Muntstukken opgooien

Deze tekst is ontstaan naar aanleiding van de Mathematical Modeling Maastricht, de MMM wedstrijd 2011. Eén van de vragen peilde naar het gemiddeld aantal keer dat je een muntstuk moet opgooien vooraleer KKMMK te krijgen en naar de kans dat KKMMK voor KMMKM te voorschijn komt.

1 Verkenning

1.1 Notaties

1. Bij het opgooien van een eerlijk muntstuk kan je 2 resultaten krijgen K(kop) of M(munt). De kans dat een muntstuk K of M geeft is in beide gevallen 0.5.

2. We gaan het muntstuk nu verschillende keren na elkaar opgooien en we noteren telkens het resultaat van de worp. Zo ontstaat een rijtje van K en M, bijvoorbeeld KKMKMMK.

3. Met T(KM) noteren we de stoptijd van de het rijtje KM: het aantal worpen nodig om de eerste keer KM te krijgen. T(KM) is een stochast met mogelijke uitkomsten $2, 3, 4, \cdots$.

4. Met t(KM) noteren we de verwachte stoptijd van het rijtje KM: de verwachtingswaarde van de stochast T(KM) of het gemiddeld aantal keer dat men moet gooien vooraleer KM te krijgen.

1.2 Eénletterrijtjes

1. We verkennen de situatie met rijtjes bestaande uit slechts 1 symbool.

2. Bestudeer de kansverdeling van de stochast T(K): het aantal worpen dat nodig is om voor de eerste keer K te gooien.

n	1	2	3	4	5	...
$P(T(K)=n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...

Dus: $P(T(K)=n) = p_n = \dfrac{1}{2^n}$.

3. Dit is een kansverdeling want:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

4. Wat is nu de gemiddelde of verwachte stoptijd van T(K)?

$$t(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Dit is geen meetkundige reeks, dus de berekening is heel wat moeilijker.

5. We vertrekken bij de meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Afleiden geeft :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) + (x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n.x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$$

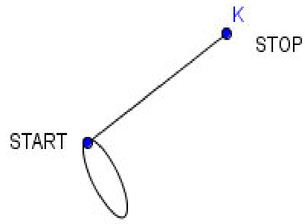
De convergentie van de betreffende reeksen is in orde voor $|x| < 1$, dus we kunnen x vervangen door $\frac{1}{2}$ en alzo $t(K)$ uitrekenen:

$$t(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 - 2 = 2$$

6. Gemiddeld zullen we het muntstuk 2 keer moeten opgooien om voor de eerste keer K te krijgen. Analoog zullen we gemiddeld het muntstuk 2 keer moeten opgooien om voor de eerste keer M te krijgen. Dit is geen verrassend resultaat!

1.3 Een andere kijk

1. We stellen de situatie schematisch voor als volgt :



   Als we van de eerste keer K gooien(en die kans is $\frac{1}{2}$), dan kunnen we stoppen en als we M gooien (en die kans is ook $\frac{1}{2}$) dan moeten we opnieuw beginnen.

2. Noteer met t het verwacht aantal keer dat we moeten gooien om voor het eerst K te krijgen. Gooi je K dan ben je klaar. Gooi je echter M dan moet je opnieuw beginnen en duurt het terug t pogingen om K te krijgen. In formulevorm:

$$t = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(1+t)$$

   Deze vergelijking lossen we eenvoudig op. We vinden $t = 2$.

3. Net zoals in het vorige deel vinden we dat we gemiddeld 2 keer moeten gooien om voor het eerst K te krijgen.

2 Tweeletterrijtjes

2.1 Vragen

We gaan nu combinaties van 2 symbolen bestuderen: KK,MM,KM of MK, en stellen ons daarbij de volgende vragen:

1. Hoeveel maal moet je gemiddeld een eerlijk muntsuk opgooien vooraleer je KM krijgt? Of KK?

2. Hoe groot is de kans dat er eerder KM dan KK verschijnt?

3. Als twee personen elk een muntstuk opgooien, hoe groot is dan de kans dat persoon A eerder KM gooit dan persoon B KK heeft?

2.2 Kansverdelingen

1. Als je n pogingen nodig hebt om KM te bekomen, hoe ziet het rijtje er dan uit? Dat rijtje kan beginnen met een serie M'en, maar zodra er een K verschijnt, kunnen er alleen maar K's volgen tot aan de laatste poging, die uiteraard een M moet zijn.
   De mogelijke rijtjes zijn dus ($k = 0, 1, 2, \cdots, n-2$):

$$\underbrace{M \cdots M}_{k}\underbrace{K \cdots K}_{n-k-1}M$$

   Dit zijn in het totaal $n-1$ rijtjes. Elk rijtje treedt op met kans $(\frac{1}{2})^n$.
   Bijgevolg is $P(T(KM) = n) = p_n = (n-1)(\frac{1}{2})^n$

n	2	3	4	5	...
$P(T(KM) = n)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{32}$	...

2. Dit is een kansverdeling want:

$$\sum_{n=2}^{\infty} p_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = (2 - \frac{1}{2}) - (1 - \frac{1}{2}) = 1$$

3. Nu onderzoeken we de kansverdeling van het aantal pogingen op KK te krijgen. Dus als je n pogingen nodig hebt om KK te bekomen, hoe ziet het rijtje er dan uit? De laatste 2 symbolen zijn natuurlijk KK. Daarvóór mogen geen twee K's naast elkaar staan, dus eventule K's moeten steeds alleen staan, tussen M'en. Proberen we even :
   lengte 2: KK
   lengte 3: MKK
   lengte 4: KMKK,MMKK
   lengte 5: KMMKK,MKMKK,MMMKK
   Om nu mogelijke rijtjes van lengte 6 te vormen nemen we de rijtjes van lengte 5 en zetten achter het deel voor KK een M. Ofwel nemen we een rijtje van lengte 4 en plaatsen achter het deel voor KK de symbolen KM. Op deze manier vinden we alle mogelijke rijtjes van lengte 6. Het aantal rijtjes van lengte n, genoteerd m_n wordt dus verkregen met de formule

$$m_n = m_{n-1} + m_{n-2}$$

   Dit is de bekende rij van Fibonacci met startwaarden $m_1 = 0$ en $m_2 = 1$. Een expliciet voorschrift is gegeven door:

$$m_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

Bijgevolg is $P(T(KK) = n) = r_n = m_n(\frac{1}{2})^n$

n	2	3	4	5	...
$P(T(KK) = n)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{32}$	...

4. Dit is een kansverdeling want:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} r_n =& \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m_n}{2^n} \\
=& \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right\} \\
=& \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} \right\} \\
=& \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}} \right\} \\
=& \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \right\} \\
=& 1
\end{aligned}$$

5. We beschikken over de kansverdelingen van $T(KM)$ (en natuurlijk ook $T(MK)$) en $T(KK)$ (en evenzo $T(MM)$). We zijn dus klaar om de verwachtingswaarden te berekenen.

2.3 Verwachte stoptijden

1. We vertrekken ook hier bij de meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

We hebben reeds gezien dat $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{1-x}$
Dus

$$2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n.x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} - x$$

Nogmaals afleiden geeft:
$4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots = \dfrac{2}{(1-x)^3} - \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1$
Bijgevolg :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2.x^n = 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} - x$$

Wegens de convergentie voor $|x| < 1$ kunnen we hierin x vervangen door $\frac{1}{2}$ en door $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

2. We berekenen eerst het gemiddeld aantal keer dat we moeten gooien om KM te krijgen:

$$\begin{aligned} E(T(KM)) = t(KM) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{2\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} - \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2} - \Big(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Big) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Besluit: $t(KM) = t(MK) = 4$

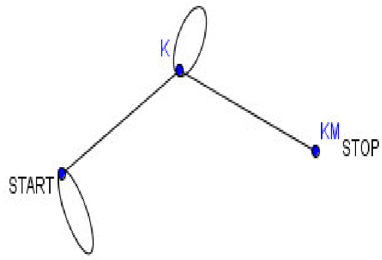
3. Het gemiddeld aantal keer dat we moeten gooien om KK te krijgen:

$$\begin{aligned} E(T(KK)) = t(KK) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n.m_n}{2^n} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} n.\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n.\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{(1-\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2} - 1 - \frac{1}{(1-\frac{1-\sqrt{5}}{4})^2} + 1 \right\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Besluit: $t(KK) = t(MM) = 6$
Gemiddeld gesproken duurt het langer om KK of MM te krijgen dan om KM of MK te gooien.

2.4 Een andere aanpak

1. We stellen de situatie voor het gooien van KM schematisch voor als volgt :



   Als we de eerste keer M gooien, moeten we opnieuw beginnen. Gooien we eerst K, dan kunnen we verder. Gooi je vervolgens een M, dan ben je klaar. Gooi je echter een K, moet je van hieruit verder.

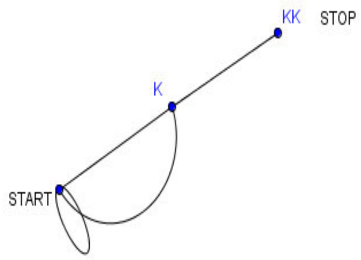
2. Noteren we $t = t(T(KM))$ en met t_k het gemiddeld aantal pogingen om KM te krijgen als er reeds k symbolen juist zijn. Dan is $t = t_0$.

3. Het gegeven schema vertaalt zich in:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(1 + t_1) + \frac{1}{2}(1 + t) \\ t_1 = \frac{1}{2}(1 + t_1) + \frac{1}{2}.1 \end{cases}$$

4. Het oplossen van dit stelsel geeft $t_1 = 2$ en $t = 4$. Zoals we vroeger reeds gevonden hadden: we moeten gemiddeld 4 keer gooien vooraleer KM te krijgen.

5. We stellen de situatie voor het gooien van KK schematisch voor als volgt :



6. Het bijhorende stelsel is:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(1+t_1) + \frac{1}{2}(1+t) \\ t_1 = \frac{1}{2}(1+t) + \frac{1}{2}.1 \end{cases}$$

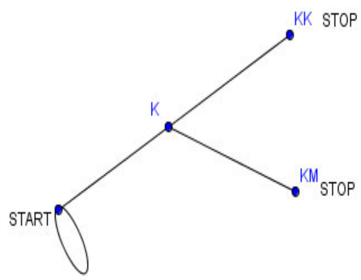
De oplossing is $t_1 = 4$ en $t = 6$.

2.5 Zin in een spelletje?

1. Gemiddeld moeten we 4 keer het muntstuk opgooien op KM te krijgen en 6 keer om KK te krijgen. Maar is de kans dat KM voor KK komt dan ook groter dan 50%?

2. We noteren de kans dat KM voor KK komt als $p(KM < KK) = p$. Met p_K noteren we de voorwaardelijke kans dat KM voor KK komt als je weet dat de eerste worp een K opleverde. P_{KK} is de kans dat KM voor KK komt als je reeds 2 keer K hebt gegooid.

3. Schematisch :



4. Vertaald :
$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}p_K + \frac{1}{2}p \\ p_K = \frac{1}{2}p_{KK} + \frac{1}{2}.p_{KM} \end{cases}$$
Hierbij is $p_{KK} = 0$ en $p_{KM} = 1$. De oplossing van het stelsel geeft $p = \frac{1}{2}$.

5. Ondanks het feit dat de verwachte stoptijd van KM kleiner is dan de verwachte stoptijd van KK, is de kans dat KM voor KK komt toch maar gelijk aan 50%. Er is dus evenveel kans dat KM voor KK komt dan omgekeerd.

6. Een overzicht van de andere resultaten:

	KK	KM	MM	MK
KK	/	0.5	0.5	0.25
KM	0.5	/	0.75	0.5
MM	0.5	0.25	/	0.5
MK	0.75	0.5	0.5	/

We lezen de tabel van links naar rechts. Zo is de kans dat KM voor MM komt gelijk aan 0.75.

7. Uit de tabel leren we dat de kans dat KM voor KK komt even groot is dan omgekeerd, de kans dat KK voor KM komt. Dit is duidelijk niet altijd waar: bekijk het paar MK en KK. De kans dat MK voor KK komt is 75%. Omgekeerd is de kans dat KK voor KM komt slechts 25%. De kansen $p(MK < KK)$ en $p(KK < MK)$ zijn dus allerminst gelijk.

8. Maken we er een spel van. Speler A kiest een tweeletterwoord en laat dat aan speler B zien. B kiest dan een ander tweeletterwoord. Vervolgens wordt een eerlijk muntstuk opgegooid en de speler wiens tweeletterwoord het eerst verschijnt wint het spel. Speler B kan zijn woord zo kiezen dat hij meestal wint.

speler A	speler B	odds ten voordele van speler B
KK	MK	3 tegen 1
KM	MK	1 tegen 1
MK	KM	1 tegen 1
MM	KM	3 tegen 1

2.6 Nog een spelletje

1. Nemen we twee spelers A en B en elk gooien ze met een eerlijk muntstuk. Speler A stopt als hij KM gooit en speler B stopt als hij KK heeft. Hoe groot is de kans dat A wint? Of B wint? Of dat ze op hetzelfde moment stoppen?

2. Laten we de kans uitrekenen dat A wint. Veronderstel dat speler B n keer moet gooien vooraleer hij KK heeft gekregen. Dan moet A minder dan n keer gooien. De kans dat A wint vinden we door alle kansen op te tellen voor n pogingen van B en $k < n$ pogingen van A:

$$p_2r_3 + (p_2 + p_3)r_4 + (p_2 + p_3 + p_4)r_5 + \cdots ... = \sum_{n=3}^{\infty}(\sum_{k=2}^{n-1} p_kr_n)$$

3. We rekenen eerst de binnenste som uit. Stel

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k$$
$$(1-x)^2)S = S - 2xS + x^2S = x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}$$
$$\frac{S}{(1-x)^2)} = \frac{x}{(1-x)^2)} + \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Gebruiken we deze formule voor $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{k=n-1} p_k = &\sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{k}{2^k} - \sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{1}{2^k} \\ =&2 + \frac{4(n-1)}{2^{n+1}} - \frac{4n}{2^n} - \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{2^n}\right) \\ =&1 - \frac{n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

4. Berekenen we nu de kans dat A wint:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}(\sum_{k=2}^{n-1} p_kr_n) =&\sum_{n=3}^{\infty}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right).\frac{m_n}{2^n} \\ =&\sum_{n=3}^{\infty}\frac{m_n}{2^n} - 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n.m_n}{4^n} \\ =&(1 - \frac{1}{4}) - 2(\frac{28}{121} - \frac{2}{8}) \\ =&\frac{65}{121}\end{aligned}$$

5. Analoog vindt men dat de kans dat speler B wint gelijk is aan $\frac{39}{121}$ en de kans op een gelijkspel is dan $\frac{17}{121}$.

6. Een overzicht van alle mogelijke winstkansen van speler A (vertikaal) ten opzichte van speler B (horizontaal) wordt gegeven in volgende tabel:

	KK	KM	MK	MM
KK	$\frac{11}{25}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{11}{25}$
KM	$\frac{65}{121}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{65}{121}$
MK	$\frac{65}{121}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{65}{121}$
MM	$\frac{11}{25}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{11}{25}$

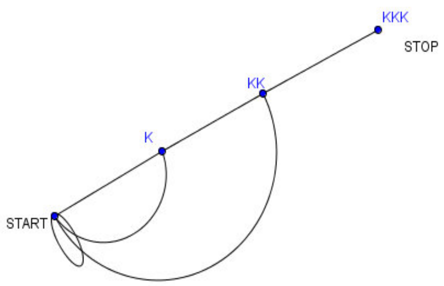
7. De kansen op een gelijkspel worden dan gegeven door:

	KK	KM	MK	MM
KK	$\frac{3}{25}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{3}{25}$
KM	$\frac{17}{121}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{17}{121}$
MK	$\frac{17}{121}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{17}{121}$
MM	$\frac{3}{25}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{3}{25}$

3 Drieletterrijtjes

3.1 Verwachte stoptijden

1. Het berekenen van de kansverdelingen wordt veel te moeilijk, dus gebruiken we de andere aanpak. Berekenen we bijvoorbeeld $t(KKK)$:



2. Vertaald :

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(1+t_1) + \frac{1}{2}(1+t) \\ t_1 = \frac{1}{2}(1+t) + \frac{1}{2}(1+t_2) \\ t_2 = \frac{1}{2}(1+t) + \frac{1}{2}.1 \end{cases}$$

Dit geeft volgend stelsel:

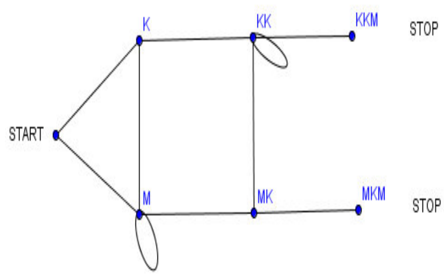
$$\begin{cases} t - t_1 = 2 \\ -t + 2t_1 - t_2 = 2 \\ -t + 2t_2 = 2 \end{cases}$$

met als oplossing $t = 14$. We moeten dus gemiddeld 14 keer gooien om KKK te krijgen.

3. Analoog vindt men $t(KKK) = t(MMM) = 14$, $t(KKM) = t(MMK) = t(KMM) = t(MKK) = 8$ en $t(KMK) = t(MKM) = 10$.

3.2 Het spelletje

1. Hoe groot is de kans dat KKM voor MKM komt?



2. In de vorm van een stelsel geeft dit:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}p_K + \frac{1}{2}p_M \\ p_K = \frac{1}{2}p_{KK} + \frac{1}{2}.p_M \\ p_{KK} = \frac{1}{2}p_{KK} + \frac{1}{2}.1 \\ p_M = \frac{1}{2}p_{MK} + \frac{1}{2}.p_M \\ p_{MK} = \frac{1}{2}p_{KK} + \frac{1}{2}.0 \end{cases}$$

3. De oplossing van het stelsel geeft $p = \frac{5}{8}$.

4. Een overzicht van alle mogelijke winstkansen van speler A (vertikaal) ten opzichte van speler B (horizontaal) wordt gegeven in volgende 2 tabellen:

	KKK	KKM	KMK	KMM
KKK	/	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
KKM	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
KMK	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	/	$\frac{1}{2}$
KMM	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	/
MKK	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
MKM	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
MMK	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$
MMM	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$

	MKK	MKM	MMK	MMM
KKK	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
KKM	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$
KMK	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$
KMM	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
MKK	/	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
MKM	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
MMK	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	/	$\frac{1}{2}$
MMM	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	/

Een aantal van de resultaten kan je natuurlijk op een andere manier bepalen. Zo kan bijvoorbeeld KKK enkel winnen als het verschijnt bij de eerste drie worpen, dus met kans $\frac{1}{8}$.
Dus is $P(MKK < KKK) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
Als we de winstkansen van MKK ten opzichte van KKM willen bestuderen, dan merken we op dat KKM wint in de gevallen $KKM, KKKM, KKKKM, \cdots$. De kans hiertoe is $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \dfrac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.
Dus $P(MKK < KKM) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

5. Als speler B zijn keuze kan laten afhangen van de keuze van speler A, kan hij dan een winnende strategie bedenken? We noemen dit het *spel van Penney* naar de uitvinder Walter Penney. Je neemt een spel kaarten en speler A kiest de kleuren van 3 kaarten: bijvoorbeeld rood, zwart,rood (RZR). Speler B doet hetzelfde en dan draait men de kaarten om. De speler wiens schikking het eerst voorkomt wint. Rood of zwart, kop of munt: het komt op hetzelfde neer.

6. De winnende strategie voor speler B is:

   (a) Kies als eerste symbool het tegengestelde van het tweede symbool van speler A.

   (b) Voeg er nu de eerste twee symbolen van speler A aan toe.

7. De kans dat MKK voor KKK komt is $\frac{7}{8}$. Omgekeerd is de kans dat KKK voor MKK komt $\frac{1}{8}$. De kans dat MKK voor KKK komt is dus 7 keer zo groot als omgekeerd.Een volledig overzicht:

speler A	speler B	odds ten voordele van speler B
KKK	MKK	7 tegen 1
KKM	MKK	3 tegen 1
KMK	KKM	2 tegen 1
KMM	KKM	2 tegen 1
MKK	MMK	2 tegen 1
MKM	MMK	2 tegen 1
MMK	KMM	3 tegen 1
MMM	KMM	7 tegen 1

8. Dit is een voorbeeld van een niet-transitief spel. Van de rijtjes KMM, MMK,MKK en KKM is er geen de sterkste: de kans dat KMM voor MMK komt is $\frac{3}{4}$ en de kans dat MMK voor MKK komt is $\frac{2}{3}$. Maar de kans dat KMM voor MKK komt is slechts 50%. Een ander niet transitief spel is het welbekende: papier, steen en schaar.

4 Meerletterwoordjes

John Conway bedacht een algemene formule voor de verwachte stoptijden en voor de kans dat een bepaald woord voor een ander woord komt. We geven hier de werkwijze maar niet de bewijzen.

4.1 Het leidinggevende getal

1. Neem twee woorden van gelijke lengte: $W_1 = KKMM$ en $W_2 = MKMM$. Schrijf het eerste woord boven het tweede en als alle symbolen gelijk zijn noteer je 1, anders 0.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
0 & & & \\
K & K & M & M \\
M & K & M & M
\end{array}$$

2. Van het bovenste woord laat je het eerste symbool weg en schuif alles een plaats naar links. Als de 3 symbolen van het bovenste woord corresponderen met de 3 symbolen eronder plaats je een 1, anders een 0.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
0 & 0 & & \\
K & M & M & \\
M & K & M & M
\end{array}$$

3. Schuif nog een plaats op:

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
0 & 0 & 0 & \\
M & M & & \\
M & K & M & M
\end{array}$$

4. Nog een keer :

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
0 & 0 & 0 & 1 \\
M & & & \\
M & K & M & M
\end{array}$$

5. Tenslotte een laatste keer:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & \\
M & K & M & M &
\end{array}$$

6. Het getal bovenaan, dat bestaat uit nullen en enen, bekijken we binair. Het decimaal getal dat hiermee overeenkomt noemen we het leidinggevende getal van W_1 en W_2, en we noteren: $W_1 * W_2$. Het leidinggevende getal is een maat voor de overlapping van de twee woorden. In dit voorbeeld is $W_1 * W_2 = (00010)_2 = 2$

7. Analoog vinden we:$W_2 * W_1 = 0$, $W_1 * W_1 = (10000)_2 = 16$ en $W_2 * W_2 = (10010)_2 = 18$.

4.2 De verwachte stoptijden en kansen

Hieronder volgen de resultaten die J.Conway wist te bewijzen:

Stelling 4.1. $t = E(T(W_1)) = W_1 * W_1$

Het verwacht aantal pogingen vooraleer W_1 te voorschijn komt vanaf het moment dat W_2 verschenen is noteren we $E(T_{1|2})$.

Stelling 4.2. $E(T_{1|2}) = W_1 * W_1 - W_2 * W_1$ *en* $E(T_{2|1}) = W_2 * W_2 - W_1 * W_2$

Stelling 4.3. $P(W_1 < W_2) = \dfrac{W_2 * W_2 - W_2 * W_1}{W_1 * W_1 + W_2 * W_2 - W_1 * W_2 - W_2 * W_1}$

Als speler A het woord W_1 kiest en speler B het woord W_2, dan worden de odds van speler 2 ten opzichte van speler 1 gegeven door :

Stelling 4.4. *odds van B t.o.v. A* $= \dfrac{W_1 * W_1 - W_1 * W_2}{W_2 * W_2 - W_2 * W_1}$

1. Controleren we een aanntal resultaten van drieletterrijtjes. Neem $W_1 = MKM$ en $W_2 = MKK$, dan is $W_1 * W_1 = (1010)_2 = 8 + 2 = 10$ en dus geldt: $t(MKM) = 10$. Ook is $W_2 * W_2 = (1000)_2 = 8$, dus $t(MKK) = 8$. Verder zijn $W_1 * W_2 = 2$ en $W_2 * W_1 = 0$, dus is $P(MKM < MKK) = \dfrac{8 - 0}{10 + 8 - 0 - 2} = \dfrac{1}{2}$.

2. Onderzoeken we nu het MMM-probleem :We examine the process of repeatedly flipping a fair coin. Any such coin flip will result in Heads (H) or Tails (T)with probability 0.5 each. The results of these flips are registered one by one, which leads to a sequence consisting of H's and T's. In this problem we are specifically interested in the code made up by the last 5 results.

   (a) What is the expected (average) number of flips needed to reach the code HHTTH for the first time?

   (b) What is the expected (average) number of flips needed to reach the code HTTHT for the first time?

   (c) What is the probability that the code HHTTH appears sooner than HTTHT in the sequence of coin flips?

3. Noteer $W_1 = HHTTH$ en $W_2 = HTTHT$, dan is $W_1 * W_1 = (100010)_2 = 34$ en $W_2 * W_2 = (100100)_2 = 36$ zodat $t(HHTTH) = 34$ en $t(HTTHT) = 36$, wat de eerste twee vragen beantwoordt.

4. Verder is $W_1 * W_2 = (010010)_2 = 18$ en $W_2 * W_1 = 0$, zodat $P(HHTTH < HTTHT) = \dfrac{36 - 0}{36 + 34 - 18 - 0} = \dfrac{9}{13} \approx 69\%$. Dit is het antwoord op de derde vraag.