Het getal van Euler

In de driehoek van Pascal geldt de volgende eigenschap:

$\dfrac{P_{n-1}\cdot P_{n+1}}{(P_n)^2}$ heeft als limiet *e* (getal van Euler) als *n* gaat naar oneindig,

waarbij P_n het product is van de getallen van de n-de rij.

Bewijs:

Neem $P_n = \prod_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Dan is

$$P_n = (n!)^{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!} = (n!)^{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k!k!} = (n!)^{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\ .$$

Dus

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\big((n+1)!\big)^{n+2}\cdot\prod_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k!)^2}}{(n!)^{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}} = \frac{\big((n+1)!\big)^{n+2}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\cdot\frac{1}{\big((n+1)!\big)^2}}{(n!)^{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}} = \frac{\big((n+1)!\big)^{n}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}}{(n!)^{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}}$$

$$= \frac{\big((n+1)!\big)^{n}}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n\cdot(n!)^n}{n!\cdot(n!)^n} = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

en dus

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

zodat

$$\frac{P_{n-1}\cdot P_{n+1}}{\left(P_n\right)^2} = \frac{P_{n-1}}{P_n}\cdot\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}\cdot n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

En we weten:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Bert Wikkerink