

Mijn pi-formule

Een alternatieve elegante formule om de waarde van pi te berekenen

Dr. Luc Gheysens

2011-09-11

Op <http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html> vind je een aantal formules voor het getal pi. Wij stellen hier een alternatieve formule voor. Voor zover we hebben kunnen nagaan is deze formule niet eerder gepubliceerd.

$$\pi = \frac{4}{1} \cdot \frac{2+3}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3+3^3}{6^3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2^5+3^5}{6^5} - \frac{4}{7} \cdot \frac{2^7+3^7}{6^7} + \dots$$

m.a.w.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{2n+1} \cdot \frac{2^{2n+1} + 3^{2n+1}}{6^{2n+1}}$$

Hieronder staan enkele benaderingen afgedrukt waarbij het aantal termen in de som telkens toeneemt:

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{2+3}{6}$$

3.333333333

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{2+3}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3+3^3}{6^3}$$

3.117283950

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{2+3}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3+3^3}{6^3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2^5+3^5}{6^5}$$

3.145576131

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{2+3}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3+3^3}{6^3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2^5+3^5}{6^5} - \frac{4}{7} \cdot \frac{2^7+3^7}{6^7}$$

3.140850561

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{2+3}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3+3^3}{6^3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2^5+3^5}{6^5} - \frac{4}{7} \cdot \frac{2^7+3^7}{6^7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2^9+3^9}{6^9}$$

3.141741197

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{2+3}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3+3^3}{6^3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2^5+3^5}{6^5} - \frac{4}{7} \cdot \frac{2^7+3^7}{6^7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2^9+3^9}{6^9} - \frac{4}{11} \cdot \frac{2^{11}+3^{11}}{6^{11}}$$

3.141561587

$$\sum_{n=0}^{99} (-1)^n \cdot \frac{4}{2 \cdot n + 1} \cdot \frac{2^{2 \cdot n + 1} + 3^{2 \cdot n + 1}}{6^{2 \cdot n + 1}}$$

3.141592653

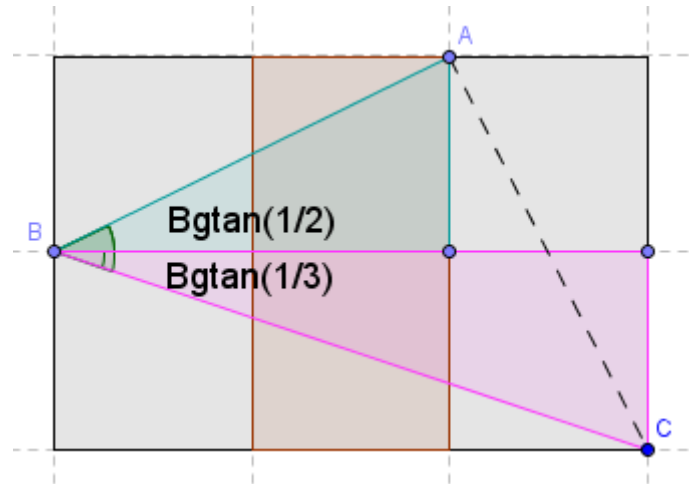
Bewijs van de formule.

We maken gebruik van twee gekende resultaten.

Resultaat 1.

$$Bgtan\left(\frac{1}{2}\right) + Bgtan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

Hiervoor vind je op de onderstaande figuur een ‘bewijs zonder woorden’ . Kan je dit verklaren? Hint. Driehoek ABC is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.



Resultaat 2.

Formule van MacLaurin voor $y = Bgtan x$:

$$\begin{aligned} Bgtan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Door in formule (2) x resp. te vervangen door de waarden $1/2$ en $1/3$ vind je uitdrukkingen voor $Bgtan(1/2)$ en $Bgtan(1/3)$. Substituteer die in (1) en zo bekom je de vooropgestelde formule voor het getal π .
