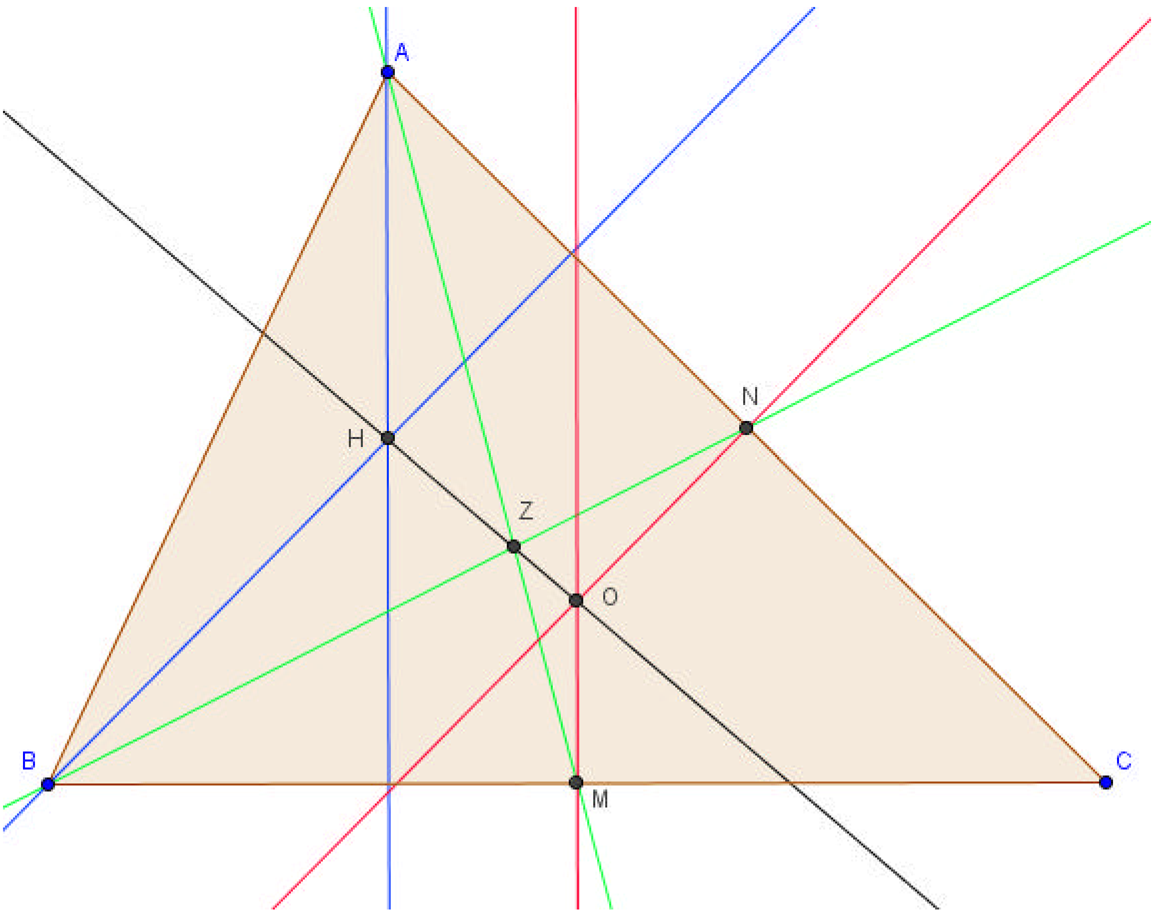
DE RECHTE VAN EULER

Stelling.

In een willekeurige driehoek liggen het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z en het middelpunt O van de omgeschreven cirkel op één rechte (rechte van Euler). Bovendien is |HZ| = 2|ZO| .



Eerste bewijs.

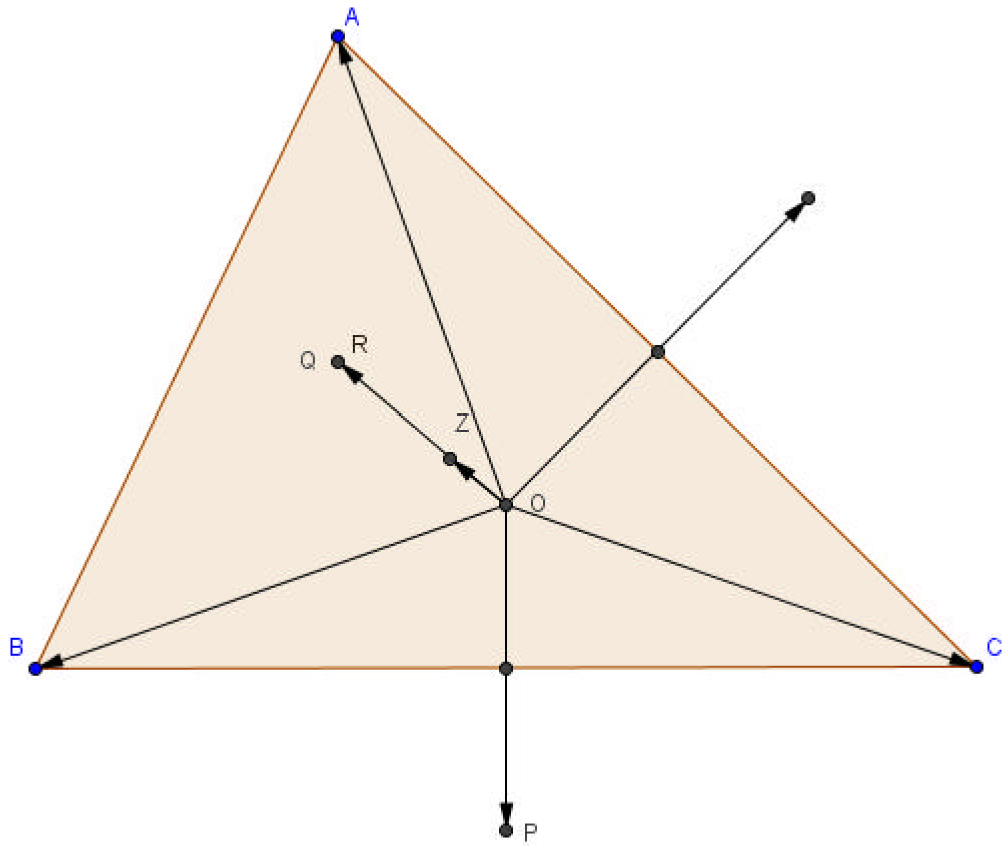
Beschouw de homothetie met centrum Z en factor - ½.

Door deze homothetie gaat het punt A over in met midden M van de zijde [BC] (immers |AZ|= 2|ZM|) en analoog gaat het punt B over in het midden N van [AC]. Omdat een rechte via een homothetie overgaat in een evenwijdige rechte zal de hoogtelijn uit A overgaan in de middelloodlijn van [BC]. Analoog zal de hoogtelijn uit B overgaan in de middelloodlijn van [AC]. Bijgevolg zet deze homothetie het hoogtepunt H over in het middelpunt O van de omgeschreven cirkel.

Hieruit volgt dat H, Z en O collineair zijn en dat |HZ| = 2|ZO|.

Tweede bewijs.

Dit is een eenvoudig bewijs met behulp van vectoren.



Stel $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
Dan ligt P op de middelloodlijn van [BC] (OBPC is een ruit).

Stel $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
Dan ligt Q op de hoogtelijn uit A (AQPO is een parallellogram). (1)

Via een analoge redenering met $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ vindt men dat R op de hoogtelijn ligt uit B. (2)

Uit (1) en (2) volgt dan direct dat Q = R en dit is meteen ook het hoogtepunt H van ?ABC (snijpunt van twee hoogtelijnen), zodat $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. (3)

Bovendien is $\overrightarrow{OZ} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ (definitie van het zwaartepunt). (4)

Uit (3) en (4) volgt dan dat $\overrightarrow{OZ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ en dus zijn de punten O, Z en H collineair en is $\dfrac{|ZO|}{|ZH|} = \dfrac{1}{2}$.