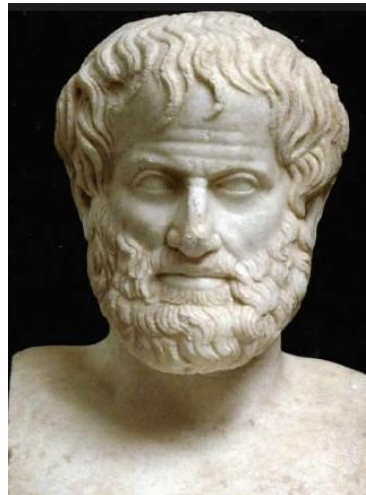


Dr. Luc Gheysens en Daniël Tant



Alle mensen zijn sterfelijk. (major)
Wiskundigen zijn mensen. (minor)

Puzzelaars weten logica-problemen zeker te waarderen en met een logisch raadsel heb je vast en zeker succes bij wiskundigen. Wiskundelessen bieden heel wat kansen tot logisch redeneren via bewijsvormen: een bewijs uit het ongerijmde, een bewijs door contrapositie, het belang van een tegenvoorbeeld, een bewijs door volledige inductie, een direct bewijs, een bewijs met een nodige en voldoende voorwaarde ... Dat heel wat studenten hier toch enige moeite mee hebben, kunnen we o.a. besluiten over hoe goed (lees: slecht) logica-vragen werden opgelost in de voorbije 30 edities van de Vlaamse Wiskunde Olympiade (VWO voor leerlingen van de derde graad en JWO = Junior Wiskunde Olympiade voor leerlingen van de tweede graad). Vandaar dat een aantal leerkrachten toch weer teruggrijpen naar de elementaire propositielogica om zo het wiskundig redeneren toch wat te funderen. Een zaak die we zeker kunnen aanmoedigen. Met wat elementaire logica, gekruid met een leuke paradox kan een wiskundeleraar in elk geval 'scoren' bij een groot aantal leerlingen.



We bieden de lezer daarom graag een LOGICAMENU aan:

APERITIEF: een uitdagend logica-raadsel

VOORGERECHT: een vleugje propositielogica

HOOFDGERECHT: 5 meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie

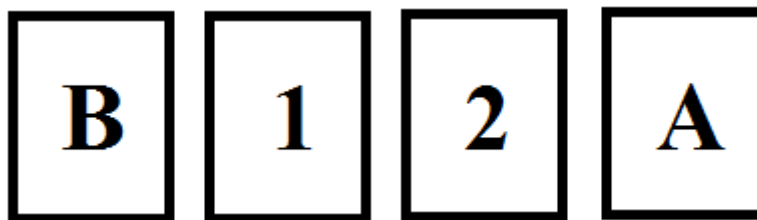
NAGERECHT: een wiskundige bewijsvorm in de kijker

AFZAKKERTJE: een logische paradox

SMAKELIJK!

Een uitdagend logicaraadsel.

In de jaren '60 bedacht de Engelse psycholoog Peter Cathcart Wason de zogenaamde Wason-test. Hij testte het logisch redeneervermogen van zijn studenten door vier kaartjes op tafel te leggen met op de ene kant een letter en op de andere kant een cijfer. Dit kunnen bijvoorbeeld die vier kaartjes zijn:



Zijn vraag was dan de volgende: “Welke kaart(jes) moet je omdraaien om te controleren dat de volgende uitspraak (altijd) waar is: als er aan de ene kant van het kaartje een klinker staat, dan staat er aan de andere kant een even cijfer ?” Het antwoord was voor heel wat studenten (en misschien ook voor jou) verrassend: het kaartje met de letter A en het kaartje met het cijfer 1. Bij het kaartje met het cijfer 2 mag er immers aan de andere kant zowel een klinker als een medeklinker staan!

Een beetje propositielogica.

Een **propositie** of **logische uitspraak** wordt weergegeven met een letter $p, q, r \dots$ en is in een gegeven context waar (met waarheidswaarde 1) of vals (met waarheidswaarde 0).

Een **implicatie** $p \Rightarrow q$ is de bewering dat als een propositie p waar is, dat dan ook de propositie q waar is. Men leest dit als “ p impliceert q ” of gewoonweg “als p , dan q ” of nog “ q volgt uit p ”.

We stellen vast dat er een verschil is tussen beweringen van het type “als ..., dan ...” in de gewone omgangstaal en in de logica. We illustreren dit met een concreet voorbeeld.

Als de vader van Bruno zegt: “Als onze zoon met zijn eindexamen 80 % haalt, dan krijgt hij een brommer”, dan zal Bruno ongetwijfeld aanvoelen dat deze belofte enkel niet ingelost wordt in het geval dat hij 80 % haalt en toch geen brommer krijgt. Dit betekent dus ook dat de belofte waar is als Bruno geen 80 % haalt in juni en toch een brommer krijgt.

We plaatsen de mogelijke scenario's in het onderstaande schema:

scenario		de belofte is
p is waar Bruno haalt 80 % in juni	q is waar Bruno krijgt een brommer	waar
p is waar Bruno haalt 80 % in juni	q is onwaar Bruno krijgt geen brommer	onwaar
p is onwaar Bruno haalt geen 80 % in juni	q is waar Bruno krijgt een brommer	waar
p is onwaar Bruno haalt geen 80 % in juni	q is onwaar Bruno krijgt geen brommer	waar

p wordt wel eens het antecedens of de hypothese genoemd en q het consequens of de conclusie. De waarheidstabel voor $p \Rightarrow q$ is de volgende:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

De implicatie $q \Rightarrow p$ is de omkering van de implicatie $p \Rightarrow q$. Als beide implicaties gelden, dan zeggen wat de p en q equivalent zijn. De **equivalentie** wordt genoteerd met $p \Leftrightarrow q$.

$p \Leftrightarrow q$ betekent $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Hierbij is $\wedge$ het symbool voor ‘en’ (de conjunctie).

De waarheidstabel voor $p \Leftrightarrow q$ is de volgende:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

In wiskundige bewijzen spreekt men $p \Leftrightarrow q$ vaak uit als “p als en slechts als q” of afgekort “p asa q”. In dit geval is p een nodige en voldoende voorwaarde voor q en is ook omgekeerd q een nodige en voldoende voorwaarde voor p.

Vijf meerkeuze- en logicavragen uit de voorbije VWO-competitie.



© Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

We dagen je uit om deze vijf vragen op te lossen. Op het einde vind je – ter controle – de juiste antwoorden.

VRAAG 1 – VWO 1992-1993 – eerste ronde – vraag 15

Tijdens de zomervakantie gingen vijf leerlingen (An, Bart, Carla, Doris, en Erik) regelmatig zwemmen. Het toeval wilde dat telkens één van de vijf ontbrak. An ging het minst vaak (5 keer), Erik het meest (8 keer). Wat kun je zeggen over het aantal zwembeurten van Bart, Carla en Doris?

- | | |
|---|---------------------------------|
| (A) elk zes | (B) elk zeven |
| (C) twee zes en de andere zeven | (D) één zes en de anderen zeven |
| (E) geen idee want de informatie is onvoldoende | |

VRAAG 2 – VWO 1993-1994 – eerste ronde – vraag 29

In een school wordt elk jaar een opstelwedstrijd georganiseerd. De vijf finalisten An, Bart, Carla, David en Erna hebben zopas hun uitslag ontvangen. Ieder kent zijn eigen plaats in de eindrangschikking (van 1 tot 5; er zijn geen ex aequo's). Carla weet bovendien dat David twee plaatsen voor An geëindigd is. Aangezien ze ervan overtuigd is dat Erna de wedstrijd onmogelijk kan gewonnen hebben (en ze heeft gelijk), besluit ze dat ze de rangschikking volledig kent. Op welke plaats is Carla geëindigd?

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| (A) 1 | (B) 2 | (C) 3 | (D) 4 | (E) 5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

VRAAG 3 - VWO 1995-1996 – eerste ronde – vraag 19

Dhr. Janssens liegt nooit behalve op woensdag, dan liegt hij altijd. Op welke dag(en) van de week kan hij zeggen: “als ik gisteren niet gelogen heb, dan lieg ik morgen”?

- | | |
|--|--------------------------------|
| (A) enkel dinsdag | (B) enkel donderdag |
| (C) enkel woensdag | (D) enkel dinsdag of donderdag |
| (E) enkel dinsdag, woensdag of donderdag | |

VRAAG 4 – VWO 2001-2002 – eerste ronde – vraag 12

Welke van de volgende uitspraken is juist?

- I Deze lijst bevat juist één foutieve uitspraak.
- II Deze lijst bevat juist twee foutieve uitspraken.
- III Deze lijst bevat juist drie foutieve uitspraken.
- IV Deze lijst bevat juist vier foutieve uitspraken.
- V Deze lijst bevat juist vijf foutieve uitspraken.

- | | | | | |
|-------|--------|---------|--------|-------|
| (A) I | (B) II | (C) III | (D) IV | (E) V |
|-------|--------|---------|--------|-------|

VRAAG 5 – JWO 2013-2014 – tweede ronde – vraag 18

De vijf getallen 2, 5, 7, 12 en 17 staan op de voorkanten van vijf kaarten. Op de achterkanten staat:

- Deelbaar door 7
- Kleiner dan 15
- Geen veelvoud van een ander uit het gegeven vijftal
- Oneven
- Groter dan 20

Bij geen enkele kaart past de voorkant bij de achterkant. Welk getal staat op de voorkant bij de kaart “Groter dan 20”?

- | | | | | |
|-------|-------|-------|--------|--------|
| (A) 2 | (B) 5 | (C) 7 | (D) 12 | (E) 17 |
|-------|-------|-------|--------|--------|



OPLOSSINGEN

VRAAG 1. Antwoord: C.

An ging het minst vaak zwemmen (5 keer) en Erik ging het meest (8 keer). Het aantal zwembeurten van Bart, Carla en Doris is dus 6 of 7. In totaal werd er daarom minstens 31 keer en hoogstens 34 keer gezwommen. Omdat er telkens één persoon ontbrak is het totaal aantal zwembeurten van het vijftal een viervoud, dus 32. Bart, Carla en Doris hadden bijgevolg samen $32 - 5 - 8 = 19$ zwembeurten en $19 = 6 + 6 + 7$.

VRAAG 2. Antwoord: C.

Enkel als Carla derde is, blijft er slechts één mogelijkheid over voor de rangschikking van de andere finalisten, namelijk: 1 = Bart, 2 = David, 4 = An en 5 = Erna. David eindigt twee plaatsen voor An en omdat David noch An op de derde plaats staan, moet David tweede zijn en An vierde. Erna heeft niet gewonnen en is dus vijfde. Bart is dan eerste.

VRAAG 3. Antwoord: E.

De uitspraak is waar in twee gevallen:

- vooreerst als Dhr. Janssens gisteren gelogen heeft: dit is zo op donderdag;
- als Dhr. Janssens morgen liegt: dit is zo op dinsdag.

Daar Dhr. Janssens op dinsdag en donderdag de waarheid spreekt, kan hij op die dagen dus deze uitspraak doen.

De uitspraak is onwaar op woensdag en daar hij op die dag altijd liegt, kan Dhr. Janssens de uitspraak ook op woensdag doen.

VRAAG 4. Antwoord: D.

Als uitspraak V correct zou zijn, dan zijn de vijf uitspraken foutief en dus ook uitspraak V, wat een tegenspraak oplevert.

Als uitspraak I juist is, dan zou er in de lijst maar één foutieve uitspraak staan en dan moeten er vier juist zijn. Dit leidt tot een tegenspraak. We kunnen een analoge redenering maken voor de uitspraken II en III.

Enkel uitspraak IV geeft geen aanleiding tot een tegenspraak.

VRAAG 5. Antwoord: C.

We nummeren de kaartjes als volgt rekening houdend met wat er op de achterkant staat:

kaart 1 = deelbaar door 7

kaart 2 = kleiner dan 15

kaart 3 = geen veelvoud van een ander uit het gegeven vijftal

kaart 4 = oneven

kaart 5 = groter dan 20.

Omdat bij geen enkele kaart het getal op de voorkant past bij wat er op de achterkant staat, moet er

- op de voorzijde van kaart 1 één van de volgende getallen staan: 2, 5, 12 of 17;
- op de voorzijde van kaart 2 het getal 17 staan;
- op de voorzijde van kaart 3 het getal 12 staan;
- op de voorzijde van kaart 4 het getal 2 staan.

Op de voorzijde van kaart 1 moet er dan 5 staan en bijgevolg blijft er enkel het getal 7 over voor kaart 5.

Een wiskundige bewijsvorm: een bewijs met nodige en voldoende voorwaarde.

Het gebeurt nogal eens dat een implicatie ($\Rightarrow$) verward wordt met een equivalentie ($\Leftrightarrow$). Dit komt meestal neer op het feit dat een nodige óf voldoende voorwaarde aanzien wordt als een nodige én voldoende voorwaarde. We illustreren dit aan de hand van enkele voorbeelden.

- Opdat een functie f die afleidbaar is in een punt a een relatief extremum zou bereiken voor $x = a$, is het nodig dat $f'(a) = 0$ is (nodige voorwaarde). Maar de voorwaarde $f'(a) = 0$ is geen voldoende voorwaarde opdat f een relatief extremum zou bereiken voor $x = a$. Tegenvoorbeeld: voor de functie f met als voorschrift $f(x) = x^3$ geldt dat $f'(0) = 0$, maar in de oorsprong $O(0,0)$ bereikt deze functie geen relatief extremum; dat punt is immers een buigpunt op de grafiek van f .
- Opdat een geheel getal zou deelbaar zijn door 12, moet het deelbaar zijn door 2 en door 3 (nodige voorwaarde). Het feit dat een geheel getal deelbaar is door 2 en door 3 is echter geen voldoende voorwaarde opdat het zou deelbaar zijn door 12. Tegenvoorbeeld: het getal 6.
- Een driehoek is gelijkbenig als en slechts als hij twee gelijke hoeken heeft (nodige en voldoende voorwaarde).
- Een driehoek waarvan de zijden lengte a , b en c hebben (met $a > b$ en $a > c$) is rechthoekig als en slechts als $a^2 = b^2 + c^2$ (nodige en voldoende voorwaarde).
- Opdat het product van twee gehele getallen even zou zijn is het voldoende dat beide getallen even zijn. Deze voorwaarde is echter niet nodig want ook het product van een even en een oneven getal is even.
- Het is voldoende dat een functie f afleidbaar is in een punt $a \in \text{dom } f$, opdat f continu zou zijn in a . De voorwaarde van afleidbaarheid is echter niet nodig want de functie f met als voorschrift $f(x) = |x|$ is overal continu maar niet afleidbaar in 0.
- Als een geheel getal deelbaar is door 6, dan is dat een voldoende voorwaarde opdat het zou deelbaar zijn door 3. Het is echter geen nodige voorwaarde want ook 9 is deelbaar door 3.

Een logische paradox: de paradox van Simpson.



Foto: www.gendergeschiedenis.be

Deze paradox is genoemd naar de statisticus E. H. Simpson en werd in 1951 voor het eerst gepubliceerd. We illustreren deze paradox aan de hand van (fictieve) slaagcijfers aan een bepaalde universiteit.

Hieronder staan de slaagcijfers van jongens en meisjes voor de drie grote universitaire studiegroepen van medische, humane en exacte wetenschappen.

Studiegroep	MEISJES			JONGENS		
	Ingeschreven	Geslaagd		Ingeschreven	Geslaagd	
		Aantal	%		Aantal	%
Medische	4 584	2 292	50,00 %	4 000	1960	49,00 %
Humane	5 000	2 050	41,00 %	2 400	960	40,00 %
Exacte	416	258	62,02 %	3 600	2180	60,56 %
TOTAAL	10 000	4 600	46,00 %	10 000	5 100	51,00 %

Uit deze tabel blijkt dat in de drie verschillende studiegroepen de slaagpercentages bij de meisjes net iets hoger liggen dan bij de jongens. Paradoxaal genoeg blijken de jongens in totaal toch beter te presteren dan de meisjes: 51 % van de jongens slagen en slechts 46 % van de meisjes. Zouden meisjes dan toch eerder kiezen voor universitaire studierichtingen met eerder lage slaagcijfers?

Luc Gheysens <lucgheysens@yahoo.com>
Populierenlaan 10, 8520 Kuurne
ere-pedagogisch adviseur wiskunde

Daniël Tant <tant.daniel@telenet.be>
Beekstraat 61, Oedelem,
is tevens hoofdredacteur van dit tijdschrift

REFERENTIES

1. **W. Berkelmans**, Logica waar of onwaar, Faculteit der Wetenschappen, Vrije Universiteit Amsterdam, 2005.
2. **M. Roelens, P. Tytgat**, Logica (onder de loep), Uitwiskeling, jaargang 27 nummer 2, lente 2011.
3. **S. Verwulgen, E. Soetens**, Wiskunde voor de beginnende bachelor, Academia Press, 2008.