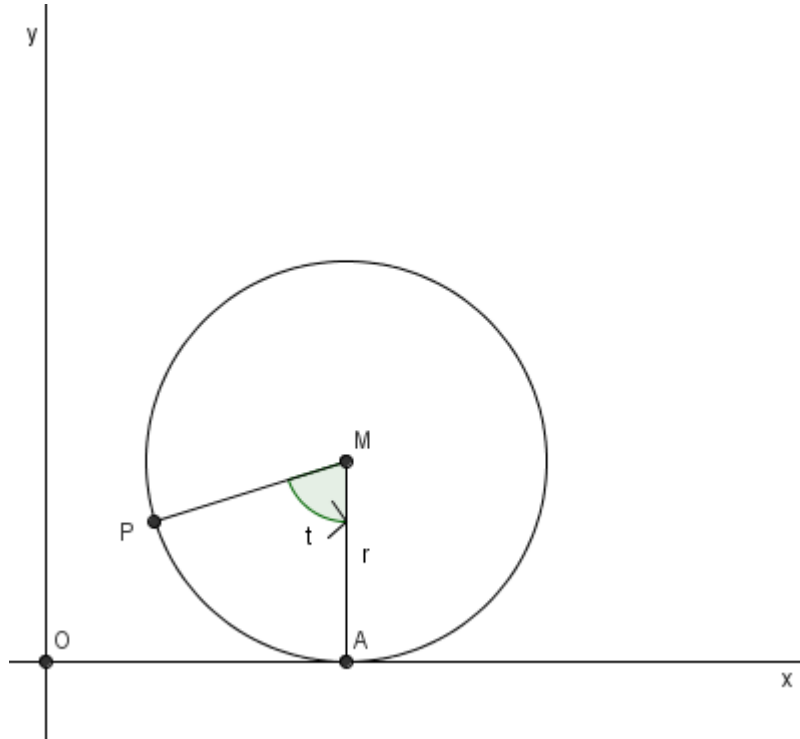


De cycloïde

1. Parametervergelijkingen



Een cirkelvormig wiel met straal r rolt zonder glijden over een rechte lijn. We volgen hierbij de baan van een punt P . Op de bovenstaande figuur is het wiel over een hoek t vooruit gerold en het punt P bevond zich dus oorspronkelijk in de oorsprong O .

De boog $\overline{AP}$ is dan even lang als het lijnstuk $[OA]$: $|OA| = r t$.

Met behulp van de optelling van vectoren bekomen we dat

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}.$$

Voor de coördinaten van deze vectoren geldt:

$$\text{co}(\overrightarrow{OP}) = (x, y)$$

$$\text{co}(\overrightarrow{OA}) = (r t, 0)$$

$$\text{co}(\overrightarrow{AM}) = (0, r)$$

$$\text{co}(\overrightarrow{MP}) = (-r \sin t, r \cos t).$$

Hieruit volgen direct de parametervergelijkingen van de cycloïde:

$$x = r t - r \sin t = r (t - \sin t)$$

$$y = r - r \cos t = r (1 - \cos t).$$

2. Lengte van één boog van een cycloïde

Wanneer t varieert van 0 tot 2π , beschrijft het punt P één volledige boog van de cycloïde.

Met behulp van een bepaalde integraal berekenen we de lengte l van deze boog.

We gebruiken de formule voor de booglengte van een kromme die via parametervergelijkingen wordt beschreven:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Hierbij is

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = r \sin t,$$

zodat

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= r \sqrt{2 - 2\cos t} \\ &= r \sqrt{2(1 - \cos t)} \\ &= r \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= 2r \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Dan is

$$l = \int_0^{2\pi} 2r \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4r \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = (-4r \cdot (-1) - (-4r \cdot 1)) = 8r.$$