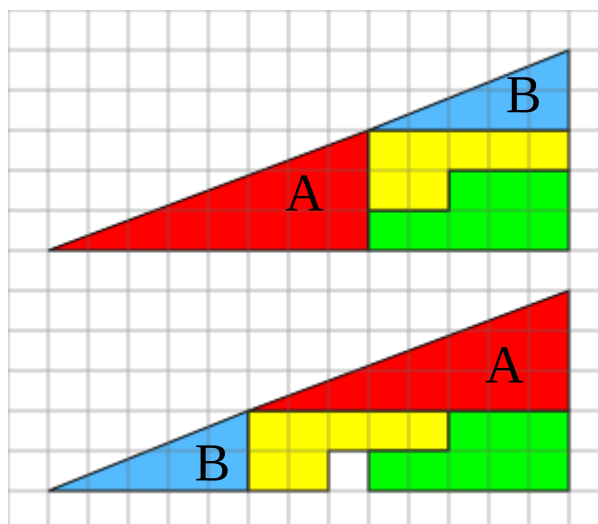
Bewijs door contrapositie.

Stel dat z minstens één van beide getallen a of b deelt, bijvoorbeeld a . Dan bestaat er een geheel getal c zodat $a = cz$. Bijgevolg is $ab = (cz)b = c(zb) = c(bz) = (cb)z$ en dat betekent dat z ook het product ab deelt.

Een meetkundige paradox: de wigparadox.

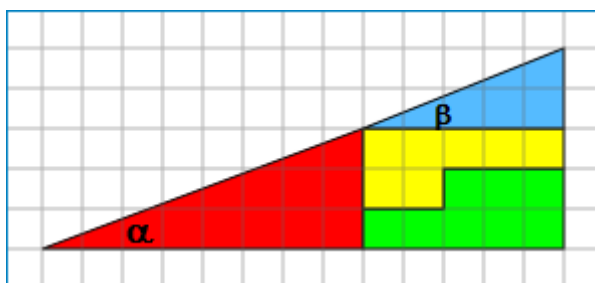
De wigparadox is in feite een optische illusie die op de toeschouwer paradoxaal overkomt. Op de onderstaande afbeelding staat de wigparadox in beeld gebracht. Er staan twee, op het eerste gezicht even grote, vierkleurige driehoeken, beide opgebouwd uit dezelfde vormen, die enkel anders gerangschikt zijn. Er ontstaat een paradox doordat in de onderste figuur een vakje meer nodig lijkt te zijn om de driehoek te vormen.

Volgens Martin Gardner is deze puzzel in 1953 bedacht door de amateurgoochelaar Paul Curry uit New York. De wigparadox wordt daarom ook de *paradox van Curry* genoemd. Het principe van dergelijke paradoxen is echter al sinds circa 1860 bekend.

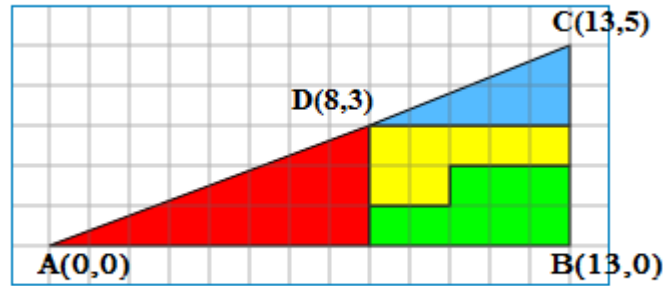


Bron: wikipedia.

De beide figuren zijn in feite misleidend want in het contactpunt tussen driehoek A en driehoek B zit een 'knik'.

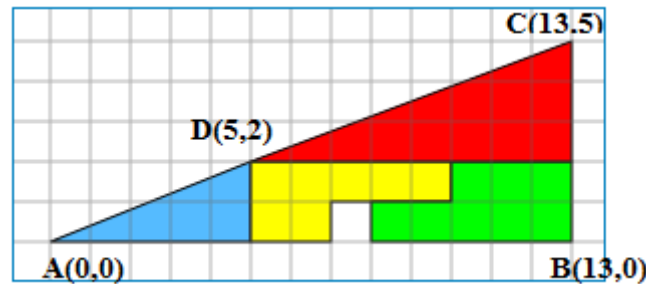


Dit kan men heel gemakkelijk als volgt inzien: in de rode driehoek is $\tan \alpha = \frac{3}{8}$ en in de blauwe driehoek is $\tan \beta = \frac{2}{5}$.



Daar $\tan \hat{BAC} = \frac{5}{13} > \frac{3}{8} = \tan \alpha$ ligt in de eerste figuur ligt het punt D **onder** de rechte AC en via de determinantformule voor de oppervlakte van een driehoek vinden we dat

$$\text{oppervlakte } \triangle ACD = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |39 - 40| = \frac{1}{2}.$$



Daar $\tan \hat{BAC} = \frac{5}{13} < \frac{2}{5} = \tan \beta$ ligt in de tweede figuur het punt D **boven** de rechte AC en is

$$\text{oppervlakte } \triangle ACD = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |26 - 25| = \frac{1}{2}.$$

Op de eerste figuur is de som van de oppervlakten van de gekleurde figuren $12 + 8 + 7 + 5 = 32$. Op de tweede figuur is de som van de oppervlakten van de gekleurde figuren vermeerderd met de oppervlakte van dat witte vierkantje $5 + 7 + 8 + 12 + 1 = 33$. De oppervlakte van driehoek ABC $= \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 5 = 32,5$. Dit verklaart meteen waarom op die figuur een ‘paradoxaal vierkantje’ met oppervlakte 1 opduikt!

REFERENTIES

1. **W. Berkelmans**, Logica waar of onwaar, Faculteit der Wetenschappen, Vrije Universiteit Amsterdam, 2005.
2. **M. Roelens, P. Tytgat**, Logica (onder de loep), Uitwiskeling, jaargang 27 nummer 2, lente 2011.
3. **V. Vandewalle, D. Tant et al.**, Richting Analyse A, Uitgeverij Pelckmans, 1993.
4. **S. Verwulgen, E. Soetens**, Wiskunde voor de beginnende bachelor, Academia Press, 2008.

Luc Gheysens <lucgheysens@yahoo.com>
Populierenlaan 10, 8520 Kuurne
Ere-pedagogisch adviseur wiskunde

Daniël Tant <tant.daniel@telenet.be>
Beekstraat 61, 8730 Oedelem,
is tevens hoofdredacteur van dit tijdschrift