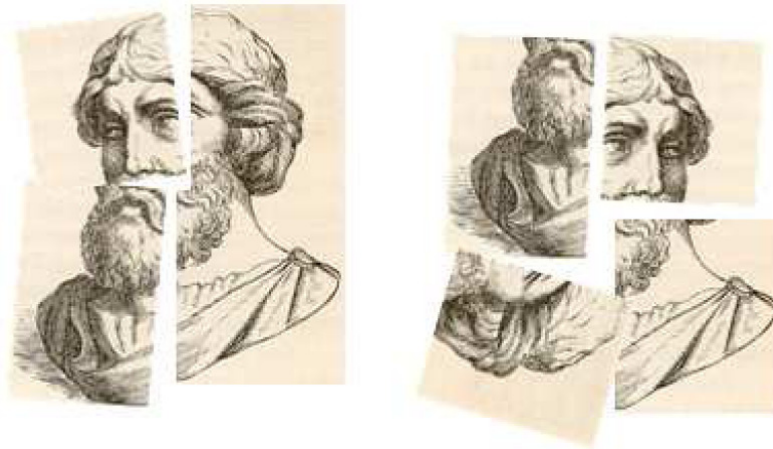


Pythagoras ontleed en weer bijeen gepuzzeld



Dag van de wiskunde 24 november 2012

*“In de meetkunde vinden we twee grote schatten:
de ene is de stelling van Pythagoras en de andere is de gulden snede.
De eerste kunnen we vergelijken met een schep goud,
de andere mogen we een kostbaar juweel noemen.”*

Kepler, 1596, Mysterium Cosmographicum

1. Traditioneel schools bewijs
2. Een tweede macht is dus een kwadraat is dus een vierkant!

Ontleden en puzzelen

3. Variaties op Euclides
4. Het lijkt wel op tangram
5. Mogen we ook oppervlakteformules gebruiken?

Een stapje verder

6. Een stapje verder
7. WAARSCHUWING!

1. Traditioneel schools bewijs

Een traditioneel schools bewijs van de stelling van Pythagoras is kort en eenvoudig als je weet dat een rechthoekszijde in een rechthoekige driehoek *middelevenredig* is tussen haar projectie op de schuine zijde en die schuine zijde zelf.

De middelevenredigheden die volgen uit gelijkvormige driehoeken worden omgerekend naar twee gelijke producten en na nog wat algebrawerk duikt het resultaat op... zonder dat er ook maar één kwadraat of vierkant op een zijde nodig is:

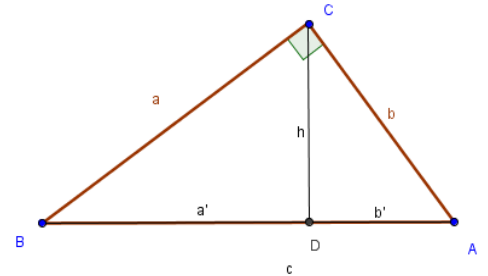
bekijk $\triangle ABC$ en $\triangle CBD$:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = 90^\circ = \hat{D} \\ \hat{B} \text{ gemeenschappelijk} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CBD \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{c}{a} \left(= \frac{b}{h} \right) \Rightarrow a^2 = a' \cdot c$$

op een analoge manier kunnen we besluiten:

$$b^2 = b' \cdot c$$

waardoor: $a^2 + b^2 = (a' + b') \cdot c = c^2$



Het bewijs lijkt in de verste verte niet op het ontdekken van een schat en de stelling van Pythagoras is, als algebraïsch gevolg van een vorige stelling, echt niet de schep goud die ze zou moeten zijn.

Euclides geeft in zijn Elementen een heel ander bewijs waarbij van in het begin de vierkanten op de drie zijden van de driehoek zichtbaar zijn. Het bewijs van Euclides werd o.a. door de beroemde filosoof Schopenhauer (1788-1860) niet echt geapprecieerd: hij noemde het een muizenvalbewijs, waarbij het stukje kaas van in het begin wel zichtbaar is, maar de weg ernaar toe onduidelijk, moeilijk en zelfs dodelijk.

Bruno Ernst schrijft over ons schools bewijs en met Schopenhauer in gedachten:

"Het bewijs is kort en bondig maar voor een leerling toch wat raadselachtig. ... Ik meen dat het stukje kaas (de betrekking $a^2 + b^2 = c^2$) veel meer verstopt zit dan in het Euclidisch bewijs. Het komt pas op het eind als een duiveltje uit een doosje tevoorschijn, terwijl het bij Euclides van meet af aan zichtbaar is aan de vierkanten op de drie zijden van de rechthoekige driehoek."

2. Een tweede macht is een kwadraat is een vierkant!

Met dank aan Simon Stevin voor het verrijken van onze taal – wij mogen van **wiskunde** spreken en niet van mathematics of mathématique – maar door zijn creativiteit is de link tussen een tweede macht en (de oppervlakte van) een vierkant of de derdemacht en (dhet volume van) een kubus in het Nederlands veel minder duidelijk dan in de andere talen:

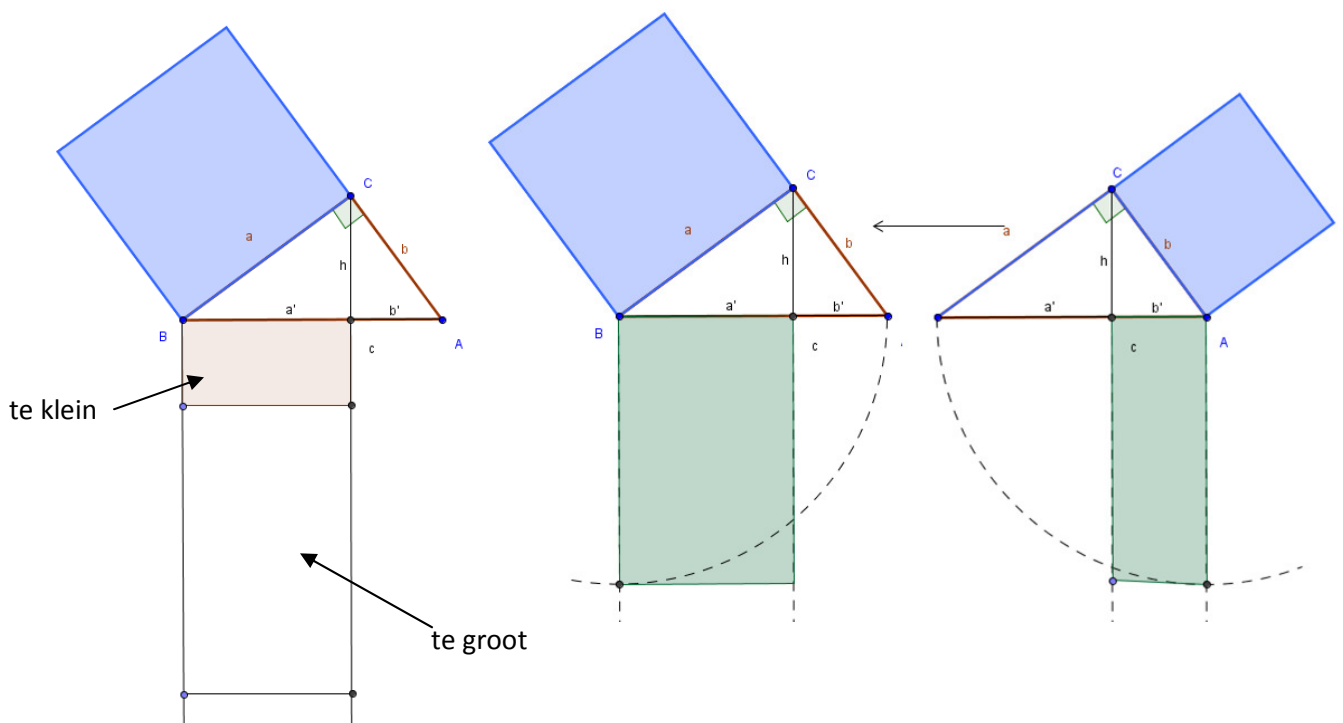
$$a^2 \rightarrow \text{a squared} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \end{array} a \quad a^3 \rightarrow \text{a cubed} \rightarrow \begin{array}{c} \text{a} \\ \square \\ \text{a} \end{array} \text{a}$$

Moeten we meer moeite doen om de band tussen algebra en meetkunde expliciet te maken?

$$a^2 = a' \cdot c \rightarrow \text{vierkant} = \text{rechthoek} ?$$

In de figuur zie je een te kleine rechthoek in vergelijking met het vierkant op de rechthoekszijde en een te grote. Het is duidelijk dat er ergens tussenin een rechthoek bestaat met eenzelfde oppervlakte als het vierkant.

Door de middelevenredigheden van hiervoor ook meetkundig voor te stellen krijgt het schoolse bewijs toch al een meer glansrijke illustratie en alleszins verschijnt de klassieke voorstelling van de stelling van Pythagoras: projectiestelling



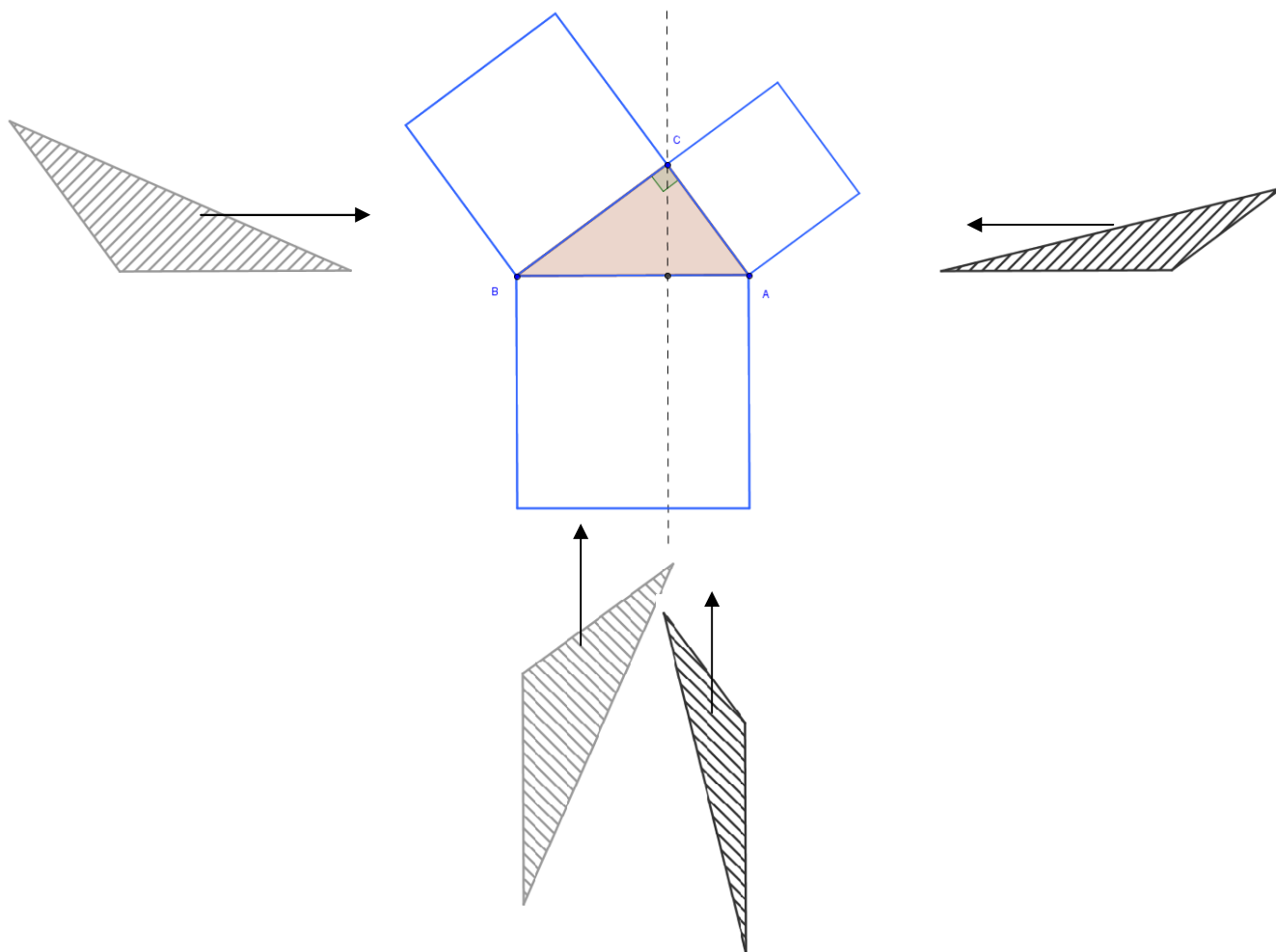
3. Variaties op Euclides

De bewijzen gebruiken de klassieke voorstelling van de stelling: de hoogtelijn op de schuine zijde is telkens een belangrijke hulplijn. De hoogtelijn verdeelt de figuur in een linker- een rechterhelft. In de drie gevallen wordt het bewijs geleverd voor één "helft". De andere helft is dan analoog en leidt tot de stelling van Pythagoras.

I. Euclides, Elementen, eerste boekrol, stelling 47

Euclides:

- waarom is de oppervlakte van het vierkant linksboven gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek linksonder?
- hoe plaats je twee van de vier puzzelstukken op de figuur zodat dit zichtbaar wordt?
- de puzzelstukken kunnen veel duidelijk maken maar het is natuurlijk even belangrijk om die uitleg expliciet te maken.
- voor de rechterkant geldt een gelijkaardige conclusie en dus...



De linkerkant van de puzzel verklaard:

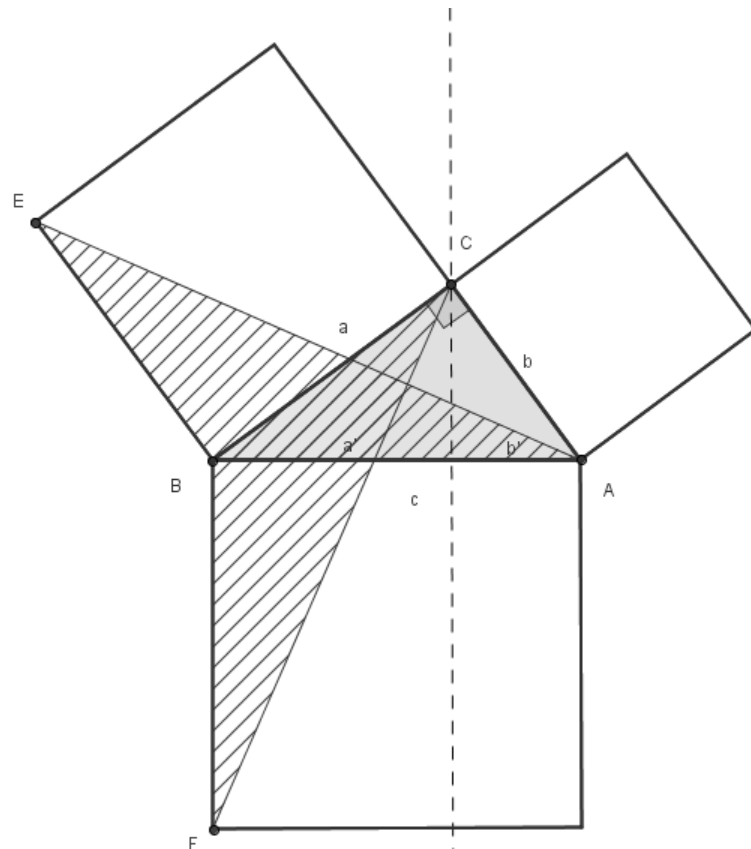
in stelling 39 van de elementen bewijst Euclides:

"Alle triangels op eenen basis, en gelijke hoogte, zijn gelijk."



en dus:

- de oppervlakte van $\triangle ABE$ is de helft van de oppervlakte van het vierkant
- de oppervlakte van $\triangle BCF$ is de helft van de oppervlakte van de rechthoek
- en beide driehoeken zijn congruent (ZHZ).



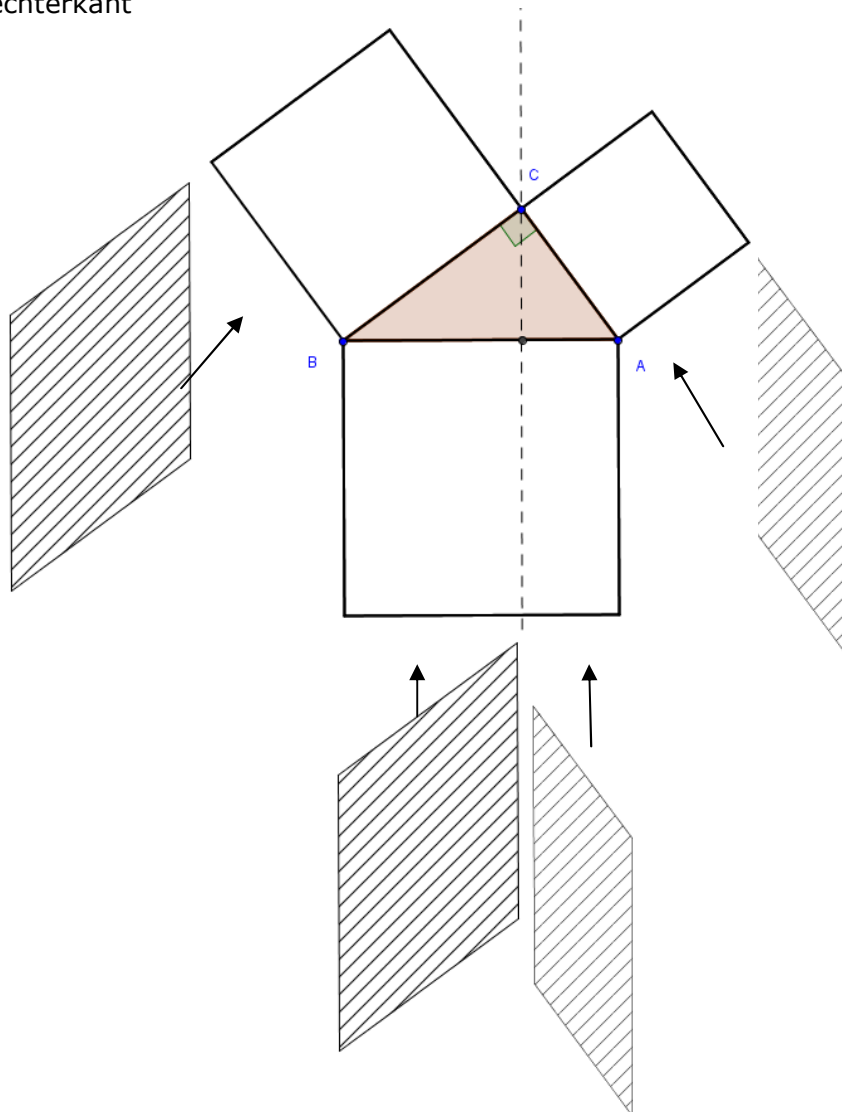
II. Nasir Eddin (1201-1274): slimmer dan Euclides?



Als je de naam van deze astronoom aan het hof van de kleinzoon van Dzengis Khan googelt, wordt het snel duidelijk dat deze wiskundige hoog geacht wordt in de mediterrane wereld en het Midden-Oosten.

Hier zie je hem op een postzegel uit Iran.

Nassir Eddin gebruikt parallellogrammen i.p.v. driehoeken. Twee ervan voor de linkerkant, twee voor de rechterkant

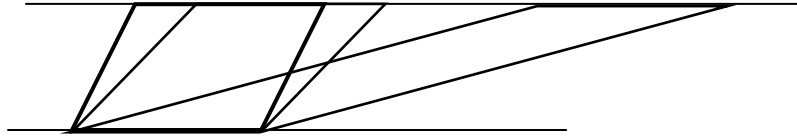


Nassir Eddin (over de linkerkant):

- waarom is de oppervlakte van het vierkant gelijk aan dat van het parallellogram?
- waarom is de oppervlakte van het parallellogram gelijk aan dat van de rechthoek?
- hoe kan je zeker weten dat de beide parallellogrammen congruent zijn?

Verklaring:

- alle parallelogrammen die gevangen zitten tussen twee evenwijdige rechten en daarenboven een gemeenschappelijke zijde als basis hebben, zoals in de figuur, hebbende zelfde oppervlakte

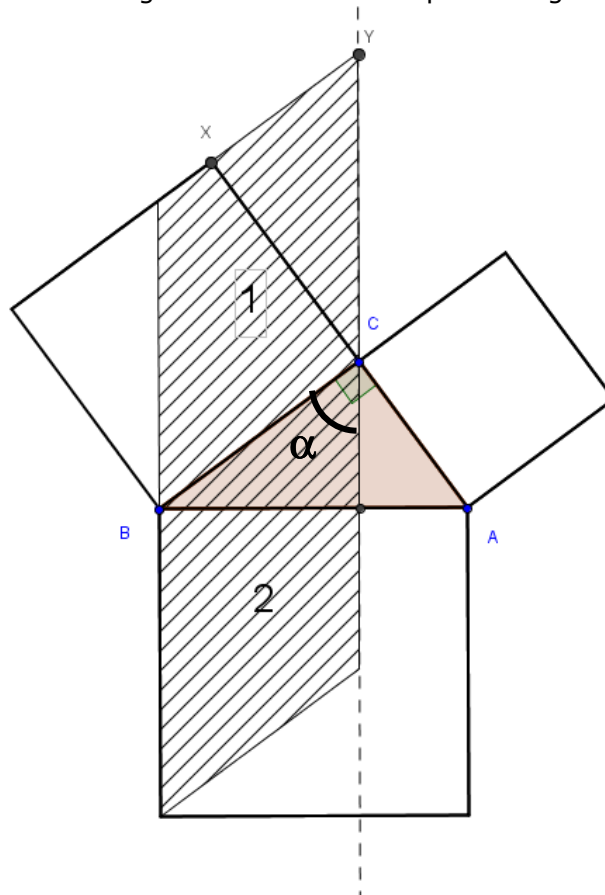


Er volgt: parallellogram 1 heeft dezelfde oppervlakte als het vierkant links en parallellogram 2 heeft dezelfde oppervlakte als de rechthoek links

Hebben de twee parallelogrammen dezelfde oppervlakte?

Als je hun hoogte meet tussen de twee vertikalen is die alvast gelijk. De bijhorende basissen zijn dan wel niet gemeenschappelijk maar misschien wel even lang? In dat geval hebben beide parallelogrammen eenzelfde oppervlakte waardoor de linker kant van de stelling bewezen is.

- $\triangle ABC \cong \triangle YCX$ (HZH) waardoor $|XY| = |AB|$, immers:
 $[BC]$ en $[XC]$ zijn zijden van eenzelfde vierkant
beide driehoeken zijn rechthoekig
 $\hat{C}$ in $\triangle YCX$ en $\hat{B}$ in $\triangle ABC$ zijn even groot
(alles twee complementair met α - zie figuur)
- Basis $[XC]$ van parallellogram 1 heeft dezelfde lengte als de schuine zijde $[AB]$ en dat is natuurlijk ook de lengte van de basis van parallellogram 2.



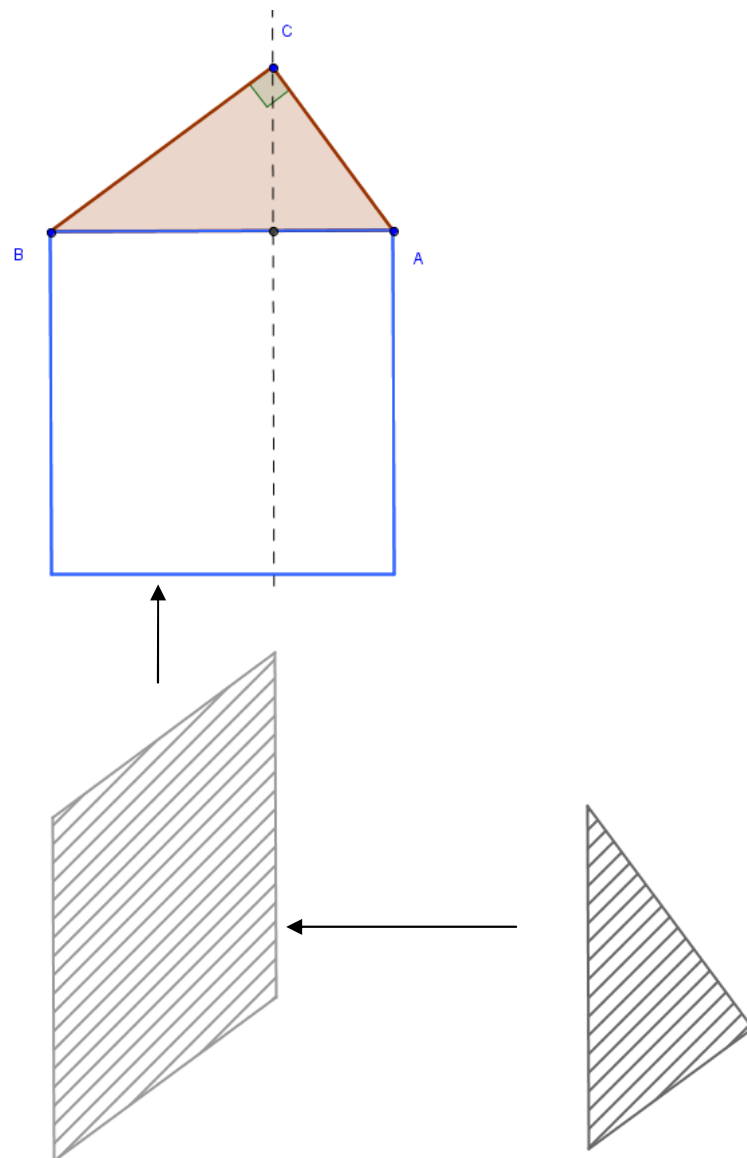
III. P.Fabre: zuinig omspringen met de vierkanten

Het blijkt dat ene Fabre als eerste dit soort bewijs gepubliceerd heeft in het Journal de Mathématique Élémentaire in 1888.

Hij deelt de figuur met dezelfde hoogtelijn op in een linker- en een rechterkant maar hij is zuinig op zijn vierkanten want hij gebruikt alleen het verdeelde vierkant op de schuine zijde.

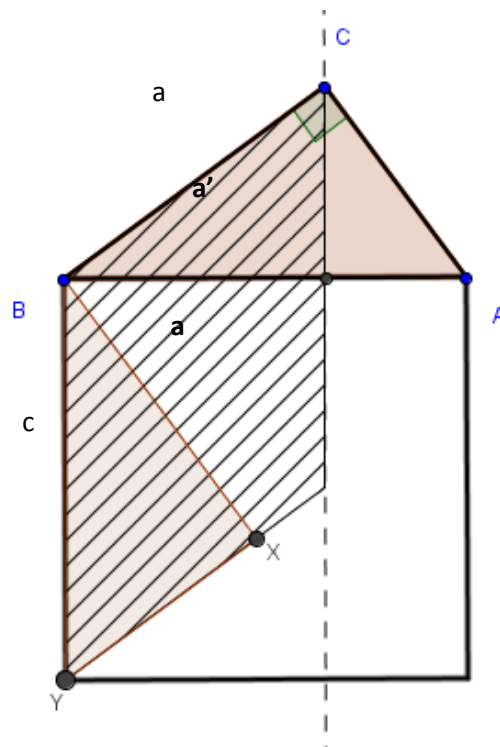
Het parallellogram is eenzelfde puzzelstuk als in het bewijs van Nassir Eddin: we weten al waar dit in de figuur past en ook dat de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van de linkerrechthoek.

Door nu het tweede puzzelstuk op een vernuftige manier op het parallellogram te leggen, verschijnt een cruciale hoogtelijn. Die hoogtelijn maakt het mogelijk om de oppervlakte van het parallellogram op een andere manier te bekijken.



Verklaring van de linkerkant:

- het parallellogram heeft dezelfde oppervlakte als de rechthoek
- $\triangle ABC \cong \triangle YBX$ zijn congruent (HHZ)
zodat $|BX| = |BC| = a$
- de oppervlakte van het parallellogram is dus: $a \cdot a$
- En dat is ook gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek: $a' \cdot c \dots$



4. Het lijkt wel op tangram

Deze tweede soort bewijzen zijn echte legpuzzels. Door de puzzelstukken op een ingenieuze manier op twee manieren te schikken volgt de stelling van Pythagoras.

Gedaan met het klassieke euclidisch beeld van de stelling: het wordt spelen met tangram.

I. Bhaskara (1114 – ca. 1185)

Een paar problemen uit de geschriften van deze Indische wiskundige:

Wat is het getal dat, als je het vermenigvuldigt met 5, daar het derde deel van het product vanaf trekt, de rest deelt door 10, daarna een derde en de helften een kwart van het oorspronkelijke getal bij optelt, 2 minder dan 70 is?

In onze wiskundetaal: los op $\frac{(5x - \frac{1}{3} \cdot 5x)}{10} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 70 - 2$

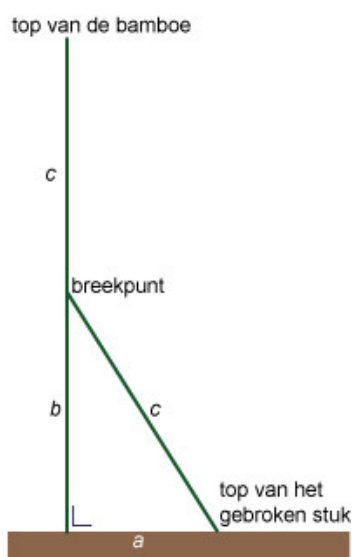
en

In een bos maken een aantal apen dat gelijk is aan het kwadraat van $1/8$ van het totaal aantal apen een ongelooflijke herrie. De overige 12 apen, die wat serieuzer zijn, zijn bij elkaar gekropen op een heuvel en irriteren zich aan de lawaaijige geluiden die uit het bos komen. Wat is het totaal aantal apen?

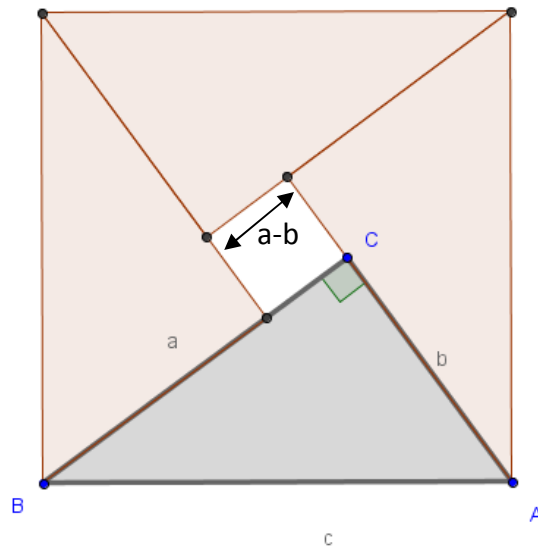
(blijkbaar kende hij ook de onbepaalde vergelijkingen met meer dan één oplossing)

maar ook:

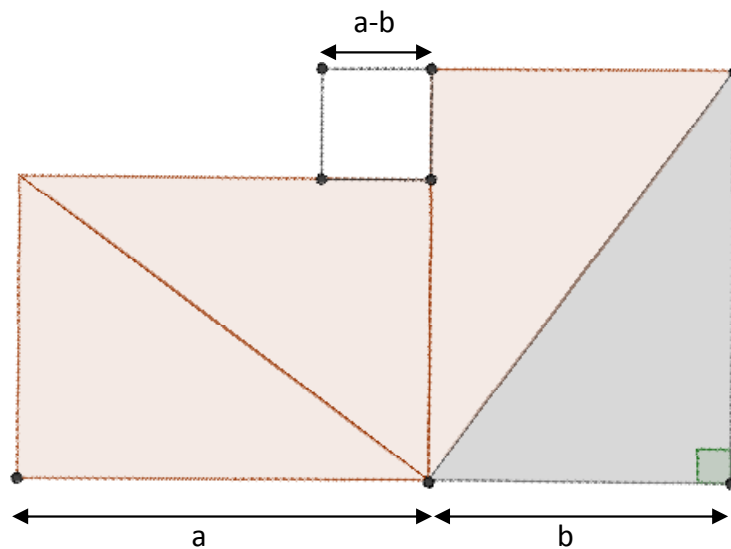
Als een bamboestengel 32 el hoog is en zo wordt gebroken door de wind dat het topje op de grond komt op 16 el van de stengel, op welke hoogte boven de grond is die stengel dan gebroken?



Voor het laatste probleem maakte Bhaskara gebruik van de stelling van Pythagoras waarvoor hij ook een bewijs had. Het is duidelijk dat hij overtuigd was van de kracht van het beeld want als bewijs bij het vierkant schreef hij als uitleg: "Ziedaar:"



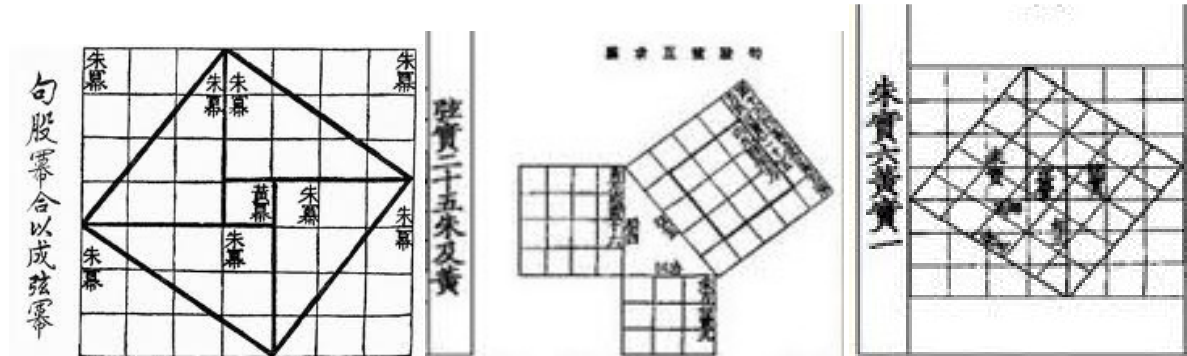
Door de 5 puzzelstukken – vergeet het kleine vierkantje niet! – te herschikken, kan je zonder winst of verlies van oppervlakte de twee vierkanten op de rechthoekszijden tevoorschijn halen:



II. Chinees bewijs, Chou Pei

Chou Pei is één van de oudste Chinese wiskundige teksten, opgebouwd en aangevuld gedurende vele eeuwen (van 1000 v.C. tot 200 n.C.).

Dat de stelling van Pythagoras gekend en bewezen was blijkt uit een paar afbeeldingen:



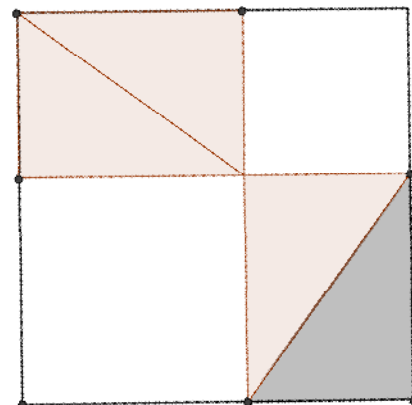
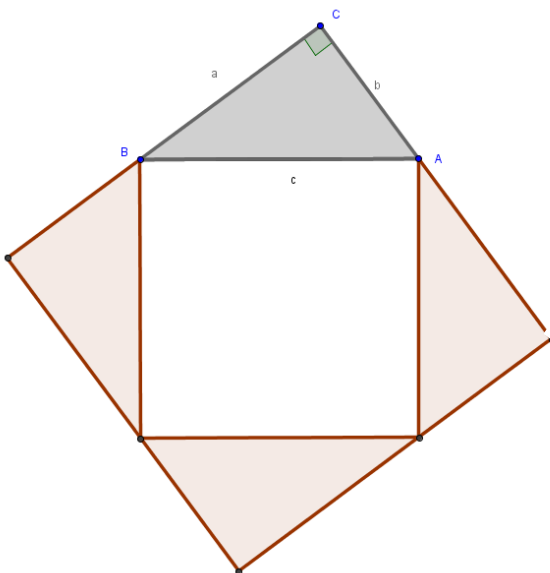
De eerste lijkt duidelijk te maken waar Bhaskara zijn mosterd haalde.

De tweede toont de na te tellen 3-4-5-driehoek.

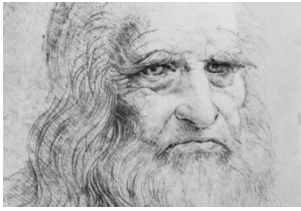
Bekijk de derde afbeelding van dichterbij:

met de vier congruente rechthoekige driehoeken wordt een vierkant met zijde $a + b$ gelegd waardoor binnenin een vierkant met zijde c ontstaat.

Tangram het grote vierkant op een andere manier met de 5 puzzelstukken en haal nu naast de vier driehoeken, de twee vierkanten op de rechthoekszijden tevoorschijn.

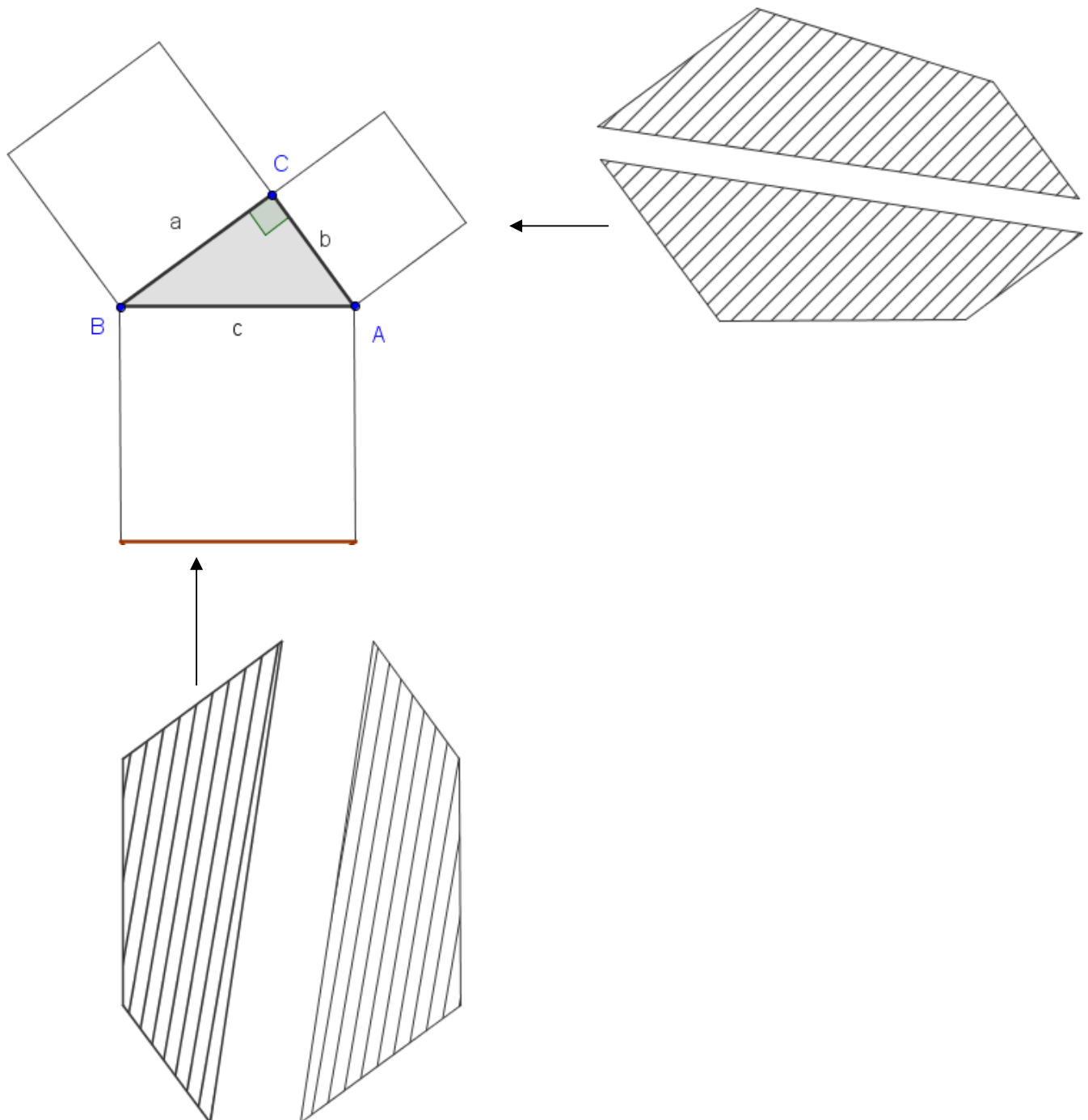


III. Leonardo da Vinci(1452-1519)



Kenneren zijn het er niet over eens dat het volgende bewijs van de hand is van deze Renaissancefiguur bij uitstek. Mogelijks dateert het van veel later. Dat de euclidische voorstelling hier opnieuw een rol speelt, past natuurlijk goed in het Renaissance denken.

Vertrek van de klassieke voorstelling van de stelling en van de vier onderling congruente puzzelstukken. Vorm met twee van de puzzelstukken een zeshoek die “past op de basisfiguur”. Herhaal dit met de twee andere puzzelstukken maar zoek een andere passende plaats.



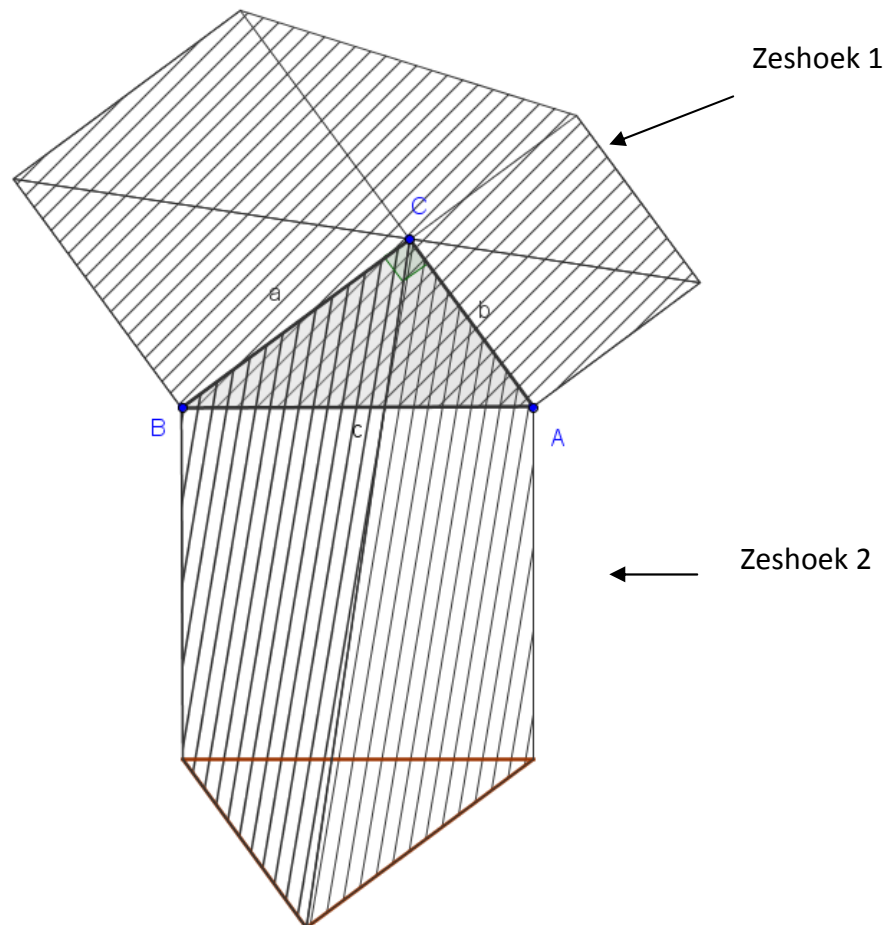
Verklaring:

- door de vier puzzelstukken op de correcte manier bovenop de klassiek figuur te leggen, ontstaan twee zeshoeken die elkaar overlappen. De zijden van de zeshoek zijn in paren even lang en de oppervlakte blijkt ook gelijk te zijn... maar ze zijn duidelijk niet congruent.
- zeshoek 1 bestaat uit de twee vierkanten op de rechthoekszijden en twee congruente rechthoekige driehoeken.
- zeshoek 2 bestaat ook uit twee congruente driehoeken en het vierkant op de schuine zijde
- in zeshoek 1 is het geen toeval dat de twee diagonalen van de vierkanten in elkaars verlengde liggen en samen de diagonaal van de zeshoek vormen:

$$45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

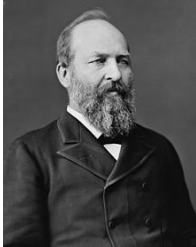
De diagonaal is m.a.w. een symmetrieas van zeshoek 1 en dus zijn de bovenste en de onderste helft gelijk in oppervlakte.

- de helft van zeshoek 2 is het draaibeeld van de onderste helft van zeshoek 1 door een draaiing met centrum A en over een hoek van -90°
- zeshoek 1 en zeshoek 2 hebben een zelfde oppervlakte en als de oppervlakte van de twee congruente driehoeken afgetrokken worden, blijft de stelling van Pythagoras.

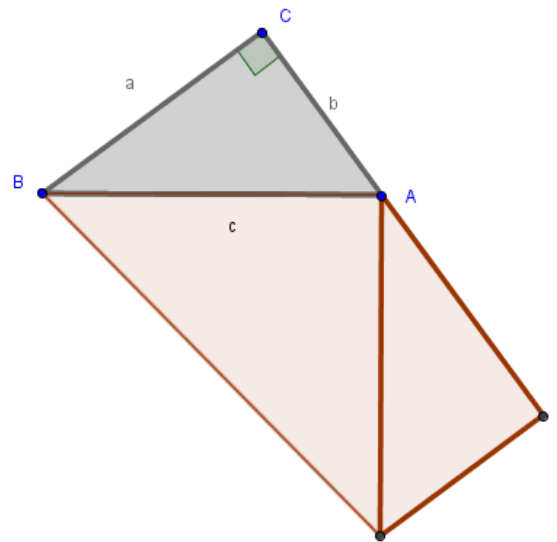
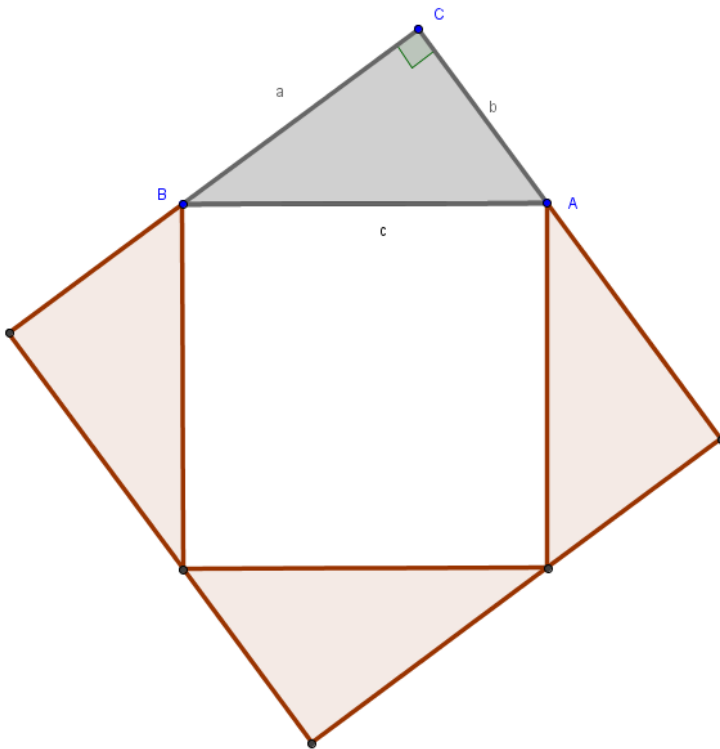


5. Mogen we ook oppervlakteformules gebruiken?

I. Garfield, Mathematical Gazette (1882)



Vermoedelijk geïnspireerd op het oude Chinese idee gebruikt de U.S.A.-president Garfield maar de helft van het vierkant en zag daarin een trapezium.

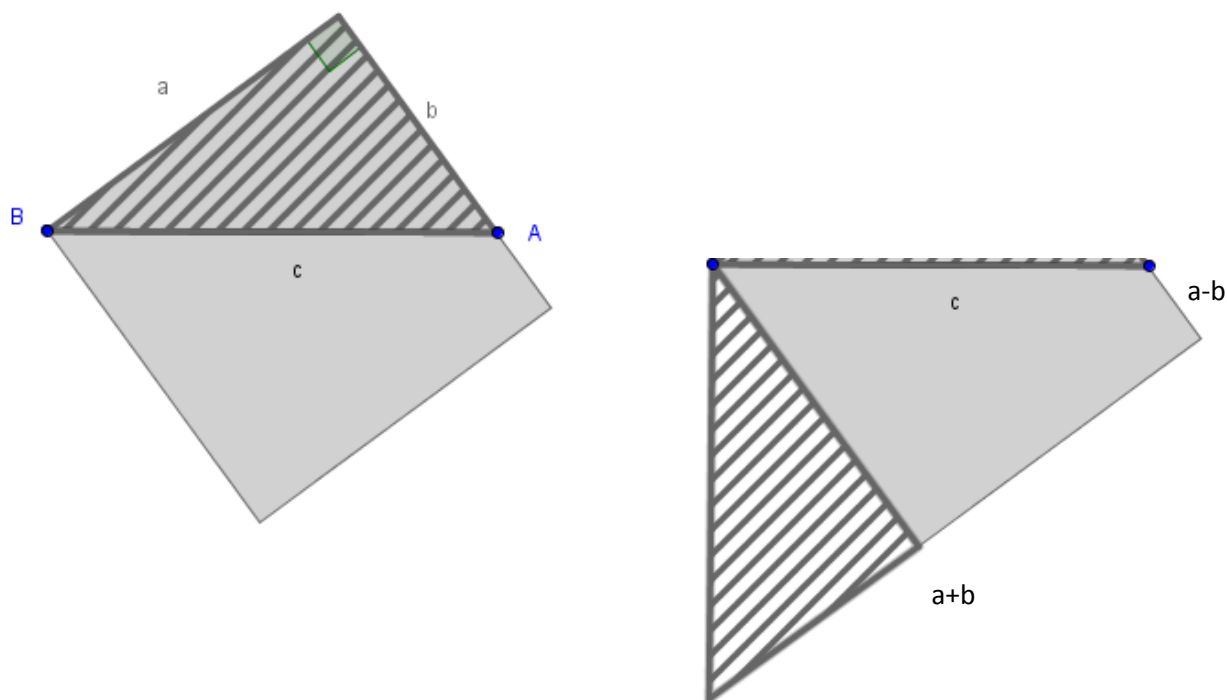


Door de oppervlakte van het trapezium op twee manieren te berekenen is het bewijs geleverd:

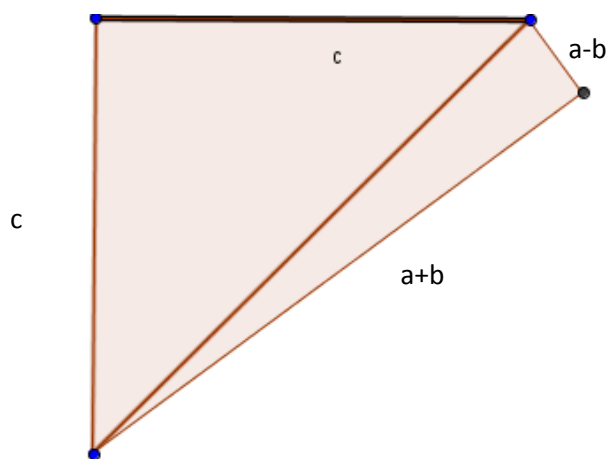
$$\frac{(a+b) \cdot (a+b)}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{2}$$

II. J.Dobbs, Mathematical Gazette (1913-1914, p.168)

De gelijkbenige rechthoekige driehoek, met benen even lang als de schuine zijde, die in het bewijs van Garfield opduikt deed Dobbs op een andere manier verschijnen. Hij stelde de oorspronkelijke driehoek voor in een “naar binnen geklapt” vierkant op een rechthoekszijde en draaide de driehoek vervolgens rond een hoekpunt over 90° zoals in de figuur:



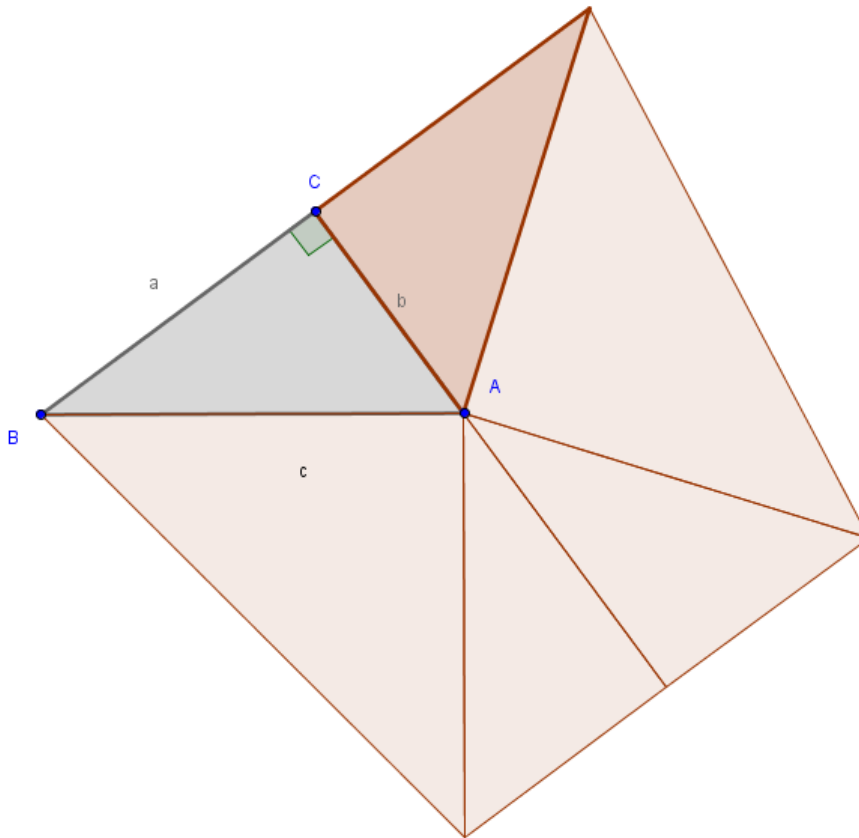
Er verschijnt een vierhoek met oppervlakte a^2 . De oppervlakte kan ook anders berekend worden:



$$\frac{c^2}{2} + \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{2} = \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$$

III. Jamie deLesmos (1995)

Jamie, een Amerikaanse leerling van een middelbare school, vond in 1995 een nieuw bewijs. Hij vormt met twee trapezia (zoals in het bewijs van president Garfield) een groot gelijkbenig trapezium:



De oppervlakte wordt opnieuw op twee manieren berekend:

$$\frac{(2a+2b) \cdot (a+b)}{2} = a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + 2 \cdot \frac{c^2}{2}$$

IV. Luc Gheysens



Doktor Luc Gheysens, diocesaan begeleider wiskunde, en lid van de stuurgroepen wiskunde van het Eekhoutcentrum zorgde voor een origineel bewijs.

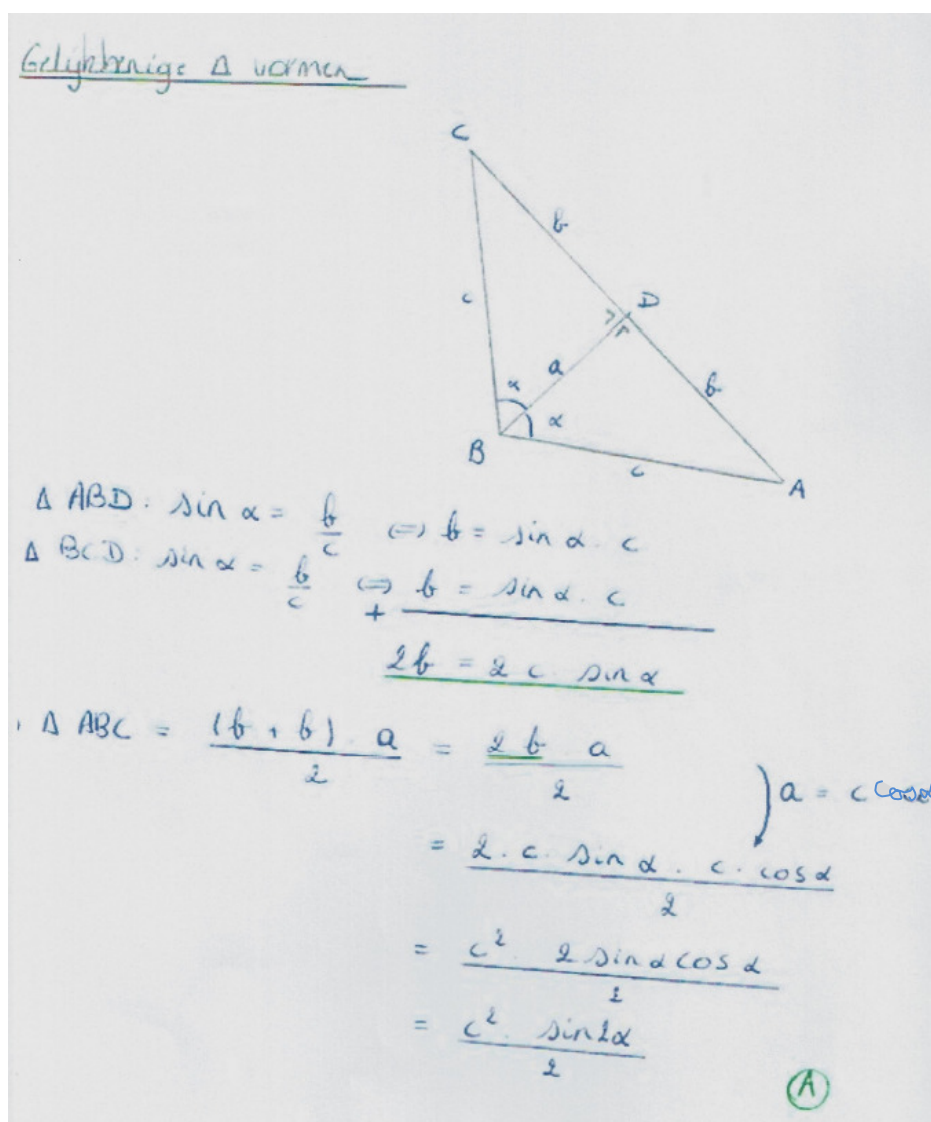
Op de bekende website <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/> is zijn bewijs opgenomen onder nummer 80 van de in totaal 96 bewijzen van de stelling.

De rechthoekige driehoek en zijn kopie worden op twee manieren tegen elkaar geschoven. Een eerste keer vormen ze samen een vlieger. Anders bekeken bestaat de vlieger ook uit twee tegen elkaar geschoven gelijkbenige driehoeken.

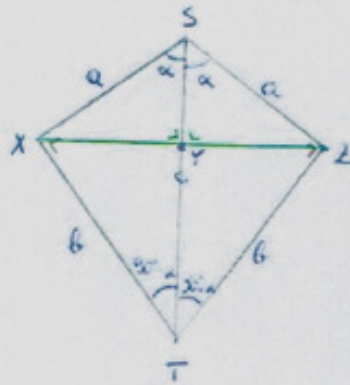
De twee keer wordt een gelijkbenige driehoek gevormd.

Bij de voorbereiding van deze werkwinkel staken Sofie en Günther de koppen bij elkaar om het bewijs zelf te vinden. Hun enige extra tip: Luc maakt in zijn bewijs gebruik van driehoeksmeting (hij zet goniometrische getallen in).

Het zoekwerk van Sofie en Günter is te mooi om hier niet op te nemen:



* Vlieger vormen



In een vlieger staan de diagonalen loodrecht op elkaar

$$\text{in } \triangle SXY: \sin \alpha = \frac{|XY|}{a} \Rightarrow |XY| = a \cdot \sin \alpha$$

$$\text{in } \triangle SZY: \sin \alpha = \frac{|YZ|}{a} \Rightarrow |YZ| = a \cdot \sin \alpha$$

$$|XZ| = 2a \sin \alpha$$

$$\text{Opp } \triangle SXZ = \frac{|XZ| \cdot |SY|}{2} = \frac{2a \sin \alpha \cdot |SY|}{2}$$

$$= \frac{2a \sin \alpha \cdot a \cdot \cos \alpha}{2}$$

$$= \frac{a^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\text{in } \triangle XYT: |XY| = b \cdot \sin (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{in } \triangle YZT: |YZ| = b \cdot \sin (90^\circ - \alpha)$$

$$+ \frac{|XZ| = 2b \cdot \sin (90^\circ - \alpha)}$$

$$\text{Opp } \triangle TXZ = \frac{|XZ| \cdot |YT|}{2} = \frac{2b \sin (90^\circ - \alpha) \cdot b \cdot \cos (90^\circ - \alpha)}{2}$$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin (2(90^\circ - \alpha))}{2}$$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin (180^\circ - 2\alpha)}{2}$$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin (2\alpha)}{2} \quad (2)$$

$$\text{Totale opp vlieger} = \frac{1}{2} \sin (2\alpha) (a^2 + b^2) \quad (3)$$

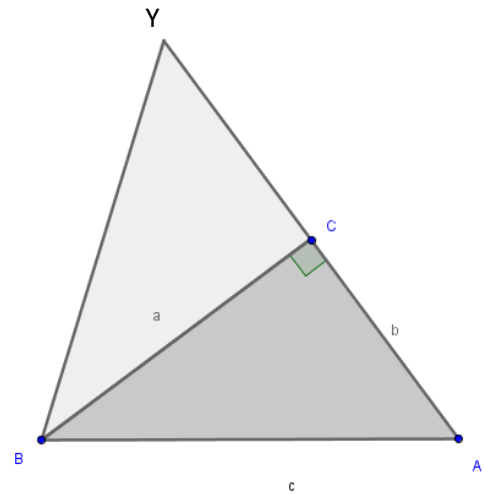
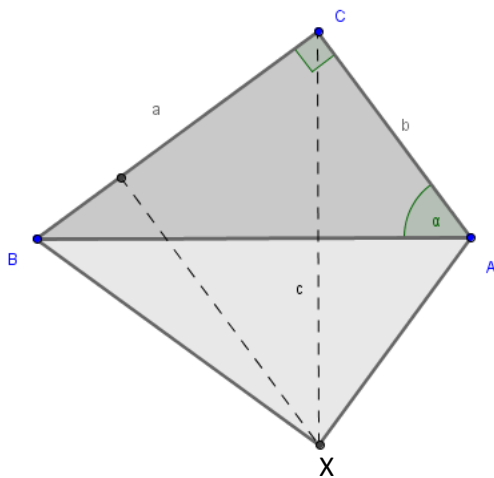
$$(1) = (2)$$

Wanneer met dezelfde 2 Δ 'n heb je 2 verschillende figuren gevormd (dus zelfde opp)

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot c^2 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Het bewijs van Luc volgt een kortere weg. Hij berekent alleen maar oppervlaktes van gelijkbenige driehoeken en kiest daarbij verrassend telkens één van de benen als basis:



Oppervlakte vlieger: $A_{\triangle BCX} + A_{\triangle AXC} = \frac{b \cdot b \sin(2\alpha)}{2} + \frac{a \cdot a \sin(180^\circ - 2\alpha)}{2}$

Oppervlakte driehoek: $A_{\triangle ABY} = \frac{c \cdot c \sin(2\alpha)}{2}$

Laat ons de uitwerking – ere wie ere toekomt – aan Luc zelf over.

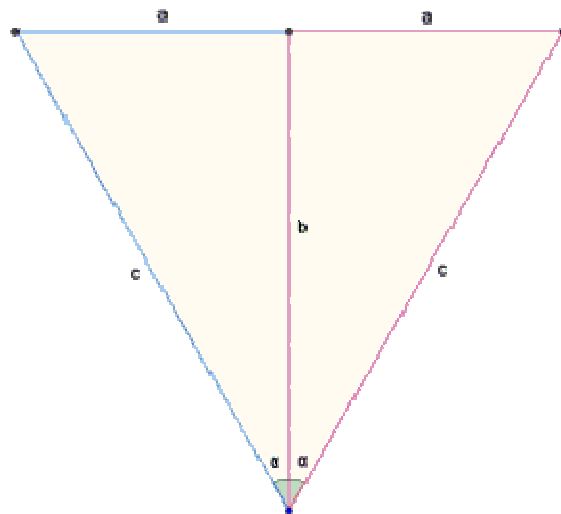
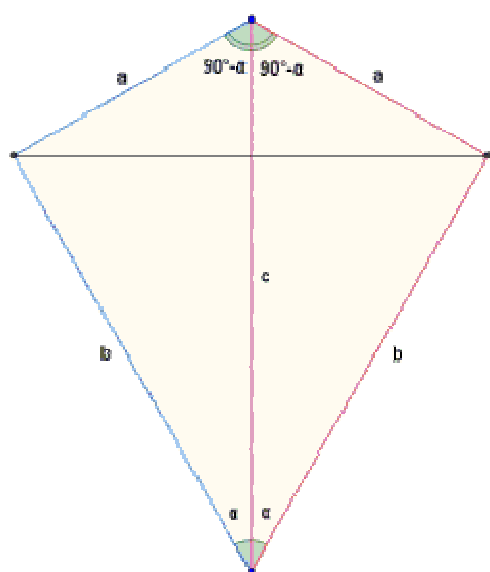
Dit vind je op <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras>:

Pythagorean Theorem

Proof by Luc Gheysens

The proof of the Pythagorean theorem discussed below makes employs the sin formula for the area of the triangle and, thus, appears to use trigonometry in an essential way. [The proof is due to Luc Gheysens from Flanders \(Belgium\)](#). As Luc has observed, the proof is a shortened variant of [Proof #80](#).

Combine two copies of the same right triangle in two ways as shown in the diagrams below:



When joined at the hypotenuse, the triangles form a kite that can be seen as a union of two isosceles triangle, with the area of

$$b^2 \sin(2\alpha)/2 + a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha)/2 = (a^2 + b^2) \cdot \sin(2\alpha)/2.$$

When joined at one of the legs (b in the right diagram), the triangles form an isosceles triangle with base 2a and the sides equal to c. Applying the same area formula to that triangle we obtain

$$c^2 \sin(2\alpha)/2 = (a^2 + b^2) \cdot \sin(2\alpha)/2$$

and the Pythagorean theorem follows.

Remark: The configurations on which the proof is based allow for another derivation based on [Heron's formula](#) as was done in [Proof #75](#).

The area of the kite is obviously ab and its square a^2b^2 . The isosceles triangle in the right diagram has the semiperimeter equal to $a + c$. Heron's formula applied to that triangle leads to

$$a^2b^2 = (c + a)(c - a)a^2 = (c^2 - a^2)bc^2,$$

which implies the Pythagorean theorem.

Luc zelf legt het op zijn ongelooflijk interessante en dynamische website <http://www.bloggen.be/gnomon/> als volgt uit:

De vlieger van Pythagoras

een alternatief bewijs voor de stelling van Pythagoras

Dr. Luc Gheysens

2011-09-11

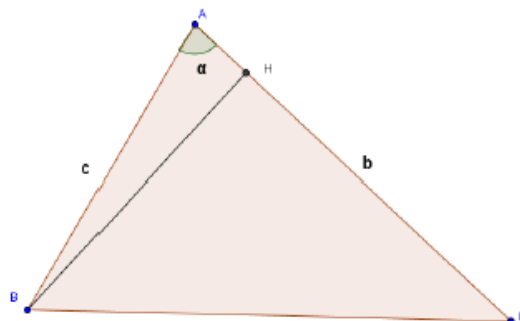
Op <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml> vind je 93 bewijzen voor de stelling van Pythagoras. Voor zover we hebben kunnen nagaan staat het bewijs dat hier wordt gepubliceerd (en dat gebruik maakt van de meetkundige figuur die men een vlieger noemt) daar niet bij en werd het ook niet eerder gepubliceerd.

We zullen gebruik maken van een gekende formule:

de oppervlakte van een willekeurige driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijden vermenigvuldigd met de sinus van de ingesloten hoek:

$$Opp. \Delta ABC = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$$

Bewijs



figuur 1

Als BH de hoogtelijn is uit B en H het voetpunt van die hoogtelijn op de zijde [AC] (figuur 1) dan is

$$Opp. \Delta ABC = \frac{1}{2} |AC| |BH| = \frac{1}{2} b |BH|. \quad (1)$$

In ΔABH is

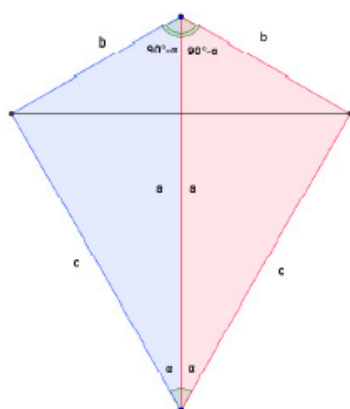
$$\sin \alpha = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{|BH|}{c}$$

zodat

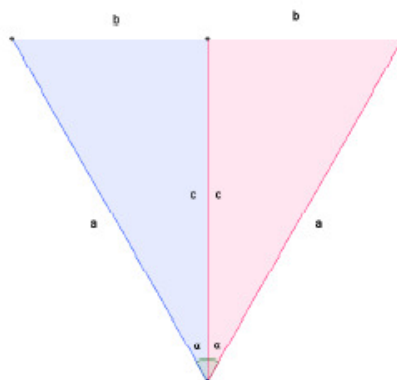
$$|BH| = c \sin \alpha \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt de vooropgestelde formule voor de oppervlakte van ΔABC .

Bewijs voor de stelling van Pythagoras.



figuur 2



figuur 3

Figuur 2 is een vlieger die bestaat uit twee rechthoekige driehoeken waarvan de schuine zijden (met lengte a) tegen elkaar liggen. De hoekpunten van de rechte hoeken zijn met elkaar verbonden zodat de vlieger ook kan gezien worden als een vierhoek die bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken. In de ene driehoek hebben de even lange benen lengte b en in de andere driehoek hebben de even lange benen lengte c .

We passen twee keer de bovenstaande formule toe voor de oppervlakte van een driehoek:

$$\begin{aligned} \text{Opp. vlieger} &= \frac{1}{2} c^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} b^2 \sin[2(90^\circ - \alpha)] \\ &= \frac{1}{2} c^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} b^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2} b^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} c^2 \sin 2\alpha \quad (3) \end{aligned}$$

(bij de laatste overgang gebruiken we het feit dat de sinus van supplementaire hoeken gelijk is).

In figuur 3 zijn de twee rechthoekige driehoeken waaruit de vlieger is opgebouwd op een andere manier tegen elkaar geplaatst, nl. met de rechthoekszijden met lengte c tegen elkaar. Op die manier ontstaat een gelijkbenige driehoek waarvan de even lange benen lengte a hebben. We passen hierop opnieuw de bovenstaande formule toe:

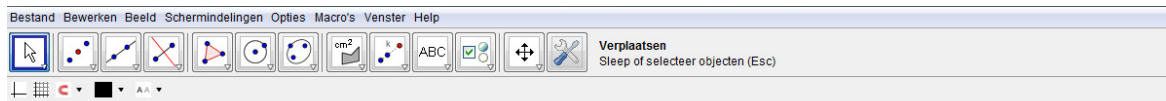
$$\text{Opp. vlieger} = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt dan direct dat $a^2 = b^2 + c^2$.
Q. E. D.

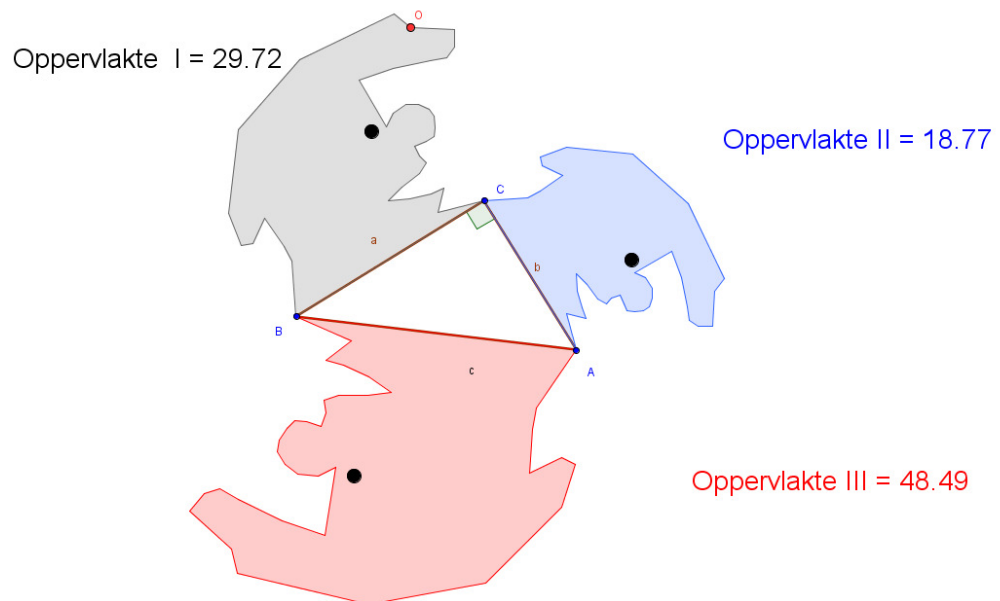
6. Een stapje verder

I. Geen vierkanten meer nodig

Vind je het verrassend dat er op de zijden van de rechthoekige driehoek geen vierkanten moeten staan?

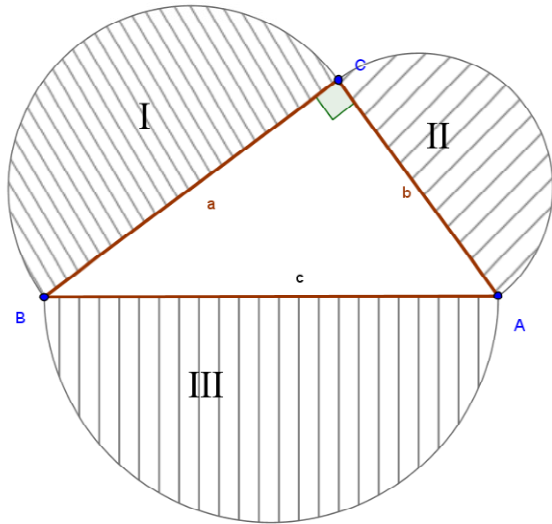


☒ stelling:



Het verband tussen de oppervlakten van **gelijkvormige** figuren op de drie zijden blijft overeind en kan met geogebra (of een ander dynamisch meetkundeprogramma geverifieerd worden). Het ontwerpen van een dergelijk bestand is op zich een mooie oefening op de elementaire meetkundige transformaties.

Als eerste stap naar niet-vierkanten kan gewerkt worden met halve cirkels of (onderling gelijkvormige) rechthoeken: hier kan het verband tussen de oppervlakten eenvoudig bewezen worden als de stelling van Pythagoras al gekend is:

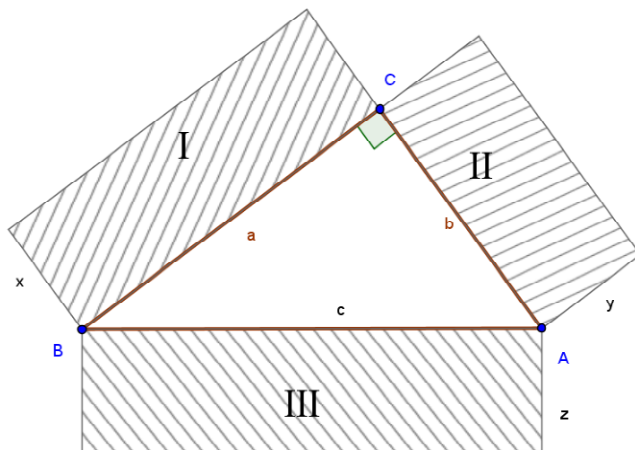


$$A_I + A_{II} = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} \quad A_{III} = \frac{\pi c^2}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} (a^2 + b^2)$$

en aangezien $a^2 + b^2 = c^2$
vinden we:

$$A_I + A_{II} = A_{III}$$



$$A_I + A_{II} = a \cdot x + y \cdot b \quad A_{III} = c \cdot z$$

De rechthoeken zijn gelijkvormig:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = r$$

$$\text{en dus: } A_I + A_{II} = r \cdot a^2 + r \cdot y^2 \quad A_{III} = r \cdot c^2$$

en met $a^2 + b^2 = c^2$ opnieuw:

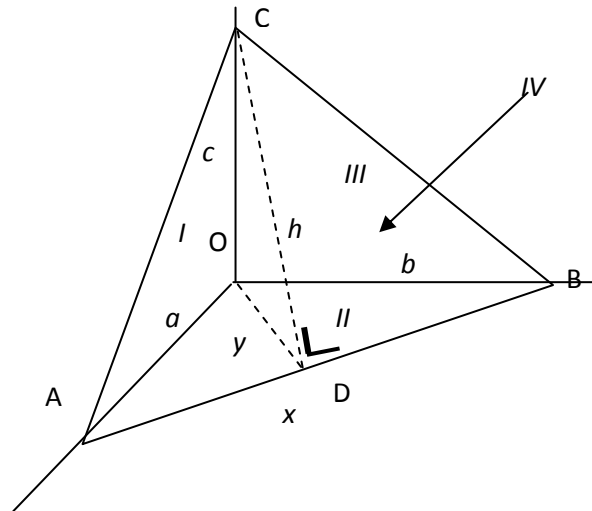
$$A_I + A_{II} = A_{III}$$

II. Pythagoras de ruimte in

Zou er een 'Pythagoras' -in -de - ruimte-formule' bestaan?

Stel je een viervlak voor:

drie van de zijvlakken zijn rechthoekige driehoeken en de drie rechte hoeken komen samen in één hoekpunt van het viervlak (een orthogonaal assenstelsel is ideaal):



Blijkbaar geldt dan dat

de som van de kwadraten van de oppervlakten van de drie rechthoekige driehoeken gelijk is aan het kwadraat van de oppervlakte van het vierde zijvlak.

De som van de kwadraten van de oppervlakten van de drie rechthoekige driehoeken is:

$$A_I^2 + A_{II}^2 + A_{III}^2 = \left(\frac{a \cdot c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot c}{2}\right)^2 \quad (1)$$

In de figuur is een hoogte van $\triangle OCD$ geconstrueerd zodat het kwadraat van de oppervlakte van het vierde zijvlak als volgt kan uitgedrukt worden:

$$A_N^2 = \left(\frac{x \cdot h}{2} \right)^2 \quad (2)$$

Om te bewijzen $(1) = (2)$ volstaat het aan te tonen:

$$a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 = x^2h^2 \quad (3)$$

De stelling van Pythagoras komt nog een aantal keer ter hulp.

Vraag is wel of je kunt beredeneren of alle driehoeken hierna wel recht zijn:

$$\Delta AOB: \quad x^2 = a^2 + b^2 \qquad \Delta COD: \quad h^2 = c^2 + y^2 \qquad (4)$$

Door substitutie van de uitdrukkingen (4) in (3) bekomen we:

$$a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 \stackrel{(4)}{=} x^2(c^2 + y^2) = x^2c^2 + x^2y^2 \stackrel{(3)}{=} (a^2 + b^2)c^2 + x^2y^2 = a^2c^2 + b^2c^2 + x^2y^2$$

Er valt enkel nog te bewijzen:

$$a^2b^2 = x^2y^2$$

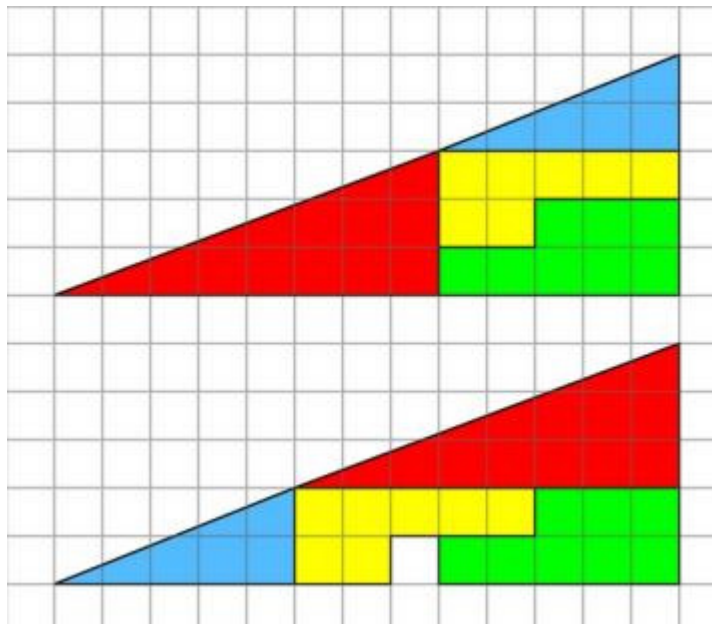
en dat herleidt zich tot de vraag of y ook staat voor een hoogte in $\triangle OAB$

7. WAARSCHUWINGr

We probeerden duidelijk te maken dat illustraties en bewijzen van de stelling van Pythagoras verrassend en uitdagend kunnen zijn en dat er mogelijkheden zijn om de stelling ook aan te pakken buiten de context van gelijkvormigheid.

We maakten ook duidelijk dat er een verschil is tussen een illustratie en een bewijs: een puzzel wordt pas een bewijs als hij verklaard wordt.

Illustraties alleen kunnen misleidend zijn:



Met dezelfde puzzelstukken wordt de eerste keer een halve rechthoek (met oppervlakte 5.13 v ierkantjes) gelegd. Door de puzzelstukken te herschikken is er een vierkantje verdwenen. Besluit: $65 = 64$?

<http://www.youtube.com/watch?v=ee0dksxkog0&NR=1&feature=endscreen>

bronnen:

Bruno Ernst, 2002, De interessantste bewijzen voor de stelling van Pythagoras, Epsilon Utrecht

Chris Standaert, lerarenopleider KATHO-ReNo, syllabus meetkunde

<http://www.cut-the-knot.org/> : Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles

<http://www.gnomon.be/> : Luc Gheysens, de eerste Vlaamse wiskundeclub op het internet

<http://www.bloggen.be/gnomon> : Luc Gheysens, GNOMON-weblog met wiskunde als centrale thema

De stelling van Pythagoras is een blijvende bron van inspiratie, ook in onze moderne en digitale wereld. Een heel kleine selectie uit Youtube filmpjes:

http://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o&feature=youtube_gdata_player

geen bewijs maar wel een mooie demonstratie

http://www.youtube.com/watch?v=kME6Gv5XVV8&feature=youtube_gdata_player

hoe wiskunde alle taalbarrières doorbreekt

http://www.youtube.com/watch?v=GGJ8XKb07T8&feature=youtube_gdata_player

een idee voor een nieuwe hit van 't Hof van Commerce of Flip Cauwlier?

De fascinatie voor de stelling leidt sommige mensen langs heel boeiende paden waarbij het niet duidelijk is of het einddoel wel ooit bereikt wordt. Laat je met dit laatste filmpje meevoeren, wordt verrast door de vele figuren en beweringen die aan een keukentafel op een kartonnen bord verschijnen. We durven betwijfelen of hier echt een bewijs geleverd wordt, maar zoals zo dikwijls: is de weg naar het paradijs niet boeiender dan het paradijs zelf?

http://www.youtube.com/watch?v=6TKYEKXI4Gk&feature=youtube_gdata_player