

# Redeneren en probleemoplossen



## ***Inhoud :***

1. Vooraf
2. Redeneren
3. Probleemaanpak
4. Problemen om aan te pakken



# Project: Redeneren en probleemoplossen

## Doelen:

- 1 Kennismaken met redeneervormen in (en buiten) de wiskunde.
- 2 Ontdekken waar en wanneer deze redeneervormen worden toegepast.
- 3 Een algemene oplossingsstrategie ontdekken en je eigen maken.

## Nodige voorkennis:

Alleen maar algemene wiskundige voorkennis, w.o. de stelling van Pythagoras, de *abc*-formule en enige algebraïsche vaardigheden.

## Vervolg:

Wat je in dit project leert is vooral een algemene oplossingsstrategie die bij veel wiskundige problemen is toe te passen. Bij alle volgende onderwerpen kun je daarvan gebruik maken. Soms is deze oplossingsstrategie ook buiten de wiskunde toepasbaar.

## Werkwijze:

De opgaven van de eerste twee paragrafen moet je zelfstandig proberen te maken, met uitzondering van de opgaven 19 en 20 die klassikaal worden besproken.

Paragraaf 3 doe je in groepjes van ongeveer vier personen. Je werkt dan aan de oplossing van een aantal problemen die je worden voorgeschoteld. Het gaat daarbij om de *manier* van oplossen. Je levert de oplossingen per groep in. Verder wordt er per groep een presentatie verwacht van de oplossing van één van deze problemen.

## Tijdschema:

Totale studielast: 12 uren.



## 0 Vooraf

Sherlock Holmes is het voorbeeld van de detective. Sir Arthur Conan Doyle bedacht in hem iemand die de meest ingewikkelde problemen ogenschijnlijk moeiteloos oploste. Zijn bescheiden:

*"Elementary, my dear Watson, a simple deduction"*

zijn bijna gevleugelde woorden geworden.

De manier waarop Sherlock Holmes werkt is ook eigenlijk vrij simpel:

Hij verzamelt eerst een grote hoeveelheid gegevens over het probleem dat hij moet oplossen; vervolgens komt hij op basis daarvan tot een werkhypothese. Zo'n hypothese is in zijn geval een veronderstelde manier waarop het misdrijf heeft plaatsgevonden. Daarna is het Holmes' taak om die hypothese te bewijzen. En dat bewijs is de 'simple deduction' waar Holmes zo graag over praat. Alleen zijn compagnon dr. Watson heeft oog voor het vele werk dat moet worden verzet om de gegevens te verzamelen.....

Als jij een probleem krijgt voorgeschoteld zit je in de positie van Sherlock Holmes.

Er zijn dan twee mogelijkheden:

1)

Het is een **bekend probleem** en je weet de oplossing al. Dat betekent dat je al van tevoren hebt geleerd, hoe je te werk moet gaan, bijvoorbeeld:

- bij het oplossen van een tweedegraads vergelijking gebruik je de techniek van ontbinden in factoren of de *abc*-formule;
  - bij het berekenen van lengte gebruik je de stelling van Pythagoras of wat goniometrie, of gelijkvormigheid;
  - vaak maak je gebruik van bekende formules als oppervlakte-formules, de wet van Ohm, de wetten van Newton, de stelling van Pythagoras, de wet van Archimedes, het economisch model van Keynes, de erfelijkheidswetten van Mendel, en wat dies meer zij.
- 2)

Het is **geen bekend probleem**, integendeel, het is voor jou volledig nieuw. En verzin dan maar eens een oplossing.....

Over met name dit tweede geval gaat dit project.

De belangrijkste woorden: **redeneren, werkhypothese, bewijs.**

We zullen proberen je een bepaalde **probleemaanpak** aan te leren. Daarmee kun je tenminste systematisch een probleem te lijf gaan. Vaak helpt dat, tenminste binnen de grenzen van je eigen creativiteit in het bedenken van mogelijkheden.

Bedenk daarbij wel, dat het vinden van die mogelijkheden vaak het meeste tijd kost.

Daarvoor moet je durven puzzelen en vooral doorzettingsvermogen tonen. De gouden regel bij problemen oplossen is simpelweg:

**GEEF NIET OP.**



# 1 Redeneren

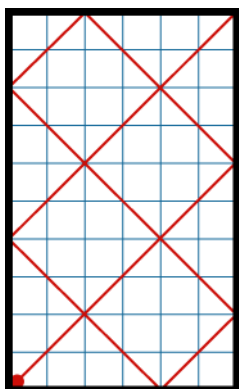
Je maakt in deze paragraaf kennis met twee belangrijke manieren van redeneren. Dat doe je aan de hand van een verzonnen biljartspel.

## Opgave 1

Schrijf in het kort op wat de strekking is van de tekst in paragraaf 0.

## Opgave 2

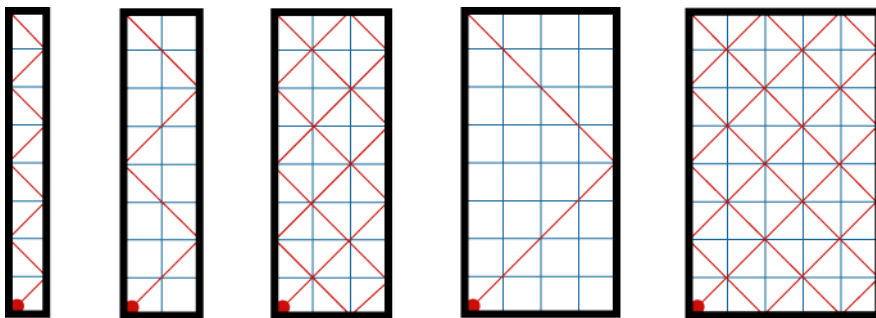
Je speelt biljart op tafels van verschillende afmetingen. Telkens stoot je de bal vanuit de linker benedenhoek onder een hoek van  $45^\circ$ . Hier zie je de bal bewegen over een tafel van 10 bij 6. De bal blijft uiteindelijk zitten in de rechter bovenhoek van het biljart.



- a. Teken een biljart van 10 bij 2 en doe hetzelfde. In welke hoek blijft de bal nu zitten?
- b. Doe hetzelfde bij een biljart van 10 bij 3.
- c. En nog eens bij een biljart van 10 bij 4.
- d. Zie je kans om enige regelmaat te ontdekken in de hoek waar de bal terecht komt?

## Opgave 3

Je speelt nu op een biljart met lengte 8; de breedte varieert weer. Bekijk deze plaatjes.



Welke conclusie trek je voor wat betreft de eindpositie van de bal?

## Opgave 4

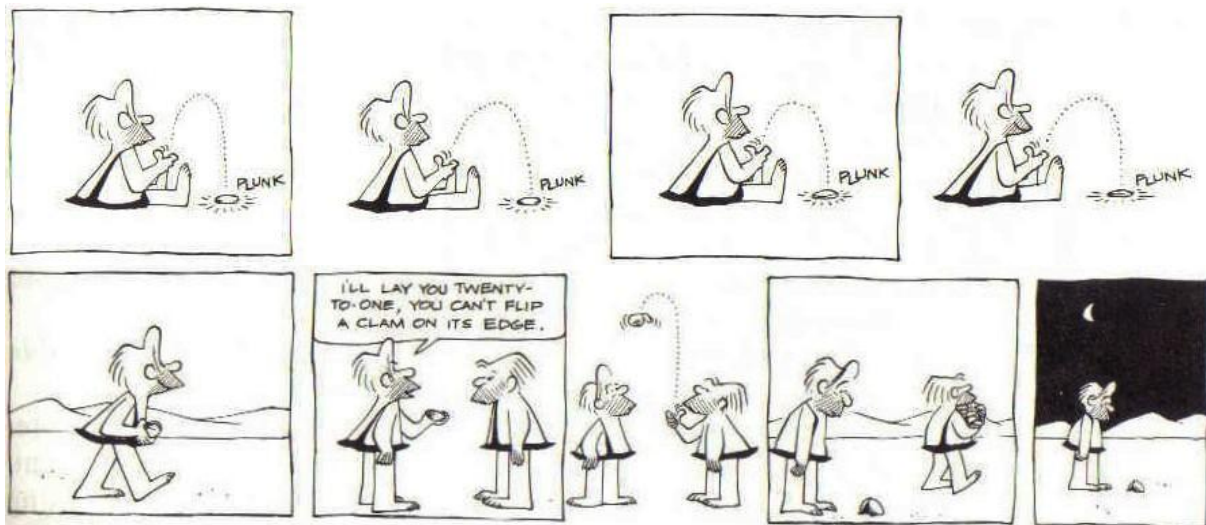
Je speelt weer op een biljart met lengte 8 zoals in opgave 3. Je hebt in die opgave vast wel een regel ontdekt voor de eindpositie van de bal.

- a. Klopt je regel ook voor een biljart van 8 bij 6?
- b. En voor een biljart van 8 bij 7?
- c. Geldt die regel dus altijd, denk je?
- d. Probeer eens een biljart van 8 bij 8. Is jouw regel nu nog steeds geldig?



## Opgave 5

Verklaar deze strip:



## Inductief redeneren

Bij het biljarten op een tafel van 8 bij  $a$  heb je door proberen van een aantal mogelijkheden (eerst 8 bij 2, dan 8 bij 3, dan 8 bij 4, enz.) een regeltje kunt afleiden voor de eindpositie van de bal.

In de strip in opgave 5 ontdekte iemand na eindeloos proberen dat zijn schelp niet op de kant wil blijven liggen na opgooien.

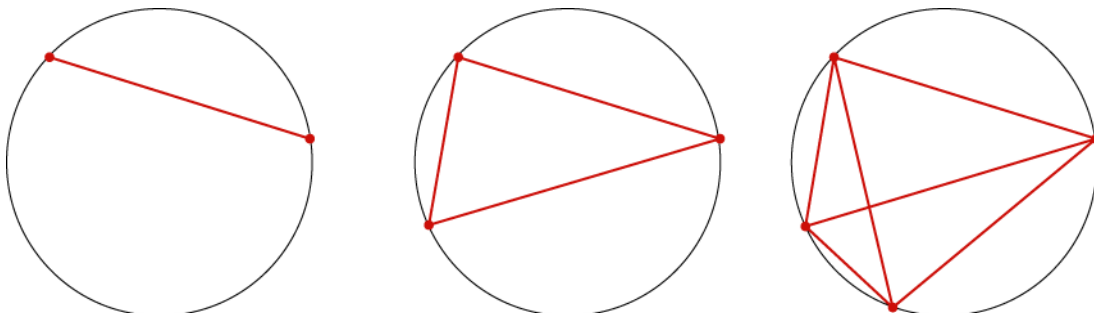
Deze manier van werken heet: **inductief redeneren**.

Bij inductief redeneren ga je proefondervindelijk te werk. Als een bepaalde regelmaat steeds blijkt uit te komen, ga je aannemen dat hij altijd wel geldig zal zijn: het wordt een regel.

In opgave 4 bij het biljarten en in de strip in opgave 5 wordt ook meteen het **risico van inductief redeneren** duidelijk: er kan een geval komen waarin onverwacht je regel niet meer op blijkt te gaan. Je moet hem dan bijstellen (indien mogelijk). Toch is inductief redeneren een heel belangrijke methode van werken.

## Opgave 6

Je ziet hier in een drietal tekeningen op hoeveel manieren punten op een cirkel met elkaar kunnen worden verbonden door rechte lijnstukjes.



a. Teken nu zelf het aantal mogelijkheden bij 5 punten op de cirkel.



- b. Hoeveel mogelijkheden zijn er bij 6 punten op de cirkel?
- c. Hoeveel mogelijkheden zijn er bij 100 punten op de cirkel?
- d. Kun je een algemene regel verzinnen?

### Opgave 7

Een reisbureau organiseert een busreis voor € 600,- per persoon. Een gezelligheidsvereniging schrijft met 40 mensen in, op voorwaarde dat er geen buitenstaanders in de bus komen. Er kunnen echter 52 mensen in de bus. Bij het reisbureau komt men op het volgende idee: de vereniging wordt aangeboden dat elke extra passagier voor iedereen een korting van € 10,- p.p. betekent. Laat zien, bij welk aantal extra passagiers dit aanbod voor het reisbureau het gunstigst is. Begin met 1 extra passagier, daarna 2, enzovoort...

### Opgave 8

Je hebt  $n$  verschillend gekleurde maar overigens gelijke kubussen. In hoeveel verschillende volgordes kun je die opstapelen?

- a. Neem eerst  $n = 2$  en beantwoord de vraag.
- b. Neem daarna  $n = 3$  en beantwoord de vraag.  
Neem ook nog  $n = 4$ .
- c. Probeer nu een algemene rekenregel te verzinnen.

### Opgave 9

In 1772 meende de Duitse astronoom Bode regelmaat te herkennen in de afstanden van de planeten tot de zon. In die tijd waren er nog maar zes planeten bekend. Bode maakte deze tabel, waarbij hij de afstand aarde - zon op 10 stelde.

| planeet   | relatieve afstand tot de zon | getallen van Bode |
|-----------|------------------------------|-------------------|
| Mercurius | 3,9                          | $0 + 4 = 4$       |
| Venus     | 7,2                          | $3 + 4 = 7$       |
| Aarde     | 10,0                         | $6 + 4 = 10$      |
| Mars      | 15,2                         | $12 + 4 = 16$     |
| ???       |                              |                   |
| Jupiter   | 52,0                         | $48 + 4 = 52$     |
| Saturnus  | 95,4                         | $96 + 4 = 100$    |

- a. Welke regelmaat meende Bode te zien?
- b. Tussen Mars en Jupiter staan vraagtekens. Welk getal hoorde er volgens de regelmaat van Bode bij die vraagtekens? Welke conclusie trok hij, denk je?
- c. In 1781 ontdekte William Herschel een zevende planeet, die men Uranus noemde. Welk getal zou er volgens de regelmaat van Bode bij Uranus moeten horen?
- d. De relatieve afstand van Uranus tot de zon bleek ongeveer 192 te zijn. Klopt dat redelijk met de regelmaat van Bode?
- e. Welk getal voorspelde Bode voor een volgende planeet voorbij Uranus?
- f. In 1846 werd Neptunus ontdekt, met een relatieve afstand van 301 eenheden. Gaat de regel van Bode nog op?

## Deductief redeneren

Herinner je je Sherlock Holmes nog?

Na het op een rijtje zetten van de gegevens kwam hij tot een *werkhypothese*. In feite past hij dan het inductief redeneren toe. Daarna echter ging Holmes zijn veronderstelling *bewijzen*. Dat deed hij door te laten zien hoe die veronderstelling noodzakelijkerwijs volgt uit zaken waarvan we zeker weten dat die waar zijn.

Dat noem je: **deductief redeneren**.

Deductie is een manier van redeneren die vooral in de wiskunde veel wordt toegepast. De hele wiskundige kennis wordt zo in elkaar gepast als een stelsel van regels en formules die allemaal af te leiden zijn uit een klein aantal vaststaande feiten (of tenminste feiten waarvan we in bepaalde omstandigheden mogen aannemen dat ze zeker waar zijn).

Zo'n afleiding noem je een **bewijs**.

Een bewijs is dus een deductieve redenering.

### Opgave 10

Kijk naar opgave 6.

Je gaat nu de gevonden regelmaat bewijzen. Schrijf het volledige bewijs op aan de hand van de antwoorden op deze vragen.

- Hoeveel lijnen kun je vanuit 1 punt trekken naar alle anderen als er  $n$  punten zijn?
- Hoeveel lijnen krijg je dus vanuit  $n$  punten?
- Hoezo heb je nu elke lijn dubbel geteld?

### Opgave 11

Kijk naar opgave 8.

Je hebt hopelijk ontdekt dat bij bijvoorbeeld 10 verschillend gekleurde kubusjes het aantal volgordes te berekenen is op deze manier:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Probeer die rekenmethode te bewijzen door deze redenering af te maken:

- Voor het eerste kubusje heb ik nog keuze uit ...
- Bij elke mogelijkheid voor de eerste kubus heb ik voor de tweede kubus nog keuze uit ...
- Dus heb ik al ...  $\cdot$  ... mogelijkheden.
- Bij elk van die mogelijkheden heb ik voor de derde kubus nog ...
- Enzovoorts ...
- En in het algemeen voor  $n$  kubussen ...

### Opgave 12

Een puzzeltje: Kies een getal. Tel er vijf bij op, verdubbel de uitkomst, trek daar weer vier van af en deel het resultaat door twee.

Ik weet al wat je er uit krijgt: 3.

Knap hè?

(Nee natuurlijk niet sufferd, dat getal komt er altijd uit, waar je ook mee begint!)

**a.** Kies als begingetal 4. Kijk maar eens of je echt op 3 uitkomt.

**b.** Probeer er nog maar een paar andere begingetallen.

**c.** Hoewel het steeds lukt, heb je nog geen bewijs geleverd.

Dat doe je bijvoorbeeld door te beginnen met begingetal  $n$ .

Toon aan, dat er ook nu 3 uitkomt.

**d.** Waarom heb je nu pas een echt bewijs geleverd?

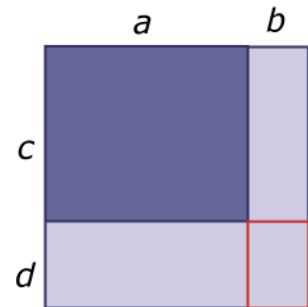


**Opgave 13**

Het plaatje stelt een rechthoek voor die in vieren is verdeeld. Redeneer nu met oppervlaktes en leg uit waarom je zo kunt bewijzen dat:

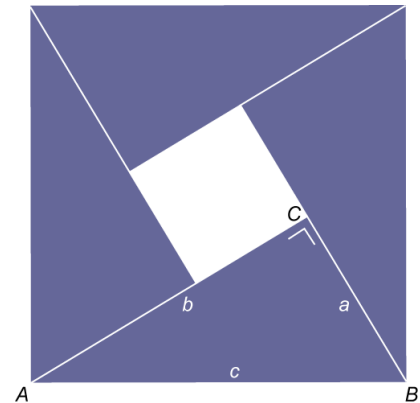
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Leg ook uit waarom je bewijs niet volledig is.

**Opgave 14**

Redeneer met oppervlaktes in deze figuur. Bewijs de stelling van Pythagoras in  $\triangle ABC$ :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Opgave 15**

Drie golfers, Tom, Dick en Harry genaamd, lopen achter elkaar terug naar hun clubgebouw. De voorste zegt: "De golfer achter mij is Harry." De middelste zegt: "Ik heet Dick." En de achterste golfer beweert: "Tom loopt in het midden."

Tom, de beste golfer van de drie, spreekt altijd de waarheid. Dick spreekt af en toe de waarheid, maar Harry, de slechtste golfer, liegt altijd. Wie is Tom, wie is Dick en wie is Harry? Schrijf je redenering op.

**Opgave 16**

Stel je hebt twaalf op het oog precies gelijke massieve gewichten. Eén van die gewichten is echter een heel klein beetje zwaarder òf een heel klein beetje lichter dan de elf andere. Je hebt de beschikking over een eenvoudige balans.

Beredeneer dat je met behulp van drie wegingen kunt bepalen welke van de gewichten afwijkend is.

**Opgave 17**

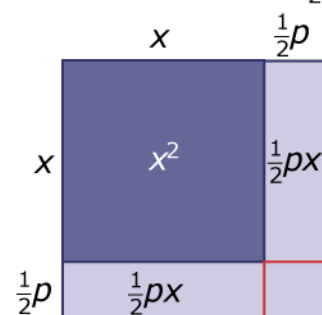
Jan zegt dat je eenvoudig kunt laten zien dat vermenigvuldigen en optellen hetzelfde is:  $2 + 2$  heeft immers dezelfde uitkomst als  $2 \times 2$ .

Welke redeneerfout maakt Jan?

**Opgave 18**

De oplossingen van de vergelijking:  $x^2 + px + q = 0$  kun je vinden met behulp van deze figuur. Bepaal eerst de oplossingen van deze vergelijking en bewijs dan de *abc*-formule.

$$x^2 + px + \dots = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2$$



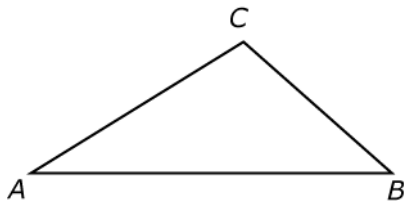
## 2 Probleemaanpak

Het oplossen van problemen is echt detective-werk, tenminste als je niet al van tevoren weet wat de oplossing is. De beste manier om dat te doen, is jezelf de juiste vragen stellen (en er antwoorden bij proberen te verzinnen, natuurlijk!). Inductief en deductief redeneren spelen daarbij een rol.

Die probleemaanpak kun je in het nu volgende voorbeeld terugvinden.

### Vierkant in driehoek

Probleemstelling: Teken in deze driehoek een vierkant, waarvan twee hoekpunten op de langste zijde liggen en de andere twee hoekpunten op de twee andere zijden liggen. Probeer een methode te ontdekken, die in elke driehoek werkt.



#### Opgave 19

Denk eerst maar eens goed na of je de oplossing zelf kunt vinden. De probleemaanpak:

- Zet eerst de gegevens eens op een rijtje:  
Vierkant  $PQRS$ . De punten  $P$  en  $Q$  komen op  $AB$ , punt  $R$  moet op .....
- Is het mogelijk om aan alle eisen ( $PQRS$  is vierkant en alle hoekpunten op de juiste zijde) te voldoen, denk je?
- Probeer eerst eens aan een deel van de eisen tegemoet te komen (gebruik het werkblad): Teken  $PS$  met  $P$  op  $AB$  en  $S$  op  $AC$  en maak vierkant  $PQRS$  af. Hoekpunt  $R$  ligt nu vast niet op  $BC$ , of je hebt wel erg veel geluk gehad.
- Probeer zo nog een paar vierkanten te tekenen. (inductief redeneren!)
- Welke eigenschap hebben nu al die "losse" hoekpunten  $R$ ? (werkhypothese!)
- Hoe kun je die eigenschap gebruiken om het probleem op te lossen? (oplossingsstrategie!)
- Los nu het probleem op.
- Beschrijf nu hoe je dit probleem in een willekeurige driehoek kunt oplossen.

#### Opgave 20

Je hebt nu het probleem opgelost, denk je .....

Kijk maar eens naar de figuur.  $P'Q'R'S'$  is de gezochte oplossing. Je tekent eerst vierkant  $PQRS$  en vervolgens trek je lijn  $AR$  net zolang door tot hij zijde  $BC$  snijdt in punt  $R'$ .

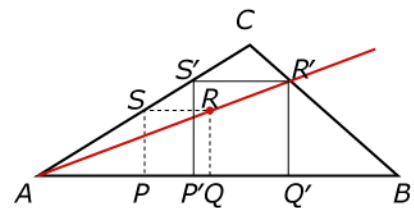
Je kunt dan eenvoudig vierkant  $P'Q'R'S'$  tekenen.

Bij deze oplossing neem je dus aan, dat alle 'losse'

hoekpunten  $R$  op een rechte lijn door  $A$  liggen, maar is dat nu wel echt zo?

Het lijkt er in opgave 19 wel veel op, maar echt bewezen heb je dat niet. Je moet nog aantonen (door een deductieve redenering) dat  $P'Q'R'S'$  inderdaad echt een vierkant is.

- Probeer eerst zelf maar eens of je het bewijs kunt vinden. Maak gebruik van gelijkvormigheid.
- Bij opgave 19c,d,e redeneerde je inductief, in opgave 20 moet je deductief redeneren. Verklaar het nut van beide redeneervormen bij het oplossen van dit probleem.



## Aanpak bij probleemoplossen

De manier waarop je bezig bent geweest met het oplossen van het probleem van het vierkant in de driehoek is in veel situaties bruikbaar.

In dit schema zie je hoe probleem oplossen in zijn werk kan gaan:

### Probleemoplossen in schema

#### A ANALYSE

Je probeert het probleem goed te begrijpen.

Onderstreep belangrijke stukken in de tekst; stel jezelf vragen als:

- \* Wat wordt er gevraagd, kan ik dat in eigen woorden zeggen?
- \* Heb ik alle gegevens goed op een rijtje, bijvoorbeeld in een tekening of schema?
- \* Heb ik het gevraagde goed in tekening of schema aangegeven?
- \* Aan welke voorwaarden moet het gevraagde voldoen?
- \* Kan ik het antwoord al van te voren schatten?

#### A AANPAK

Je gaat d.m.v. zoekgedrag je aanpak bepalen.

Stel jezelf vragen als:

- \* Welke theorie hoort er bij een dergelijk probleem?
- \* Is het een bekend probleem, of ken ik een probleem dat er op lijkt?
- \* Kan ik het probleem vereenvoudigen (eenvoudiger getallen kiezen b.v.)?
- \* Kan ik een paar situaties tekenen, of een paar getallenvoorbeelden doorrekenen?
- \* Heb ik daarbij alle gegevens gebruikt, of zijn er nog verdere gegevens?
- \* Als ik maar aan een deel van de eisen kan voldoen, hoe kan het gevraagde dan nog variëren?
- \* Kan ik nu een oplossingsmethode verzinnen?

#### B BEWERKEN

Je gaat nu je oplossingsmethode uitvoeren. Controleer elke stap op juistheid en probeer die juistheid aan te tonen door deductieve redenering. Werk zo overzichtelijk mogelijk.

#### C CONTROLE

Je gaat na of het probleem volledig is opgelost en of je er iets van moet onthouden voor volgende problemen. Stel jezelf vragen als:

- \* Klopt het resultaat met mijn schatting?
- \* Hoe kan ik het resultaat verder nog controleren?
- \* Ben ik op de goede manier met eventuele afrondingen omgegaan?
- \* Heb ik de juiste eenheden gebruikt?
- \* Wat kan ik van deze oplossing leren?

Natuurlijk leer je zo'n oplossingsstrategie niet uit het hoofd. Onthoud wel de vier kernwoorden: **analyse**, **aanpak**, **bewerken** en **controle**. In deze volgorde kun je altijd een nieuw probleem aanpakken. Een garantie voor het vinden van de oplossing heb je dan nog niet, maar je hoeft tenminste ook niet met één groot vraagteken op je voorhoofd achterover te leunen.

In de volgende twee opgaven wordt deze probleemaanpak in de vraagstelling zichtbaar. Werk die daarom zorgvuldig door en bekijk vooral de manier van werken goed.



### Opgave 21

Joop Snelle is een naam op het gebied van schoenen. Hij maakt modellen die beroemd zijn om hun soepele veerkracht. Zijn verkoopcijfers stijgen zo snel, dat hij reikhalzend uitzielt naar de bouw van een enorme fabriekshal. Voor zijn plannen heeft hij een rechthoekige hal van  $1000 \text{ m}^2$  vloeroppervlak nodig. Bij het indienen van de aanvraag tot aankoop van een lap grond, waarop die hal gebouwd kan worden, eist de gemeente van hem, dat hij - met het oog op de omwonenden - groenstroken om het bouwveld aanbrengt. Aan de voorkant tenminste 20 m breed en aan zij- en achterkant minstens 10 m breed. Snelle heeft begrip voor die eis, maar wil toch zo min mogelijk geld aan het bouwterrein uitgeven en vraagt zich daarom af, welke afmetingen een rechthoekig bouwterrein van minimale oppervlakte heeft, dat toch aan de eisen voldoet. Dit probleem ga je voor Snelle oplossen.

- Zet alle gegevens op een rijtje. Maak daartoe een schets van de situatie met die gegevens er in.
- Je werkt met gehele getallen voor de verlangde afmetingen. Waarom is dat redelijk? Welke afmetingen zijn mogelijk?
- Leg uit, waarin het probleem precies gelegen is.
- Neem voor de lengte van de fabriekshal 1 m. Hoe lang is dan het terrein? En hoe breed? Hoe groot is in dat geval de oppervlakte van het beoogde terrein?
- Probeer nu eens verschillende lengtes voor de fabriekshal. Maak een tabel waarin lengte fabriekshal, lengte terrein, breedte terrein en oppervlakte terrein voorkomen.
- Waarom begin je liever met de lengte van de fabriekshal en niet met die van het terrein?
- Is het probleem op te lossen, denk je?
- Je gaat nu een formule opstellen. Neem voor de lengte van de fabriekshal de letter  $x$ . Stel een formule op voor de totale oppervlakte van het aan te kopen bouwterrein. Kijk eventueel naar de manier waarop je de tabel hebt gemaakt.
- De oppervlakte van het terrein is nu een functie van  $x$ . Teken op mm-papier de grafiek van die functie. (Werk nauwkeurig; breid je tabel zo ver mogelijk uit.)
- Bij welke waarde van  $x$  is de oppervlakte van het terrein zo klein mogelijk? Welke afmetingen zet Joop Snelle nu op zijn aanvraag-formulier?
- Kun je je antwoord controleren? Hoe?
- Wat leer je van deze oplossingsmethode?

### Opgave 22

Gegeven zijn de functies  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  en  $g(x) = x + 1$ .

$A$  en  $B$  zijn de snijpunten van de grafieken van  $f$  en  $g$ .

Tussen  $A$  en  $B$  ligt op de grafiek van  $f$  een punt  $P$  en op de grafiek van  $g$  een punt  $Q$  waarvoor geldt:

- $P$  en  $Q$  hebben dezelfde  $x$ -coördinaat;
- de lengte van lijnstuk  $PQ$  is zo groot mogelijk.

Bepaal de coördinaten van  $P$  en  $Q$ .

Ook dit (zuiver wiskundige) probleem ga je stap voor stap oplossen.

- Teken de grafieken van  $f$  en  $g$  in één figuur en zet alle gegevens er in. Bereken beide snijpunten  $A$  en  $B$ .
- Kies voor  $P$  de  $x$ -coördinaat 2 en bepaal de lengte van  $PQ$ .
- Herhaal dit voor andere  $x$ -waarden van  $P$ .
- Welke waarden kan de  $x$ -coördinaat van  $P$  aannemen?
- Denk je dat het probleem oplosbaar is? Schat de grootste mogelijke lengte van  $PQ$ .
- Je gaat nu een formule opstellen voor de lengte van  $PQ$ . Neem voor de  $x$ -waarde van punt  $P$  de letter  $k$ . Druk de coördinaten van  $P$  en  $Q$  in  $k$  uit.
- Druk de lengte van  $PQ$  in  $k$  uit.
- Bepaal de waarde van  $k$  waarvoor van de lengte van  $PQ$  maximaal is.
- Los nu het probleem op.
- Hoe kun je je oplossing controleren?



### 3 Problemen om aan te pakken

Nu mag je aan de slag zonder hulpvragen en hulpopdrachten. Die moet je zelf verzinnen. Geef uitgebreid weer hoe je aan het antwoord bent gekomen. Denk daarbij aan het schema voor probleemoplossen.

Het is nuttig om in groepjes van ongeveer vier personen aan de oplossingen te werken. Je leert van elkaar; concentreer je op de manier van oplossen.

#### Opgave 23

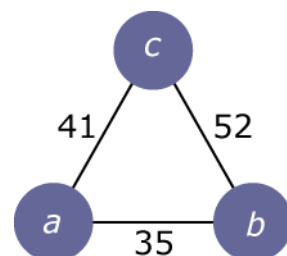
Maak eerst voor jezelf een beknopte samenvatting van wat je hebt geleerd.

#### Opgave 24

Een boer heeft een wolf, een geit en een kool die hij over een rivier wil zetten. Ongelukkigerwijze heeft hij alleen maar een bootje waarin naast hemzelf maar één van deze drie bezittingen kan worden vervoerd. De wolf eet echter de geit op als de boer er niet bij is en de geit eet de kool op als de boer er niet bij is. Hoe krijgt deze boer alle drie onbeschadigd naar de overkant?

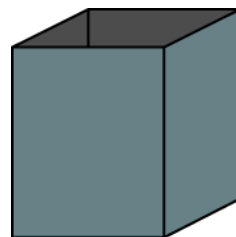
#### Opgave 25

De getallen in deze figuur vormen steeds de som van de variabelen die door het lijnstuk worden verbonden. Bereken de waarde van  $a$ ,  $b$  en  $c$ .



#### Opgave 26

Iemand heeft  $12 \text{ m}^2$  staalplaat. Daarmee wil hij een zuiver rechthoekige bak zonder deksel maar met een bodem maken. Later wordt er van ander materiaal een deksel op gemaakt. Die bak moet een zo groot mogelijke inhoud hebben. De bodem wordt vierkant. Welke afmetingen zal hij deze bak geven?



#### Opgave 27

Drie matrozen stranden na een schipbreuk op een onbewoond eiland waar het enige voedsel bestaat uit kokosnoten. Zij verzamelen een grote hoeveelheid kokosnoten en besluiten eerst een tukje te doen alvorens de stapel in drie gelijke delen te verdelen. Eén van de zeelieden wordt wakker en besluit zijn deel vast in te pikken, want zijn kameraden zijn niet te vertrouwen. Hij ontdekt dat, als hij één kokosnoot weggooit, de stapel precies in drie gelijke delen is te verdelen. Hij begraaft daarop zijn deel en slaapt weer gerust in. Nummer twee wordt wakker en doet precies hetzelfde: één kokosnoot gooit hij weg, waarna de stapel weer precies in drie gelijke delen is te verdelen. Hij begraaft zijn deel en slaapt als een blok in. Tenslotte doet matroos nummer drie hetzelfde nog eens en ook hij valt daarop in slaap. Wanneer de drie zeelui enkele uren later de overgebleven stapel (hele) kokosnoten bekijken, ontstaat er natuurlijk een fikse ruzie. Hoeveel kokosnoten moeten zij oorspronkelijk hebben verzameld om na de beschreven nachtelijke taferelen nog een geheel aantal over te houden?

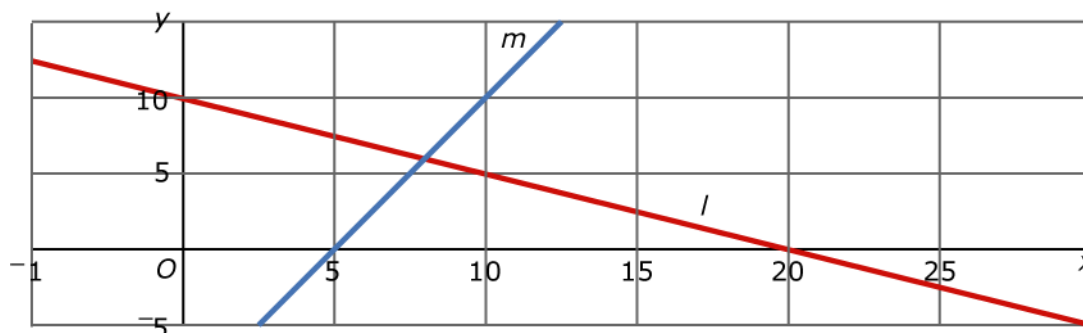
### Opgave 28

Een vliegtuig vliegt van Amsterdam naar Moskou met een gemiddelde snelheid van 800 km/uur. Op de terugweg heeft het de wind tegen en haalt het niet meer dan 600 km/uur. Er van uitgaande dat de heenreis even lang is als de terugreis, hoe groot is dan de gemiddelde snelheid van het vliegtuig gerekend over de hele vlucht heen en terug?

\*Leid een formule af voor die gemiddelde snelheid als de gemiddelde snelheid van de heenreis  $x$  km/uur en op de terugreis  $y$  km/uur is.

### Opgave 29

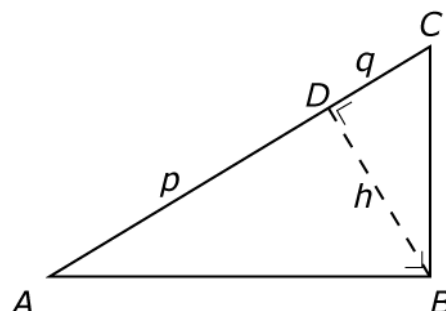
In de figuur zijn  $l$  en  $m$  twee rechte lijnen met daarop de punten  $A$  en  $B$ . De  $y$ -coördinaten van deze beide punten zijn gelijk, het verschil van hun  $x$ -coördinaten is 6. Bepaal de coördinaten van  $A$  en  $B$ . Probeer meerdere oplossingsmethoden te bedenken.



### Opgave 30

Bewijs dat het kwadraat van de lengte van de hoogtelijn op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek gelijk is aan het produkt van de lengtes van de delen waarin hij die schuine zijde verdeelt:

$$h^2 = p \cdot q$$



### Opgave 31

Een rechte lijn heeft als vergelijking  $3x - 4y + 25 = 0$ .

Hoe groot is de kortste afstand van de oorsprong van het assenstelsel tot deze lijn?

\* Leid een formule af voor de kortste afstand van de oorsprong van het assenstelsel tot de lijn met vergelijking:  $ax + by + c = 0$ .

### Opgave 32

Bereid met je groepje de klassikale bespreking van één van de opgaven 24 t/m 31 voor. Ga er daarbij van uit dat je toehoorders geen enkel begrip hebben van de wijze waarop het probleem moet worden opgelost en dat jullie ze dat uitgebreid moeten uitleggen. Ga daarom vooral ook in op de manier waarop je aan de oplossing bent gekomen. Misschien hebben jullie meerdere oplossingen gevonden, vertel daar dan ook iets over.

## ANTWOORDEN EN/OF HINTS

- 2** **a** In de rechter bovenhoek.  
**b** In de linker bovenhoek.  
**c** In de rechter benedenhoek.  
**d** Als je de lengte steeds 10 houdt, dan komt de bal bij oneven (gehele) waarden voor de breedte steeds linksboven en bij even waarden voor de breedte steeds rechts (onder bij viervouden, anders boven).
- 3** Het lijkt erop, dat de bal steeds linksboven terecht komt.
- 4** **a** Ja  
**b** Ja  
**c** Wel, wat denk je?  
**d** Nee!
- 6** **a** 10 lijnstukjes  
**b** 15 lijnstukjes  
**c** 4950 lijnstukjes
- 7** Bij 40 passagiers vind je 24.000 euro aan inkomsten; bij 41 passagiers wordt dat 24190 euro; bij 42 passagiers 24360 euro. De maximale inkomsten vind je bij 50 passagiers (dus 10 extra) en wel 25.000 euro.
- 8** **a** 2  
**b** 6; 24  
**c** het aantal mogelijkheden bij  $n$  stuks vind je door uit te rekenen:  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n$
- 9** **b** Het getal moest zijn: 28; Bode dacht dat er een nog onbekende planeet geweest was op die plaats.  
**c** 196  
**d** Dat klopt nog redelijk.  
**e** Volgens de regelmaat van Bode zou er 388 moeten komen; dat klopt niet meer zo goed.
- 12 d** Omdat je voor de variabele  $n$  elk begingetal kunt invullen.
- 13** De oppervlakte van de gehele rechthoek is:  $(a + b)(c + d)$ .  
Diezelfde oppervlakte is ook te krijgen door de oppervlaktes van de vier delen op te tellen:  
 $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ .  
Dus zijn beide uitdrukkingen hetzelfde, wat te bewijzen was.  
Maar hoe gaat het met negatieve getallen???
- 14** Redeneer nu net als in opgave 13 met de oppervlakte van de witte gedeelten van beide vierkanten.
- 15** De eerste is Tom, de middelste Harry en de laatste Dick. (Schrijf ook jouw redenering op!)
- 16** Begin met het verdelen van de gewichten in groepjes van vier en bij de tweede weging in groepjes van drie.
- 18** Eerst delen door  $a$  (denk om  $a \neq 0$ ), vervolgens een kwadraat afsplitsen.
- 19 a**  $P$  en  $Q$  op  $AB$ ,  $R$  op  $BC$  en  $S$  op  $AC$ .  
**e** Alle 'losse' hoekpunten moeten op één rechte lijn door  $A$  komen te liggen.  
**h** Teken één vierkant  $PQRS$  met  $P$  en  $Q$  op  $AB$  en  $S$  op  $AC$ .  
Trek dan lijn  $AR$  door tot hij  $BC$  snijdt, het snijpunt is dan een hoekpunt van het gevraagde vierkant.  
Dat is nu eenvoudig af te maken.
- 20 a** Laat zien, dat  $R'Q' = R'S' = S'P'$ . Gebruik daarbij de gelijkvormigheid van de driehoeken  $AQ'R'$  en  $AQR$  en van de driehoeken  $AS'R'$  en  $ASR$ .  
**b** Door proberen (inductief redeneren) kom je achter de oplossingsmethode, door een bewijs (deductief redeneren) laat je zien dat die methode correcte resultaten oplevert.
- 21 b** De lengte en de breedte van de hal kunnen van 1 t/m 1000 lopen.  
**d** Het terrein is dan 21 m bij 1030 m en de opp is  $21630 \text{ m}^2$ .  
**h**  $opp(x) = (20 + x)(30 + 1000/x)$   
**j**  $x \approx 26 \text{ m}$ . De breedte is dan ongeveer 39 m.  
**k**  $26 \cdot 39 = 1014 \approx 1000 \text{ m}^2$ .



- 22 b**  $PQ = 2$   
**d**  $x_P$  ligt in  $[1, 4]$   
**g** De lengte van  $PQ$  is:  $l(k) = -k^2 + 5k - 4$   
**h** Deze lengte is maximaal als  $k = 2.5$   
**i**  $P(2.5, 1.25)$  en  $Q(2.5, 3.5)$

**Van de opgaven 24 t/m 31 lever je de complete uitwerkingen in.  
Veel succes!**

