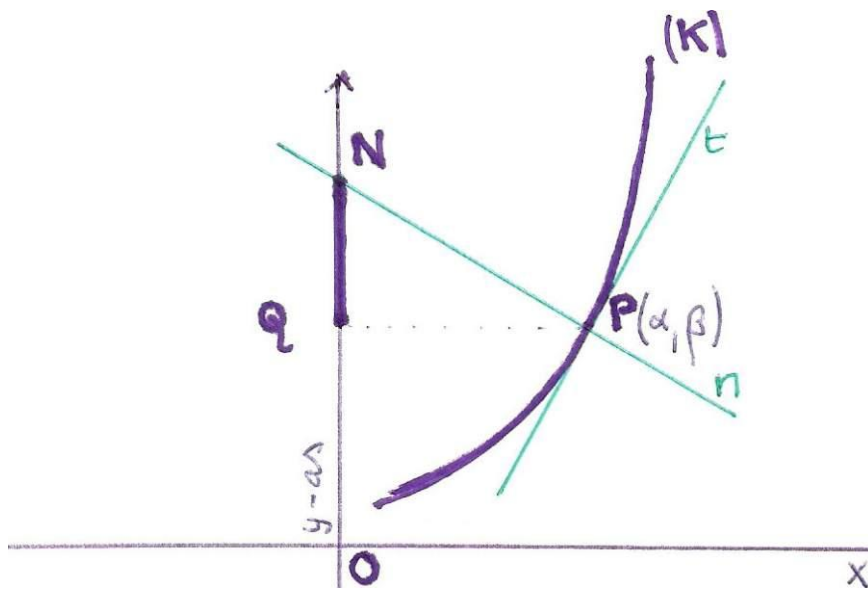


DE SUBNORMAAL

Inhoud: Starten doen we met de definitie van de subnormaal in een punt van een kromme. Daarna tonen we aan de subnormaal in elk punt van een parabool $y = ax^2$ constant is. We eindigen met de vraag naar de vergelijking van alle krommen met constante subnormaal. Dit geeft aanleiding tot een eenvoudige differentiaal-vergelijking.



Definitie. Zij $P(\alpha, \beta)$ een punt van de kromme (K) . Zij Q de projectie van P op de y -as en N het snijpunt van de normaal in P met de y -as. Dan is het lijnstuk QN de subnormaal van (K) in P .

Eigenschap. De parabool $y = ax^2$ heeft een constante subnormaal.

Zij $P(\alpha, \beta)$ een punt van de parabool. Dan is $Q(0, \beta)$. De vergelijking van de normaal in $P(\alpha, \beta)$ is:

$$y - \beta = -1/y'(a) \cdot (x - a) \quad (1) \quad \text{of} \quad y - \beta = -1/(2a \cdot a) (x - a)$$

Het snijpunt van de normaal met de y -as, vinden we door $x=0$ te stellen en y te berekenen. Er komt $y = \beta + 1/(2a)$. En dus is $|QN| = \beta + 1/(2a) - \beta = 1/(2a)$.

Dit is een constante, want onafhankelijk van a .

Probleem. Bepaal alle krommen met constante subnormaal.

Uit (1) volgt dat de lengte van de subnormaal in P aan (K) gelijk is aan $a/y'(a)$.

Stelt men nu dat die lengte een constante c moet zijn dan ontstaat de differentiaalvergelijking $x/y'(x) = c$ of $y'(x) = x/c$. Na integreren van beide leden: $y = x^2/(2c) + c'$. Stelt men $1/(2c) = a$ dan komt er $y = ax^2 + c'$.

Dus alleen de parabolen van de vorm $y = ax^2$ (op een verschuiving evenwijdig met de y-as na) hebben een constante subnormaal.

Oefening. Bepaal de vergelijking van de krommen waarvan de normaal in elk punt door de oorsprong $O(0,0)$ gaat.

Door uit te drukken dat de normaal in elk punt van een kromme $y = f(x)$ door O gaat, ontstaat de differentiaalvergelijking:

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0 \quad \text{waaruit} \quad x^2/2 + y^2/2 = c \quad \text{of} \quad x^2 + y^2 = 2c \quad (c > 0).$$

Dit is de vergelijking van een familie cirkels met $O(0,0)$ als middelpunt.

Als men in de opgave nog een punt geeft waar de kromme door moet gaan, dan wordt c bepaald en kent men ook de staal van de cirkel.

Oefening. Bepaal de vergelijking van de krommen waarvan de raaklijn in een willekeurig punt $P(a,\beta)$ de y-as snijdt in $(0, -\beta)$.

(dit is meteen een eenvoudige constructie voor de raaklijn)