Sinds november vorig jaar zijn een kleine dertig scholieren in training voor de Internationale Wiskunde Olympiade, die in de zomer van 2009 gehouden zal worden in Duitsland. Zij komen bij die training heel mooie wiskunde tegen, zoals het *punt van Torricelli*, genoemd naar de Italiaan Evangelista Torricelli (1608-1647), een assistent van Galileo Galilei en na diens dood zijn opvolger als hofwiskundige van de Groothertog Ferdinand van Toscane.

■ door Birgit van Dalen en Quintijn Puite

DE KORTSTE ROUTE NAAR HET PUNT VAN TORRICELLI

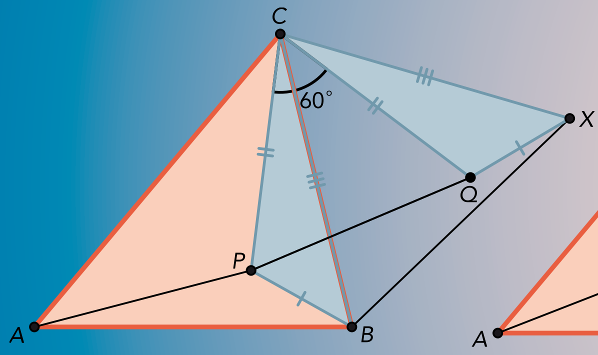
De deelnemers aan de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade, ongeveer tien uit klas 6, tien uit klas 5 en tien uit klas 3 of 4, zijn voor dit speciale trainingsprogramma geselecteerd op basis van hun prestaties bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Na twee rondes, in januari en september 2008, bleken zij de besten in hun categorie. Dat is natuurlijk een geweldige prestatie en een hele eer voor deze leerlingen, maar deelname aan het trainingsprogramma betekent ook keihard werken.

De deelnemers werken elke week thuis aan wiskundeopgaven en komen daarnaast elke maand bijeen. Zo waren er in december, maart en april trainingsdagen op de Technische Universiteit Eindhoven en bij Transtrend in Rotterdam; in november en in januari waren er bovendien twee trainingsweekenden in een jeugdherberg in Valkenswaard. Tijdens zo'n trainingsweekend of -dag leren de leerlingen heel veel nieuwe wiskunde, die ze daarna thuis kunnen toepassen op de opgaven. Ondanks dat het trainingsprogramma zwaar is, zouden de meeste leerlingen het voor geen goud willen missen. Hoe zou dat komen? Er lonkt natuurlijk deelname aan de internationale olympiade, maar dat is voor slechts zes leerlingen weggelegd. Het is ook erg leuk en gezellig om samen met leeftijdsgenoten wiskunde te doen. Maar de belangrijkste reden is misschien wel dat ze heel mooie wiskunde tegenkomen, heel anders dan wat je gewend bent.

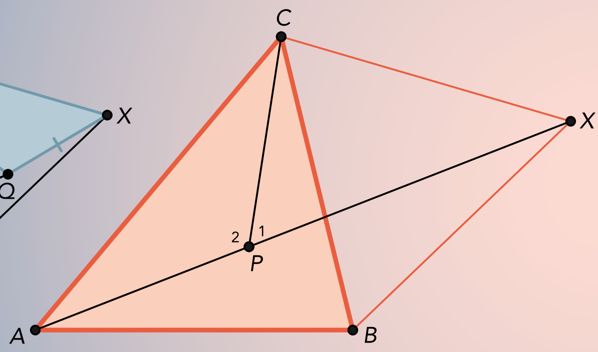
MINIMALE SOM In dit artikel nemen we je mee naar zo'n stukje prachtige wiskunde. We bekijken het volgende probleem. Neem in het platte vlak een driehoek ABC, waarvan de hoeken niet groter zijn dan 120°. Als we een punt P binnen deze driehoek kiezen, dan kunnen we de afstand $|PA|$ van P naar A meten. Deze is groot als P in de buurt van zijde BC ligt, terwijl hij klein is als P in de buurt van A ligt. Iets dergelijks kunnen we ook zeggen over de afstanden $|PB|$ en $|PC|$. We bekijken nu de som $S = |PA| + |PB| + |PC|$. Waar moet je punt P kiezen zó dat deze som minimaal is? En hoe groot wordt S dan?

Om dit probleem te kraken, gebruiken we een heel simpel principe: de driehoeksongelijkheid. Die zegt in feite dat het kortste pad tussen twee punten X en Y gegeven wordt door de rechte lijn tussen X en Y. Dit wist je natuurlijk allang. Als jij aan de rand van een groot grasveld staat en je moet naar de andere kant, dan loop je ook liever in een rechte lijn over het grasveld dan dat je om het grasveld heen loopt, toch?

Dit principe gaan we gebruiken om ons meetkundige probleem op te lossen. Kies eerst maar eens een willekeurig punt P binnen de driehoek. Nu draaien we driehoek CPB precies 60° om C heen en we noemen X het beeld van B en Q het beeld van P, zoals in figuur 1. De driehoeken CPB en CQX zijn dus precies hetzelfde, alleen is de een 60° gedraaid ten opzichte van de ander. Aan de lengtes van de zijden is niets veranderd door die draaiing, dus geldt $|PB| = |QX|$ en $|PC| = |QC|$. Omdat de hoek tussen PC en QC precies 60° is en deze twee lijnstukjes even lang zijn, is driehoek CPQ gelijkzijdig. Daaruit concluderen we dat ook nog geldt $|PC| = |PQ|$. Nu kunnen we S op een andere manier schrijven, door $|PB|$ te vervangen door $|QX|$ en $|PC|$ door $|PQ|$. We krijgen $S = |AP| + |PQ| + |QX|$. Kijk nu nog eens goed naar figuur 1: deze som is niets anders dan de lengte van de route van



Figuur 1



Figuur 2

A naar *X* via *P* en *Q*.

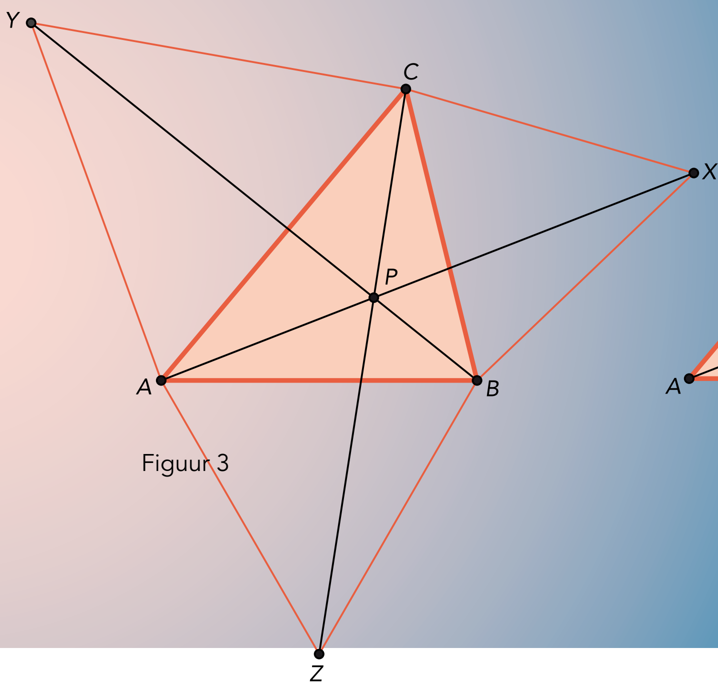
Wat gebeurt er nu als we *P* steeds een beetje anders kiezen? Dan verandert natuurlijk ook *Q* van plaats, want dat is het beeld van *P*. Omdat *X* het beeld is van *B* na de draaiing om *C*, blijft *X* wel op dezelfde plek liggen. Dus we krijgen steeds nieuwe routes van het vaste punt *A* naar het vaste punt *X*, met mogelijk ook steeds een andere lengte. Vanwege de driehoeksongelijkheid weten we echter wat de kortst mogelijke route van *A* naar *X* is: een rechte lijn.

Dit geeft ons een nieuw doel: we gaan *P* zo proberen te kiezen dat de punten *A*, *P*, *Q* en *X* op een rechte lijn komen te liggen. We kunnen de lijn *AX* alvast trekken, want we hadden gezien dat *X* niet af angt van *P*. Nu moeten we *P* natuurlijk op deze lijn kiezen, maar hoe moeten we dat doen zodat ook *Q* op de lijn terecht komt? We weten nog dat driehoek *CPQ* altijd een gelijkzijdige driehoek is, hoe we punt *P* ook kiezen. Om *Q* ook op de lijn *AX* te krijgen, moet zijde *PQ* van deze driehoek in z'n geheel op *AX* liggen. Dat betekent dat de hoek tussen *CP* en *PX* (aangegeven met $\angle P_1$ in figuur 2) gelijk moet zijn aan 60°. Kortom, om *A*, *P*, *Q* en *X* allemaal op één rechte lijn te krijgen, moeten we *P* op *AX* kiezen en ook nog zó dat $\angle P_1 = 60^\circ$.

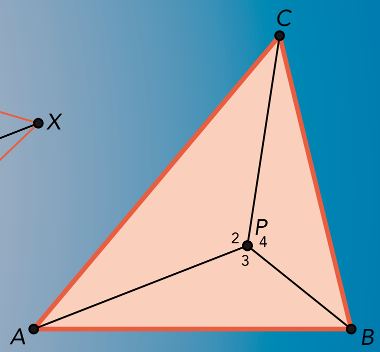
We weten nu dat er een punt *P* binnen driehoek *ABC* bestaat zodat de route van *A* naar *X* via *P* en *Q* een rechte lijn wordt. In dat geval is de lengte *S* van deze route gelijk aan de afstand $|AX|$. We weten ook dat als je *P* ergens anders kiest, *S* dan gelijk wordt aan de lengte van een wandeling van *A* naar *X* die *niet* over een rechte lijn gaat. En dat is altijd langer dan $|AX|$. Kortom, in het punt *P* dat we geconstrueerd hebben (en alleen in dat punt) is *S* minimaal en *S* is dan gelijk aan $|AX|$.

ANDERE FRAAIE EIGENSCHAPPEN Laten we even achterover leunen en genieten van wat we gedaan hebben. Om het elegante principe van de driehoeksongelijkheid te kunnen toepassen, hebben we de som *S* die we wilden minimaliseren, omgezet in een som van lijnstukjes tussen twee vaste punten, waar we een rechte lijn van konden maken. Dat hebben we gedaan door een driehoek in het plaatje te draaien om punt *C*. Waarom eigenlijk punt *C*? Hadden we niet net zoiets bij punt *A* of *B* kunnen doen? Was er dan iets anders uitgekomen? Nee, dat kan natuurlijk niet. We hebben de minimale waarde van *S* bepaald en het unieke punt *P* dat daarbij hoort; het kan niet zo zijn dat we op een ander punt *P* of een andere waarde van *S* zouden uitkomen als we een andere methode zouden gebruiken.

We doen het toch gewoon en kijken wat er gebeurt. Draai dus ook driehoek *APC* eens 60° om *A* en noem het beeld van *C* dan *Y*. Met precies dezelfde redenering als hierboven krijgen we dat de



Figuur 3



Figuur 4

minimale waarde van S gelijk is aan $|BY|$. Maar net was het nog $|AX|$, dus moet wel gelden $|AX| = |BY|$. Als we nu ook driehoek BPA nog 60° draaien om B en het beeld van A daarbij Z noemen, vinden we ook nog eens dat $|AX| = |CZ|$. Dus de afstanden $|AX|$, $|BY|$ en $|CZ|$ zijn allemaal gelijk. Deze mooie eigenschap van driehoek ABC en de daaruit geconstrueerde punten X, Y en Z krijgen we nu zomaar cadeau.

En er is meer. We weten dat ons speciale punt P met de minimale S op de lijn AX moet liggen. Maar dan weten we nu ook dat hij op de lijn BY en op de lijn CZ moet liggen. Kennelijk gaan deze lijnen door één punt, zie ook figuur 3. Dit is een bijzondere eigenschap, want drie willekeurige lijnen hebben meestal maar liefst drie snijpunten. Ook voor dit mooie resultaat hoeven we (na al het werk van hiervoor) geen enkele moeite meer te doen.

We hadden al bedacht dat voor het punt P met de minimale S in figuur 2 moest gelden $\angle P_1 = 60^\circ$. En dus ook $\angle P_2 = 180^\circ - \angle P_1 = 120^\circ$. In figuur 4 zien we $\angle P_2$ weer terug met nog twee vergelijkbare hoeken, $\angle P_3$ en $\angle P_4$. Als we onze hele redenering opnieuw zouden doen, maar dan met Y of Z in plaats van X, dan zouden we – in plaats van op $\angle P_2 = 120^\circ$ – uitkomen op $\angle P_3 = 120^\circ$ of $\angle P_4 = 120^\circ$. Behalve dat ons punt P dus de minimale S levert en daarnaast het snijpunt van AX, BY en CZ is, heeft het dus ook nog als speciale eigenschap dat de hoeken tussen de lijnstukken PA, PB en PC alledrie 120° zijn.

VRAGEN Al in de zeventiende eeuw correspondeerden de wiskundigen Fermat en Torricelli over dit punt. Het punt staat dan ook bekend als *het punt van Fermat* of *het punt van Torricelli*. Wil je nog verder nadenken over dit punt? Dan zijn hier nog een paar interessante vragen:

1. Ga na dat je $\angle P_1$ uit figuur 2 terugziet in figuur 3. Hoe was dat geweest als we hadden geredeneerd vanuit Y of Z in plaats van X? Wat weet je dus over de hoeken bij punt P?
2. In het begin hebben we gezegd dat de hoeken van driehoek ABC niet groter dan 120° mochten zijn. Waar hebben we dat eigenlijk gebruikt? Wat gebeurt er als je het punt van Torricelli probeert te construeren in een driehoek waarvan een van de hoeken groter dan 120° is?
3. Trek met een passer de omgeschreven cirkel van driehoek BCX. Wat valt je op? Kun je dit bewijzen? (Hiervoor moet je wel iets weten over koordenvierhoeken.)
4. Kun je nu bewijzen dat de omgeschreven cirkels van driehoek BCX, driehoek CAY en driehoek ABZ door één punt gaan? ▪