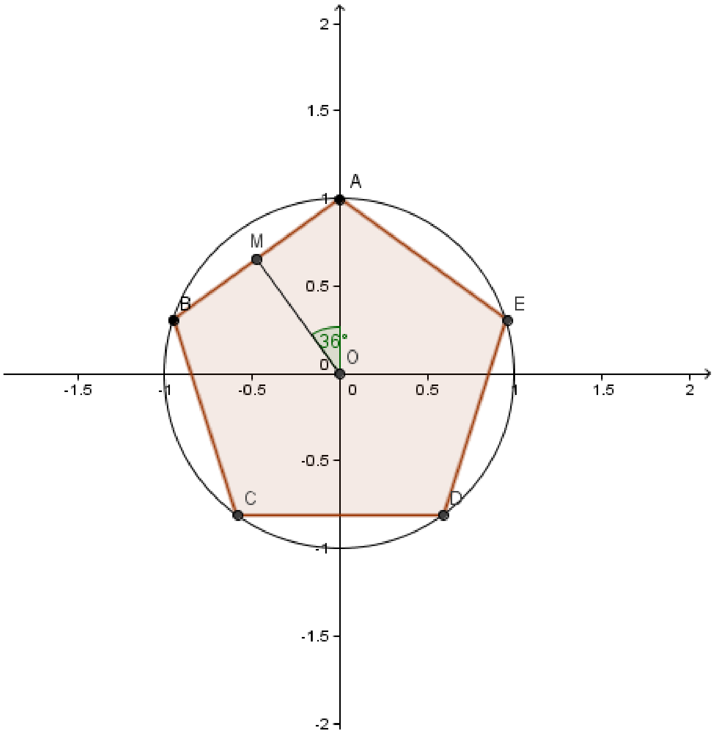
Berekening van de lengte van de zijde van een regelmatige vijfhoek.

We nemen aan dat de regelmatige vijfhoek ingeschreven is in een cirkel met straal 1.



Op de figuur is |AB| de gezochte lengte en M is het midden van [AB]. Dan is $\widehat{AOM} = 36°$.

We weten ook dat

$$cos36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

(het bewijs hiervan vind je op mijn wiskundeblog in de bijlage bij ‘Wiskunde op de kermis’ en ook in de rubriek over ‘Phi en cos 36°’).

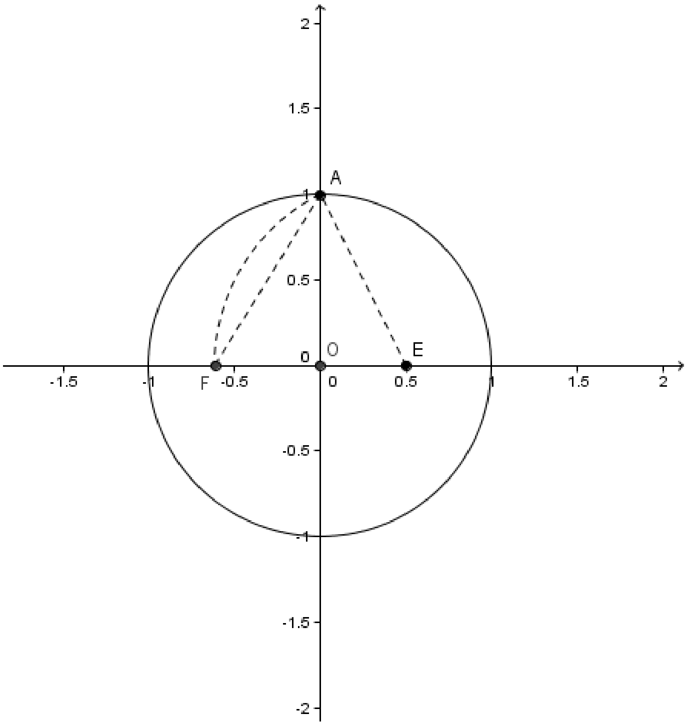
Door de stelling van Pythagoras toe te passen in driehoek AOM vind je (na een beetje rekenwerk) dat

$$|AM|^2 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

zodat

$$|AB| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Waarom is de constructie van de regelmatige vijfhoek dan correct?



Door toepassing van de stelling van Pythagoras in driehoek AOE (met |AO|=1 en |OE|=1/2) vinden we dat

$$|AE| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dan is

$$|OF| = |EF| - |OE| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Pas tenslotte de stelling van Pythagoras toe in driehoek AOF:

$$|AF|^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{4},$$

waaruit we kunnen besluiten dat

$$|AF| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

wat in overeenstemming is met de gevonden waarde voor de lengte van de zijde van de regelmatige vijfhoek die ingeschreven is in een cirkel met straal 1.

Opmerking. Als men de regelmatige vijfhoek inschrijft in een cirkel met straal R is de lengte van de zijde van de regelmatige vijfhoek gelijk aan $z_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\ R$.