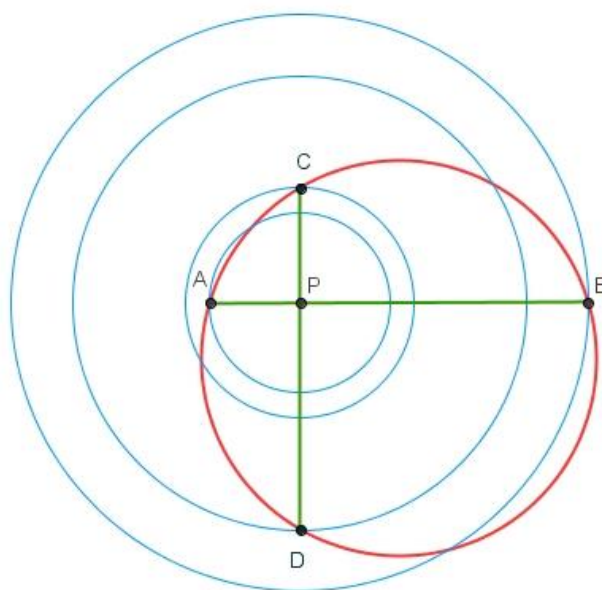


Probleem met vijf cirkels

[AB] en [CD] zijn twee koorden van een cirkel die elkaar loodrecht snijden in P.
Toon aan dat het gemiddelde van de oppervlakten van de vier cirkels met middelpunt P en die respectievelijk door A, B, C en D gaan gelijk is aan de oppervlakte van de gegeven cirkel.

Dat betekent dus dat op de onderstaande figuur het gemiddelde van de oppervlakten van de vier blauwe cirkels gelijk is aan de oppervlakte van de rode cirkel.



Bewijs.

Noem R de straal en O het middelpunt van de gegeven cirkel, M het midden van [AB] en N het midden van [CD].

Het volstaat aan te tonen dat $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4R^2$.

Welnu,

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 &= (|AM| - |PM|)^2 + (|PM| + |AM|)^2 + (|CN| - |PN|)^2 + (|PN| + |CN|)^2 \\ &= 2(|AM|^2 + |PN|^2) + 2(|CN|^2 + |PM|^2) \\ &= 2(|AM|^2 + |OM|^2) + 2(|CN|^2 + |ON|^2) \\ &= 2|AO|^2 + 2|CO|^2 \\ &= 4R^2. \end{aligned}$$