

Prentjes verzamelen.

Laten we aannemen dat er n verschillende plaatjes zijn en dat ze allemaal even waarschijnlijk zijn. Er zit één plaatje per pakje kauwgum. We berekenen het gemiddelde aantal pakjes dat we moeten kopen om de volledige collectie van de n verschillende plaatjes te hebben.

We veronderstellen dat we na de aankoop van een aantal pakjes kauwgum i verschillende plaatjes hebben. Het aantal pakjes kauwgum dat we dan nog moeten kopen, noteren we met $k(i)$.

Als we n verschillende plaatjes hebben, dan moeten we geen pakjes kauwgum meer bijkopen, dus: $k(n) = 0$. We zoeken hoeveel pakjes kauwgum we moeten kopen, wanneer we beginnen met een collectie van 0 plaatjes. Dus eigenlijk zoeken we $k(0)$.

Wanneer we 1 pakje kauwgum kopen, dan hebben we:

- ofwel een nieuw plaatje (met een kans $\frac{n-i}{n}$);
- ofwel een plaatje dat we al hadden (met een kans $\frac{i}{n}$).

In het eerste geval hebben we $i+1$ verschillende plaatjes en moeten we nog $k(i+1)$ pakjes kauwgum kopen om de collectie volledig te maken. In het tweede geval blijft ons aantal verschillende plaatjes gelijk aan i en moeten we nog steeds $k(i)$ pakjes kauwgum kopen.

Dus is

$$k(i) = 1 + \frac{n-i}{n} \cdot k(i+1) + \frac{i}{n} \cdot k(i)$$

waaruit volgt dat

$$k(i) = k(i+1) + \frac{n}{n-i}.$$

Omdat $k(n) = 0$ is volgt hieruit dat

$$k(0) = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{n} = n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Voor $n = 10$ moeten we dus

$$10 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) = 29,289$$

of ongeveer 30 pakjes kauwgum komen.

Met dank aan Johan – www.wisfaq.nl.

Opmerking van collega Noud Meelen.

De oplossing laat een eenvoudige interpretatie toe, die ook kan gebruikt worden voor een eenvoudiger bewijs. De formule is namelijk de som van de tien gemiddelde ‘wachttijden’ (aantal te kopen pakjes kauwgum) op ieder plaatje.

Referentie. De geometrische kansverdeling met parameter p heeft als verwachting (‘gemiddelde’) $1/p$.