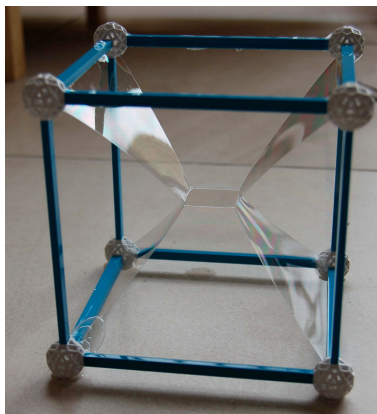




Universiteit Antwerpen  
Didactiek wiskunde  
Academiejaar 2005–2006

# HET OPLOSSEN VAN EXTREMUMPROBLEMEN VIA ZEEPVLIEZEN

EINDWERK VAKDIDACTIE WISKUNDE



*Stijn Symens*

# Inhoudsopgave

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Voorwoord</b>                                                        | <b>3</b>  |
| <b>1 Inleiding</b>                                                      | <b>4</b>  |
| 1.1 De werking van zeep . . . . .                                       | 4         |
| 1.2 Zeep en minimale oppervlakken . . . . .                             | 5         |
| <b>2 De afstandsproblemen van Steiner</b>                               | <b>8</b>  |
| 2.1 De afstandsproblemen van Steiner oplossen met zeepvliezen . . . . . | 8         |
| 2.2 Driehoeken . . . . .                                                | 10        |
| 2.3 Vierhoeken . . . . .                                                | 13        |
| 2.4 Over het algemene probleem . . . . .                                | 16        |
| <b>3 Het cirkelprobleem van Steiner</b>                                 | <b>20</b> |
| <b>4 Hoe werkt het in 3 dimensies?</b>                                  | <b>23</b> |
| <b>5 Oplossingen van de opgaves.</b>                                    | <b>27</b> |
| <b>Referenties</b>                                                      | <b>37</b> |

## Voorwoord

Het resultaat van mijn eindwerk vakdidactiek wiskunde is gebundeld in een studiepakket dat ideaal past binnen de vrije ruimte waar vele scholen nog zoeken naar een zinvolle invulling. Het komt tegemoet aan de leerplandoelstellingen naar onderzoekscompetenties en moet ook in dat opzicht bekeken worden aangezien dit niet precies past binnen de *handboekwiskunde*.

Over het beste format voor dit bundeltje ben ik nog niet helemaal uit: opdelen in aparte lessen, gebruik maken van invulformulieren, of gewoon korte maar uitdagende problemen formuleren.

Het boekje bevat een grote hoeveelheid experimentele en theoretische opgaven, waar de leerlingen van vooral de *derde graad* uren plezier kunnen beleven. De combinatie van het praktische met de wiskunde die je erachter kan zoeken zal voor vele leerlingen en leuke ervaring zijn.

Ook het vakoverschrijdende karakter (minder in de zin van vakoverschrijdende eindtermen, maar eerder over vakoverschrijdende leerstof) van zeepvliezen lijkt me een leuk idee om met verschillende leerkrachten samen aan te werken.

Het boekje kan door de leerlingen apart gebruik worden, maar de leerkracht zou ook de voor hem toepasbare delen kunnen kopiëren en zo de oplossingen, die achteraan het boekje staan uitgewerkt, achter de hand te houden.

Hoofdstuk 4 had nog uitgebreider kunnen zijn, maar dat heeft de tijd helaas niet toegelaten.

Tenslotte wil ik mijn vrouw en dochters bedanken voor de steun die ze me gaven tijdens het maken van dit werk.

Ik wens u alvast veel lees en experimenteerplezier.

*Stijn Symens, mei 2006*

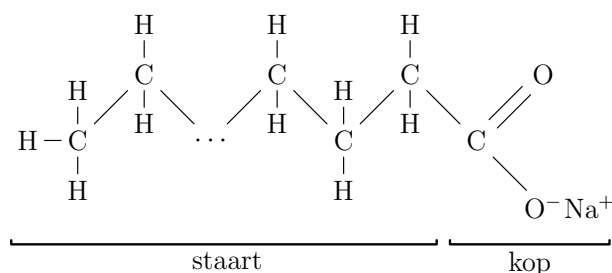
# 1 Inleiding

## 1.1 De werking van zeep

Heb je je ooit al afgevraagd waarom zeep kleren proper maakt, of helpt bij het afwassen van vetrijk servies?

Voor we gaan experimenteren met zeep gaan we eerst even trachten te begrijpen hoe zeep werkt.

Zeep bestaat uit lange moleculen waarvan we gemakshalve zeggen dat ze een kop en een staart hebben. De kop is polair en zit daarom graag in water (dat ook polair is) terwijl de staart apolair is en daarom juist niet graag in water zit. Men spreekt ook wel van hydrofiel (zit graag in het water) en hydrofoob (zit juist niet graag in water). Een zeepmolecule ziet er zo uit:



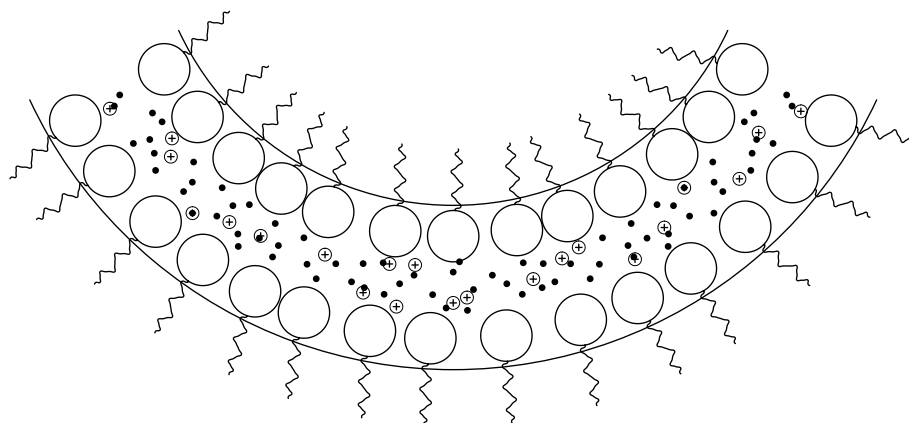
- $C_nH_{2n+1}$  is de apolaire staart.
- $COO^-$  (of soms  $SO_3^-$ ) is het ene deel van de polaire kop.
- $Na^+$  is het andere deel van de polaire kop.

Het kenmerk van deze stoffen is dus dat ze bij voorkeur op het grensvlak van niet-mengbare stoffen gaan zitten (bijvoorbeeld olie en water). De staart hangt dan in de apolaire stof (de olie) terwijl de kop in het polaire water hangt.

Als men nu zeep en water samenvoegt zijn er 3 belangrijke werkingen:

1. Schoonmaken kan alleen wanneer het oppervlak goed vochtig is. Gek genoeg maakt water niet zomaar een oppervlak vochtig. Water heeft de neiging zich in druppels op te hopen. Zeep helpt water zich beter over het oppervlak te verspreiden in plaats van dat het er druppelsgewijs op blijft liggen. De watermoleculen zijn sterk verbonden en worden niet graag gesplitst. Wanneer zeep en water samenkomen, drukken de zeepmoleculen hun staart door het water oppervlak, om zover mogelijk weg te komen van het water. Zeep dient hierbij dus als oppervlaktespanningsbreker. Het resultaat is dat het water over een groter oppervlak wordt verspreid.
2. Zeep zorgt voor de binding van het water aan het vuil. De hydrofobe staarten zetten zich vast aan het vuil, de hydrofielen koppen koppelen zich aan het water. Op die manier wordt het vuil met het water weggespoeld.

3. Dit zal voor ons vooral van belang zijn: Zeep en water zorgen samen met lucht voor schuim. Een zeepbel of een zeepvlies is een dun laagje water dat langs weerszijden is omgeven door de waterminnende kopjes van de zeepmoleculen. De watermijdende staarten steken naar buiten, zoals in onderstaande figuur. De bolletjes stellen de negatief geladen  $\text{COO}^-$ -kopjes voor, de zwarte puntjes zijn watermoleculen en de kleine positieve bolletjes zijn de (vrij bewegende)  $\text{Na}^+$ -ionen.



Een bijzonder eenvoudig principe, maar dit soort vliezen zal zorgen voor uren zeepvliesplezier!

## 1.2 Zeep en minimale oppervlakken

In dit onderdeel beginnen we met een experiment:

### Kort inleidend experiment

Voor dit experiment zullen we gebruik maken van zeepsop. Hiervoor neem je een hoeveelheid water en meng je dit met een stevige hoeveelheid zeep. De sterkte van de zeepvliezen en zeepbellen die je zult maken is wel zeer afhankelijk van de keuze van zeep die je gebruikt. Eventueel moet je enkele soorten zepen proberen. Vaak helpt een beetje suiker toevoegen ook wel.

Als je in de winkel een bellenblazertje gaat kopen, dan is die meestal gevuld met de volgende mengeling:

$$\frac{1}{3} \text{ water} + \frac{1}{3} \text{ afwaszeep} + \frac{1}{3} \text{ glycerine}$$

Deze mengeling in grote hoeveelheden maken zou vanuit milieuoverwegingen onverantwoord zijn en is ook helemaal niet nodig voor de experimenten die we hier gaan doen. Glycerine is een bestanddeel dat je in de apotheker kan vinden en dient

ook om de zeepbellen sterker te maken. Eventueel kan je er een beetje van aan je sop toevoegen.

Op het internet zijn er massa goede en minder goede recepten voor een goede zeep-vliesmengeling te vinden, dus neem daar zeker eens een kijkje.

Zorg er wel voor dat je niet te ontstuimig roert want schuim is vervelend voor het experiment.

*Benodigdheden:*

- Een metalen klee­hanger of een stevige ijzerdraad van inge­veer 50cm.
- Een teil met zeepsop (zie beschrijving hierboven). De teil van een 30-tal centimeter doorsnede volstaat.
- Een garendraad of visdraad .

**Opgave 1.1.** Vervorm je klee­hanger zo dat je een mooie (platte) lus krijgt, met een handvat aan. Als je deze nu voorzichtig in het zeepsop doopt zou je een mooie zeep-film moeten krijgen die de rand van de kapstok verbindt.



Bevestig nu het draadje aan de klee­hanger zodat de 2 uiteinden op dezelfde plaats worden vastgemaakt. Steek je constructie nu opnieuw in het zeepsop en als je die er nu voorzichtig uithaalt, dan krijg je opnieuw een vlies met er middenin een draadje dat erop drijft.

Prik nu het vliesje middenin het draadje kapot. Wat zie je gebeuren?

### Minimale oppervlakken

De natuur gaat steeds op zoek naar toestanden van minimale energie. Denk maar aan stromend water dat steeds de kortste weg wil nemen, of een balletje dat van een helling rolt om de hoeveelheid zwaartekrachtenergie te minimaliseren.

Ook zeepvliezen gaat op zoek naar een toestand van minimale energie.

De energie  $E$  in een vloeibaar oppervlak is in verhouding met de oppervlakte  $A$  van dat oppervlak. Deze energie noemt men *oppervlakte-energie* en de verhouding  $\rho$  wordt ook wel de *oppervlaktetensionscoëfficiënt* genoemd:

$$E = \rho \cdot A.$$

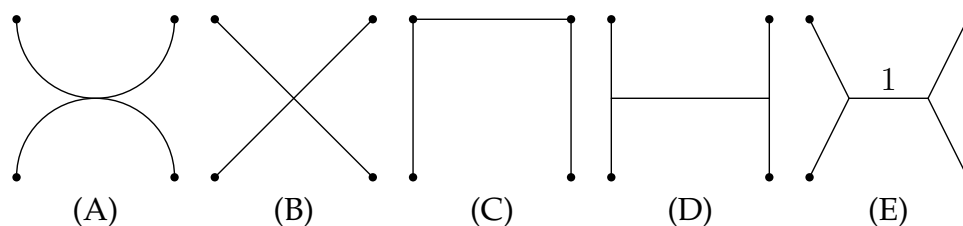
Het oppervlak (in ons geval het vlies) neemt een vorm aan van minimale energie en deze evenwichtstoestand vertaalt zich dus tot een vorm met minimale oppervlakte.

**Opgave 1.2.** Kan je nu je resultaat van de vorige opgave verklaren?

## 2 De afstandsproblemen van Steiner

Laten we eens kijken naar een vraagje van de Vlaamse Wiskunde Olympiade:

**Opgave 2.1** (VWO 11 (1996), 2<sup>e</sup> ronde, vraag 22). Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt. Welke van de onderstaande *stratenplannen* geeft het beste resultaat?



Los deze vraag op door voor elk voor de situaties de totale afstand aangelegde weg te berekenen.

Men zou deze vraag veel algemener kunnen stellen, en dat is ook gebeurd door Jakob Steiner in de 19<sup>e</sup> eeuw.

### Probleem 1. De afstandsproblemen van Steiner

Stel gegeven  $n$  punten in het vlak, bepaal de kortste manier om alle punten te verbinden.

Het olympiadevraagje komt dan overeen met het geval waarbij  $n = 4$  en de 4 punten bovendien de hoekpunten van een vierkant zijn.

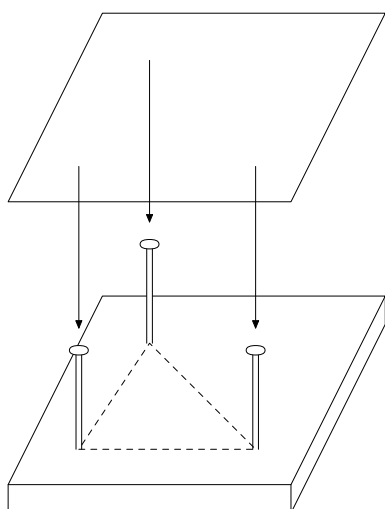
### 2.1 De afstandsproblemen van Steiner oplossen met zeepvliezen

Laten we experimenteel eens bepalen hoe we de kortste afstand kunnen bepalen in geval van kleine  $n$ . Dit zullen we doen door gebruik te maken van spijkerplaatjes en zeepvliezen:

## Experiment

*Materiaal voor  $n$  spijkerplaatjes:*

- $n$  houten plankjes van ongeveer 15 op 15 centimeter.
- Spijkers (ongeveer 5 cm lang), met platte kop en een hamer.
- Secondenlijm.
- $n$  CD-doosjes.
- Een teil met zeepsop. De teil moet groot genoeg zijn zodat de gemaakte spijkerplaatjes volledig kunnen ondergedompeld worden. Voor de samenstelling van het zeepsop, kijk op bladzijde 5.
- Een geodriehoek en een rietje.



**Opgave 2.2** (Het maken van de spijkerplaatjes). Teken een willekeurige driehoek op het houten plaatje. Zorg er wel voor dat de hoeken van de driehoek kleiner zijn dan  $120^\circ$ . Klop in elk van de hoekpunten van de driehoek een spijker zodat die nog een viertal centimeter uit het plaatje steekt. Zorg ervoor dat de spijkers mooi recht geklopt zijn en dat ze er ook allen even ver uitsteken. Haal een CD-doosje uit elkaar en gebruik enkel het plexi-plaatje van de voorzijde van het doosje. Dit plak je met de secondenlijm aan elkaar.

**Opgave 2.3.** Maak ook een spijkerplaatje met een vierkant, met een willekeurige rechthoek en met een regelmatige zeshoek.

We zullen nu de spijkerplaatjes in de teil met zeepsop onderdompelen en kijken naar het zeepvlies dat ontstaat als we de plaatjes uit de teil halen.

**Opgave 2.4.** Neem je driehoekspijkerplaatje en dompel het onder in de het sop. Haal het er voorzichtig uit (vermijd schuim) en bestudeer de vliezen die ontstaan:

- Meet de totaalafstanden van de verschillende situaties en concludeer welke situatie het beste resultaat geeft voor het probleem van Steiner. Blaas eventueel eens met het rietje tussen het plexiplaatje en het hout om verschillende situaties te krijgen.

- In sommige situaties ontstaan er snijlijnen van de verschillende zeepvliezen. Controleer met je geodriehoek welke verschillende hoeken die zeepvliezen met elkaar maken.

Het geval van de driehoek zullen we in het hoofdstuk 2.2 wat uitdiepen.

**Opgave 2.5.** We herhalen de vorige opgave, maar nu met het spijkerplaatje van het vierkant. Hier zijn er 3 essentieel verschillende evenwichtstoestanden te vinden.

- Meet telkens de som van de verschillende afstanden voor het Steinerprobleem en bepaal welke evenwichtstoestand je de kortste totale lengte geeft. Kom je het zelfde uit als je oplossing bij opgave 2.1?
- Meet ook hier met je geodriehoek de hoek die ontstaat tussen 3 zeepvliezen. Wat concludeer je?
- Als je een figuur krijgt die lijkt op een platgeduwde  $H$ , blaas dan met je rietje tussen het plankje en de plexiplaat, probeer zo een platgeduwde  $H$  te krijgen in de andere richting.

Ook dit geval bekijken we in meer in detail (kijk in sectie 2.3).

**Opgave 2.6.** Een leuke variant op de vorige opgave is die met de rechthoek. De resultaten zullen zeer gelijkend zijn. Kan je echter ook zoals bij het vierkant een platte  $H$  met je rietje van richting laten veranderen? De verhouding tussen de twee verschillende zijden speelt hier natuurlijk een rol!

**Opgave 2.7.** Moeilijk wordt het als we eens gaan kijken naar een zeshoek. Nu kunnen er zich heel wat meer verschillende evenwichtssituaties voordoen. Haal je spijkerplaatje vele malen uit het water en probeer ook voldoende het evenwicht te verstoren met je rietje om zo tot andere evenwichtssituaties te komen.

## 2.2 Driehoeken

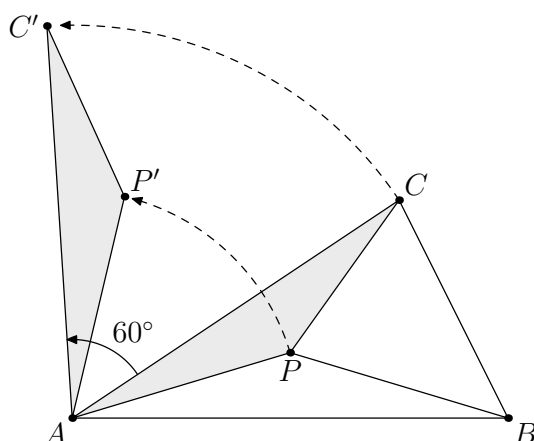
Het probleem van Steiner voor  $n = 3$  bestond al veel langer dan op het ogenblik dat Steiner het probleem algemeen stelde. Het was immer *Pierre de Fermat* die dit geval als probleem stelde aan de Italiaanse natuurkundige *Torricelli*. Torricelli was een student van Galileo en loste dit probleem op verschillende manieren op. Voor het geval van de driehoek kunnen we het probleem als volgt formuleren:

**Stelling 2.1** (Het punt van Torricelli). In een driehoek  $ABC$ , met alle hoeken kleiner dan  $120^\circ$ , is er een uniek punt  $P$  waarvoor de afstand

$$|PA| + |PB| + |PC|$$

minimaal is. Bovendien geldt voor dit punt  $P$  dat de lijnstukken  $[PA]$ ,  $[PB]$  en  $[PC]$  onderling hoeken maken van  $120^\circ$ .

*Bewijs.* We nemen een willekeurig punt  $P$  in  $\triangle ABC$ . Dan laten we  $\triangle ABC$  draaien rond het punt  $A$  zoals in de figuur.



**Opgave 2.8.** Toon aan dat  $|PA| + |PB| + |PC| = |BP| + |PP'| + |P'C'|$ .

De som van de afstanden van  $P$  tot de 3 hoekpunten komt dus precies overeen met de lengte van de zigzaglijn  $BPP'C'$ . Deze afstand is zo klein mogelijk indien  $BPP'C'$  een rechte is.

**Opgave 2.9.** Toon aan dat indien  $BPP'C'$  een rechte is, dat dan de hoek  $\widehat{ABP}$  precies  $120^\circ$  moet zijn.

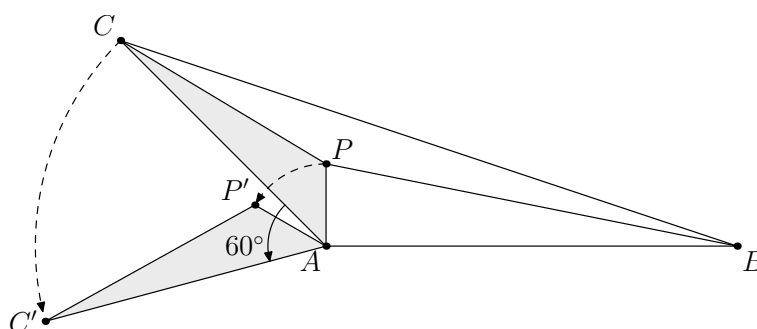
□

Uit het voorgaande bewijs volgt niet alleen de uniciteit van het punt van Torricelli en het feit dat de ontstane hoeken steeds  $120^\circ$  zijn. We hebben door dit bewijs immers in één klap een concrete constructie voor het punt  $P$ .

**Opgave 2.10.** Bedenk nu zelf een korte methode om het punt van Torricelli te construeren.

In de formulering van de stelling staat er duidelijk dat alle hoeken van de driehoek  $ABC$  kleiner moeten zijn dan  $120^\circ$ . We kunnen nu onderzoeken wat er gebeurt in het geval dat er een hoek is die niet aan deze eigenschap voldoet.

**Opgave 2.11.** Maak gebruik van de volgende tekening om je conclusies te trekken over wat er gebeurt als we dit probleem op dezelfde manier willen oplossen, maar voor een driehoek waarvan één van de hoeken (in dit geval hoek  $A$ ) meer dan  $120^\circ$  heeft. Waar vinden we het punt van Torricelli?



### Een alternatieve constructiemethode

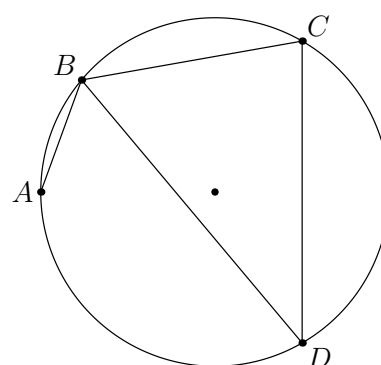
Laten we nogmaals kijken naar een olympiadevraagje:

**Opgave 2.12** (VWO 21 (2006), 2<sup>e</sup> ronde, vraag 12).

In een cirkel zijn de volgende bogen afgepast:

$$|\widehat{AB}| = 40^\circ, |\widehat{BC}| = 80^\circ \text{ en } |\widehat{CD}| = 120^\circ,$$

Dan geldt voor de koorden:



- (A)  $|AB| + |BC| = |CD|$       (B)  $|AB| + |BC| = |BD|$       (C)  $|AB| + |CD| = |BD|$   
 (D)  $|AB| + |BD| = |BC| + |CD|$       (E) geen van de vorige

Gebruik hiervoor het feit dat  $\triangle ACD$  een gelijkzijdige driehoek is.

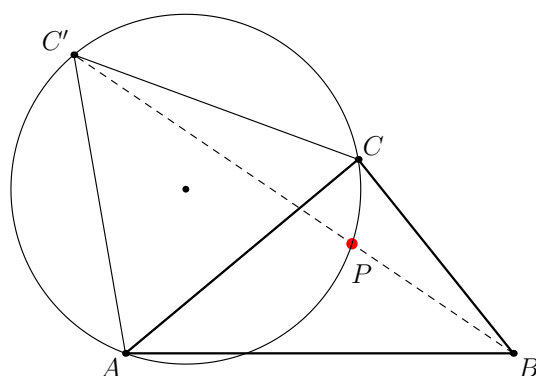
Deze vraag zouden we een beetje kunnen vervormen tot de volgende eigenschap:

**Eigenschap 2.1.** In een koordenvierhoek  $ABCD$  met  $\triangle ACD$  een gelijkzijdige driehoek is

$$|AB| + |BC| = |BD|.$$

We zullen eigenschap 2.1 gebruiken voor de alternatieve constructie van het punt van Torricelli:

**Stelling 2.2** (Constructie van het punt van Torricelli). Stel gegeven een driehoek  $ABC$ . Plaats men op  $[AB]$  een gelijkzijdige driehoek  $ABC'$  naar buiten toe, dan vormt het snijpunt van  $CC'$  en de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC'$  het punt van Torricelli.



*Bewijs.* Van het punt van Torricelli weten we intussen dat het een hoek van  $120^\circ$  maakt met elk paar hoekpunten.

**Opgave 2.13.** Bewijs dat indien een punt  $P$  een hoek  $\widehat{APC}$  maakt van  $120^\circ$ , dan ligt  $P$  op de omgeschreven cirkel van  $\triangle ACC'$ . [Tip: Maak gebruik van de eigenschap dat de som van de overstaande hoeken in een vierhoek  $180^\circ$  is als en slechts als die vierhoek een koordenvierhoek is.]

Zij  $P$  nu een willekeurig punt op de boog  $\widehat{AC}$ .

**Opgave 2.14.** Gebruik de eigenschap 2.1 om aan te tonen dat als  $P$  het punt van Torricelli is, dan het dan op  $BC'$  moet liggen.

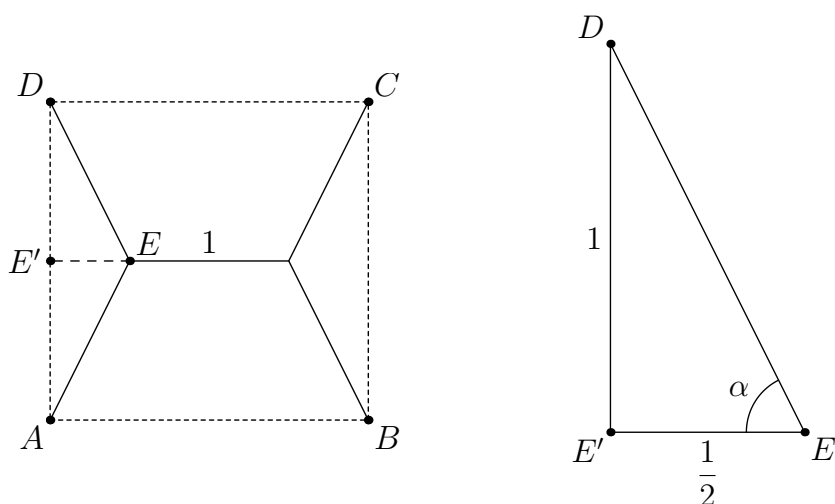
□

Deze nieuwe aanpak geeft ons voor de driehoek wel niet veel meer informatie dan wat we al hadden, maar we kunnen deze techniek ook bij willekeurige vierhoeken gaan toepassen (zie pagina 15).

## 2.3 Vierhoeken

### Het vierkant

Het olympiadevraag bij opgave 2.1 vroeg duidelijk welke van de gegeven stratenplannen het minste asfalt nodig heeft, maar zit de optimale oplossing, die we experimenteel verkregen er wel echt bij? Het lijkt dat (E) de correcte oplossing geeft. Laten we eens controleren hoe groot de interne hoek is die de straten maken:



Rechts hebben we de driehoek  $DEE'$  uit de linkerfiguur wat uitvergroot. We noemen  $\widehat{DEE'}$  de hoek  $\alpha$ , en we bepalen die aan de hand van de driehoeksmmeetkunde voor rechthoekige driehoeken:

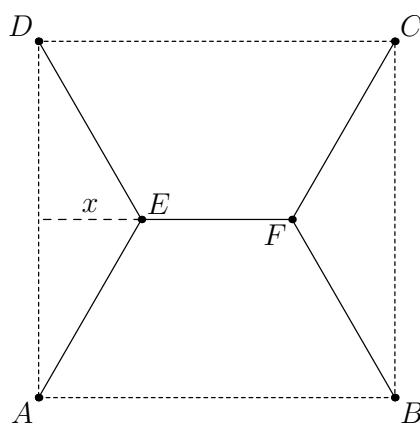
$$\tan \alpha = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{1}{1/2} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^\circ 25'.$$

Bijgevolg vinden we dat

$$|\widehat{AED}| = 126^\circ 52'$$

en dus niet  $120^\circ$ !

We zullen nu op zoek gaan naar de echte minimale figuur. We gaan uit symmetrie-overwegingen (en uit de experimentele waarneming) wel uit van de volgende configuratie:



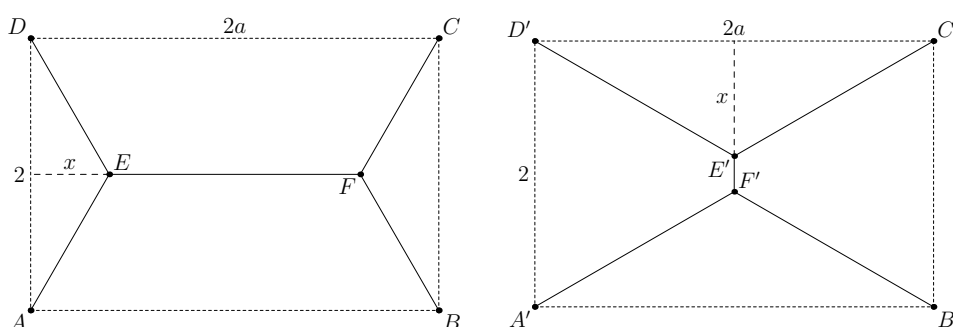
**Opgave 2.15.** Schrijf de totale afstand  $L$  in functie van  $x$ .

**Opgave 2.16.** Los dan het extremum probleem op door gebruik te maken van afgeleiden: bepaal eerst de  $x$  waar  $L(x)$  minimaal is en vul dan de gevonden  $x$  in in  $L(x)$ . Controleer dat je oplossing inderdaad beter is dan de beste oplossing uit het olympiadevraagje.

**Opgave 2.17.** Controleer de grootte van de hoeken gemaakt door de vliezen. Zijn ze nu wel  $120^\circ$ ?

### De rechthoek

Hetzelfde zouden we kunnen doen met een rechthoek. Hier vormen de 2 verschillende oriëntaties natuurlijk niet meer dezelfde oplossingen. We kunnen ons afvragen welke van de 2 precies de kortste geeft.



We nemen aan dat één van de zijden lengte 2 heeft en de andere zijde lengte  $2a$ , met  $a > 0$  willekeurig maar vast.

**Opgave 2.18.** We passen op elk van beide situaties dezelfde methode toe als bij het vierkant:

- Stel net zoals bij opgave 2.15 en 2.16 voor beide situaties een formule op voor de totale lengte  $L$  van de zeepvliezen in functie van  $x$ .
- Leid beide functies af en bepaal de minimale situaties.
- Controleer nu voor welke  $a$  de linkse situaties het kortste pad geeft en voor welke  $a$  de rechtse situatie het kortste pad geeft.

Als  $a$  echter zeer groot wordt kan de rechtse situatie niet meer als evenwichtstoestand voorkomen. Analooch als  $a$  kleiner wordt zal de linkse situatie niet mee voorkomen. De  $x$  mag immers niet groter worden dan de halve breedte (of hoogte in het rechtse geval) van de rechthoek.

**Opgave 2.19.** Gebruik de resultaten uit de vorige opgave om een interval te bepalen voor  $a$  waarvoor er 2 evenwichtstoestanden voorkomen.

### Een willekeurige vierhoek

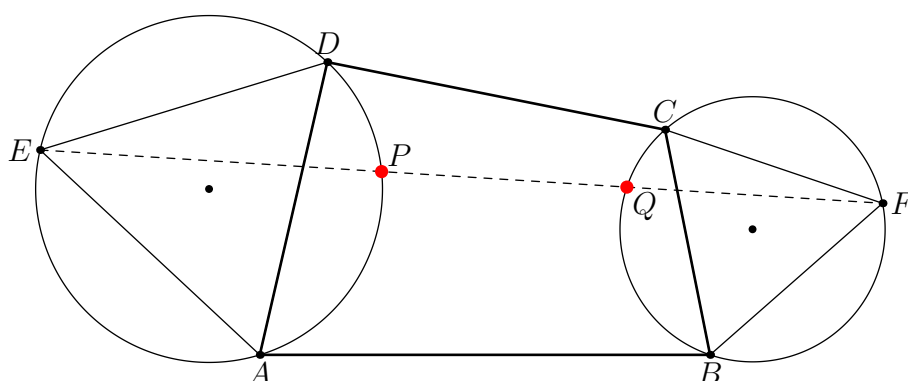
In het stukje over de driehoeken werd er reeds aangekondigd dat we de stelling 2.2 ook voor vierhoeken kunnen toepassen.

We zoeken dus een oplossing naar de volgende vraag: gegeven 4 punten, bepaal de evenwichtstoestanden.

Aangezien er in een vierhoek er 2 snijlijnen van zeepvliezen kunnen zijn en dus ook meerdere evenwichtstoestanden kunnen optreden, moeten we telkens 2 mogelijkheden onderzoeken om de kortste afstand te kunnen vinden.

Stel dat er een willekeurige vierhoek gegeven is en dat we zoals steeds een kortste verbinding willen maken. We zullen er hier wel vanuit gaan dat de vierhoek geen hoeken heeft die meer dan  $120^\circ$  zijn.

Vergelijkbaar met de situatie in stelling 2.2 kunnen we nu 2 gelijkzijdige driehoeken op 2 tegenoverstaande zijden zetten.

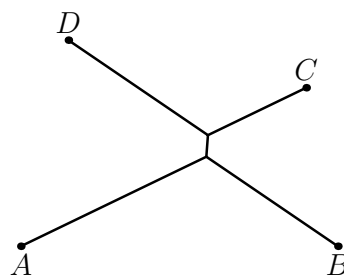
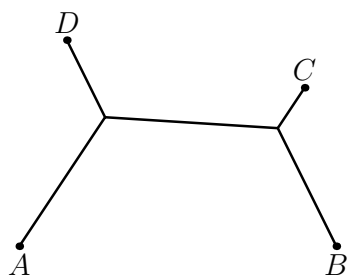


We trekken dan de verbindingslijn ( $EF$  in de figuur) en  $P$  resp.  $Q$  zijn de snijpunten van die lijn met de omgeschreven cirkel van  $\triangle ADE$  resp.  $\triangle BCF$ .

**Opgave 2.20.** Toon aan dat  $|AP| + |DP| + |PQ| + |QB| + |QC|$  een minimale verbinding is van de punten  $A, B, C$  en  $D$  op een gelijkaardige wijze als in stelling 2.2.

**Opgave 2.21.** Kan je nu ook aantonen dat de gemaakte hoeken in  $P$  en  $Q$  steeds  $120^\circ$  zijn? [Tip: denk aan omtrekshoeken.]

Uiteraard zouden we hetzelfde kunnen doen door gelijkzijdige driehoeken op de zijden  $[AB]$  en  $[CD]$  te zetten. Dan krijgen we 2 andere punten  $P$  en  $Q$ , die een andere minimale situatie beschrijven. Om de minimale oplossing van het probleem van Steiner te beschouwen komt het er dan op neer om de kortste van de twee te nemen.



## 2.4 Over het algemene probleem

Als we terugkijken naar deel 2.1 hebben we experimenteel vastgesteld dat er in een evenwichtstoestand

- bij een driehoek maximaal op 1 plaats
- bij een vierhoek maximaal op 2 plaatsen
- bij een zeshoek maximaal op 4 plaatsen

een snijlijn van 3 vliezen ontstaat. We zullen in wat volgt spreken over een *denkbeeldige spijker* als we eigenlijk zulk een snijlijn bedoelen.

Kunnen we het vorige veralgemenen?

Als we een spijkerplaatje met  $n$  spijkers in zeep dompelen, dan ontstaan er niet meer dan  $n - 2$  denkbeeldige spijkers.

Dit valt zelfs redelijk eenvoudig te bewijzen:

*Bewijs.* We noteren  $N$  voor het aantal spijkers,  $D$  voor het aantal denkbeeldige spijkers en  $V$  voor het aantal vliezen. Dan geldt:

$$V = N + D - 1 \quad (1)$$

**Opgave 2.22.** Geef aan waarom dit geldt.

Er ontspringt in elke spijker minimum 1 vlies en in elke denkbeeldige spijker minimum drie vliezen. Bovendien heeft elk vlies 2 (al dan niet denkbeeldige) spijkers als uiteinde. Met andere woorden het totaal aantal vliezen is minimaal  $N + 3D$ , maar we moeten delen door 2 want we hebben elk vlies dubbel geteld:

$$V \geq \frac{N + 3D}{2}. \quad (2)$$

Substitueren we (2) in (1), dan krijgen

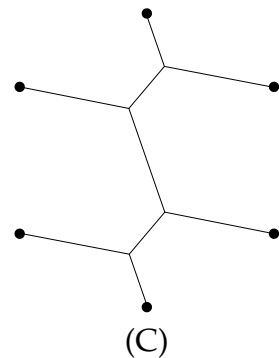
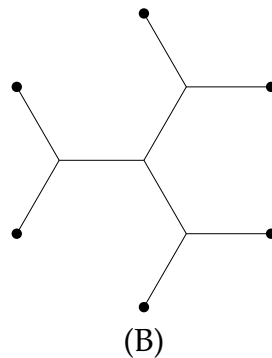
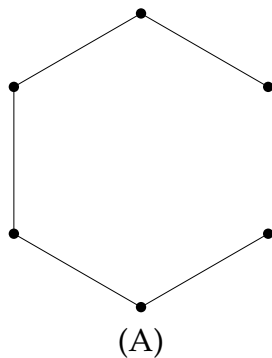
$$2N + 2D - 2 \geq N + 3D,$$

en na vereenvoudiging wordt dit  $D \leq N - 2$ , wat we moesten aantonen.  $\square$

Zo vinden we dat we in een 5-hoek maximaal 3 denkbeeldige spijkers hebben en in een zeshoek maximaal 4. Het geval van de zeshoek gaan we wat meer in detail bekijken:

### De zeshoek

Experimenteel ondervonden we dat onder andere de volgende situaties als evenwichtstoestanden voor de zeshoek voorkwamen:



**Opgave 2.23.** Stel dat de lengte van een zijde van de rechthoek gegeven wordt door 1, hoeveel bedraagt de totale lengte dan in elk van de drie bovenstaande situaties? [Tip: De laatste opgave vereist wel wat rekenwerk, maar als je aanneemt dat de vliezen door het middelpunt van de zeshoek gaan kan je de situatie opdelen in 2 vierhoeken en daar de denkbeeldige spijkers bepalen aan de hand van de cirkelmethode zoals op pagina 15.]

---

**Biografie 2.1 Jakob Steiner (1796-1863)**

---

Jakob Steiner was een Zwitserse wiskundige die volgens de overleveringen pas op zijn veertiende leerde schrijven. Ondanks dat, en dankzij zijn wiskundig talent mocht hij voor zijn twintigste al wiskundeles geven in de prestigieuze school waar hij les kreeg. Later studeerde hij in Heidelberg en Berlijn, alwaar hij uiteindelijk in 1834 hoogleraar werd. Jakob Steiner is vooral bekend van zijn twee en driedimensionale meetkunde problemen. Naast de meetkunde problemen van hem die in dit boekje worden besproken is hij onder andere ook gekend van de volgende 2 problemen. Eerst een ruimtemeetkundevraag:



*In hoeveel verschillende gebieden kan de driedimensionale ruimte maximaal verdeeld worden door  $n$  vlakken.*

Tussen haakjes, dezelfde vraag zou je kunnen stellen maar dan met rechten in een 2 dimensionale ruimte. Het antwoord op het rechtenvraagstuk is alvast  $(n^2 + n + 2)/2$ . Aan jullie om het vlakkenvraagstuk op te lossen.

De tweede vraag gaat over passer- en lineaalconstructies. Dit zijn constructies die allen gevormd kunnen worden met passer en lineaal (zonder meetlat). Dit soort constructies werd al eeuwenlang onderzocht, in het bijzondere welke regelmatige veelhoeken er getekend kunnen worden via passer- en lineaalconstructies (de 17-hoek bijvoorbeeld wel, de 7-hoek echter niet). Steiner deed de volgende uitspraak over deze constructies:

*Alle punten die geconstrueerd kunnen worden met passer en lineaal kunnen ook geconstrueerd worden enkel met lineaal, op voorwaarde dat er een vaste cirkel (en zijn middelpunt) gegeven is.*

Deze stelling wordt ondertussen de *Steiner-Poncellet* stelling genoemd.

Jakob Steiner stierf in Zwitserland op 67-jarige leeftijd.

---

### 3 Het cirkelprobleem van Steiner

Laten we het hoofdstuk opnieuw beginnen met een vraagje van de Vlaamse Wiskunde Olympiade:

**Opgave 3.1** (VWO 11 (1996), 1<sup>e</sup> ronde, vraag 28). Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem  $R$ ,  $V$  en  $C$  de respectievelijke omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

$$(A) V \geq R \geq C \quad (B) V \geq C \geq R \quad (C) R \geq V \geq C \quad (D) R \geq C \geq V \quad (E) C \geq R \geq V$$

Jakob Steiner formuleerde dit probleem op de volgende manier:

**Probleem 2. Het cirkelprobleem van Steiner**

Van alle vlakke figuren met dezelfde omtrek heeft de cirkel de grootste oppervlakte.

of anders gezegd:

Van alle vlakke figuren met dezelfde oppervlakte heeft de cirkel de kleinste omtrek.

Deze constatering hadden we natuurlijk al lang kunnen maken op basis van het eerste inleidende experiment op pagina 6.

In dit hoofdstuk zullen we die bewering ook bewijzen. (zie verder)

Ook in drie dimensies is er een gelijkaardig probleem: Welke 3-dimensionale figuur heeft voor een gegeven volume de kleinste oppervlakte?

Deze vraag wordt natuurlijk onmiddellijk beantwoord door de zeepbellen: een vaste hoeveelheid ingesloten lucht wordt omsloten door een vlies. Welke vorm heeft het vlies? Een bol.

Ook dit probleem werd voor het eerst geformuleerd en wiskundig bewezen door Steiner:

**Probleem 3. Het bolprobleem van Steiner**

Van alle ruimtefiguren met dezelfde oppervlakte heeft de bol de grootste volume.

Hoewel we deze stelling hier niet zullen bewijzen, kan de volgende tabel ons toch al enigszins overtuigen. De tabel geeft voor een vast volume van 1 kubieke dm weer hoeveel oppervlakte de figuur in totaal heeft. We merken dat hoe meer zijvlakken de figuur heeft, hoe kleiner de oppervlakte wordt.

|                                                                                   | figuur     | aantal zijvlakken | volume           | oppervlakte         |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------|------------------|---------------------|
|  | Tetraëder  | 4                 | $1 \text{ dm}^3$ | $7.21 \text{ dm}^2$ |
|  | Kubus      | 6                 | $1 \text{ dm}^3$ | $6 \text{ dm}^2$    |
|  | Octaëder   | 8                 | $1 \text{ dm}^3$ | $5.72 \text{ dm}^2$ |
|  | Dodecaëder | 12                | $1 \text{ dm}^3$ | $5.32 \text{ dm}^2$ |
|  | Icosaëder  | 20                | $1 \text{ dm}^3$ | $5.15 \text{ dm}^2$ |
|  | Bol        |                   | $1 \text{ dm}^3$ | $4.84 \text{ dm}^2$ |

## Het bewijs van probleem 2

De bewijs maakt gebruik van enkele lemma's. Dat zijn kleine tussenresultaatjes die bijdragen tot de oplossing van het grote probleem.

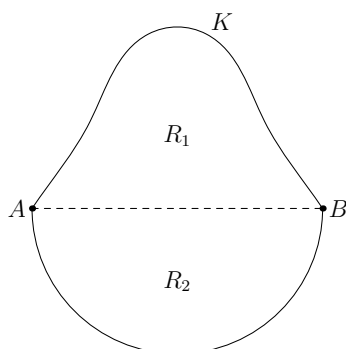
We vertrekken met een gesloten kromme  $K$  met lengte  $\ell$ , en van  $K$  is geweten dat het die kromme is, die voor een gegeven omtrek  $\ell$  de grootst mogelijke oppervlakte insluit.

**Lemma 1.**  $K$  is een convexe kromme.

(Met *convex* bedoelen we dat elk het lijnstuk dat twee willekeurige punten van  $K$  verbindt, geheel binnen of op  $K$  ligt.)

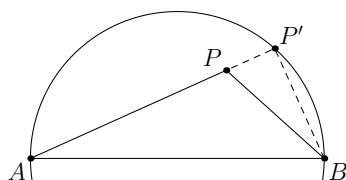
**Opgave 3.2.** Bewijs lemma 1 uit het ongerijmde: veronderstel dat  $K$  niet convex is en toon dan aan dat er een kromme  $K'$  bestaat met een grotere ingesloten oppervlakte dan  $K$ . Dit geeft een contradictie en dus moet  $K$  convex zijn.

**Lemma 2.** Veronderstel dat we op de kromme  $K$  twee punten  $A$  en  $B$  nemen die de kromme in 2 stukken van gelijke lengte verdeelt. Het lijnstuk  $[AB]$  verdeelt de convexe figuur in 2 delen  $R_1$  en  $R_2$  van gelijke oppervlakte.



**Opgave 3.3.** Bewijs lemma 2 uit het ongerijmde: veronderstel dat er 2 gebieden ontstaan met verschillende oppervlakte, toon dan aan dat er een kromme  $K'$  bestaat met een grotere ingesloten oppervlakte dan  $K$ . [Tip: maak ook hier gebruik van een spiegeling].

**Lemma 3.** Stel gegeven een middellijn  $[AB]$  van een cirkel en een punt  $P$  niet op die cirkel. Dan is  $|\widehat{APB}| \neq 90^\circ$ .

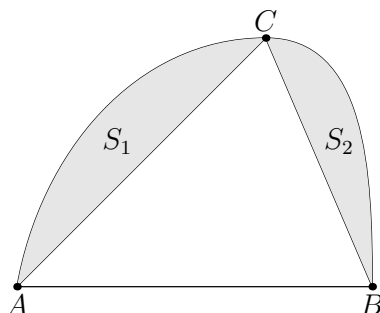


**Opgave 3.4.** Bewijs lemma 3 door het snijpunt  $P'$  van de rechte  $AB$  met de cirkel te beschouwen.

Nu zijn we klaar om het de grote stelling te bewijzen.

*Bewijs van de stelling.* We gaan aantonen dat  $K$  een cirkel moet zijn. Door lemma 2 mogen we vertrekken van een halve kromme, met een verbindingslijnstuk  $[AB]$  aan de uiteinden. We gaan opnieuw een bewijs uit het ongerijmde opstellen: stel dat  $K$  geen cirkel is.

In dat geval bestaat er volgens lemma 3 een punt  $C$  op  $K$  zodat  $|\widehat{ACB}| \neq 90^\circ$ . Verdeel nu je figuur in 3 delen door de lijnstukken  $[AC]$  en  $[BC]$  te trekken (zoals in de figuur). Zo ontstaan er 2 segmenten  $S_1$  en  $S_2$  en de driehoek  $ABC$ .



Aangezien  $|\widehat{ACB}| \neq 90^\circ$  zouden we de tekening kunnen vervormen door  $S_2$  rond het punt  $C$  te laten draaien totdat er wel een rechte hoek ontstaat in  $C$ . De oppervlakte van de 2 segmenten blijft hetzelfde maar de oppervlakte van de driehoek vergroot!

**Opgave 3.5.** Waarom vergroot de oppervlakte van de driehoek  $ABC$ ?

Aangezien de nieuwe figuur dezelfde halve omtrek heeft als de eerste, maar een grotere totale oppervlakte, waren we niet vertrokken van een kromme  $K$  met maximale oppervlakte.

Bijgevolg moet  $K$  wel een cirkel zijn en dit sluit het bewijs.  $\square$

## 4 Hoe werkt het in 3 dimensies?

Toe hiertoe waren de meetkundeproblemen allemaal in het vlak. We hebben we al even aangekaart dat de bol het kleinste oppervlak heeft voor een gegeven volume en dat zeepbellen daarom in hun evenwichtstoestand bolvormig zijn, maar we hebben nog niet echt zeepvliezen in 3 dimensies beter in detail bekeken.

Bij wijze van experiment kijken we eens wat er gebeurt indien we een regelmatig viervlak (tetraëder) in de zeepoplossing onderdompelen en er dan terug uithalen.

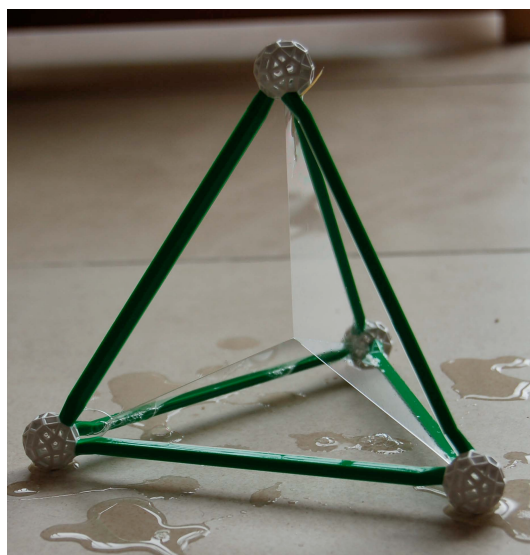
**Opgave 4.1.** Dompel een tetraëder onder in je zeepsop. Indien je niet over een tetraëder beschikt kan je die trachten te maken met rietjes en paperclips. Vervorm de paperclips zó dat je lusjes krijgt die je in de rietjes kan klemmen. Op deze manier kan je met 4 paperclips en 6 rietjes een tetraëder maken.

Hoeveel verschillende vliezen ontstaan er als je de tetraëder uit het sop haalt?

De Belgische natuurkundige Joseph Plateau ontdekt dat zeepbellen (of schuim) steeds hoeken van  $120^\circ$  maken, ook al zijn er meer dan drie vlakken die samenkomen. In een algemene situatie komen er namelijk steeds 6 vlakken samen. Dit gebeurt bijvoorbeeld als 4 bellen aan elkaar verbonden zijn.

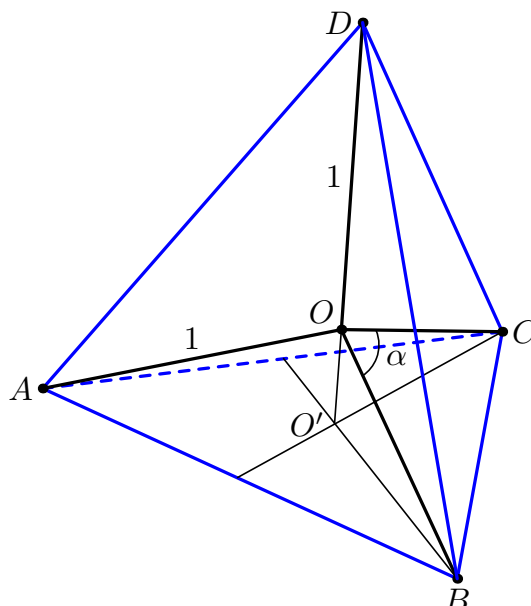
Plateau toonde ook aan dat de hoek die door 2 snijlijnen van vlakken gemaakt wordt steevast dezelfde is.

We zullen dit proberen na te maken door de vliezen in een tetraëder te bekijken. Dit zijn immers ook 6 vliezen en de hoeken die tussen de vlakken ontstaan zijn steeds  $120^\circ$ .



We noemen  $O$  het centrum van de tetraëder  $ABCD$  waar de 6 vliezen samenkomen. We zullen op basis van de volgende tekening de hoek  $\alpha = \widehat{COB}$  proberen te bepalen. We kunnen door de symmetrieën van de tetraëder aannemen dat dit punt het

zwaartepunt is van het viervlak  $ABCD$ . We stellen ook de afstand van  $O$  tot elk van de hoekpunten gelijk aan 1.



**Opgave 4.2.** Bepaal de hoek  $\alpha$ . Indien nodig kan je gebruik maken van de volgende hulpvraagjes:

- Gebruik eigenschappen van het zwaartepunt om aan te tonen dat

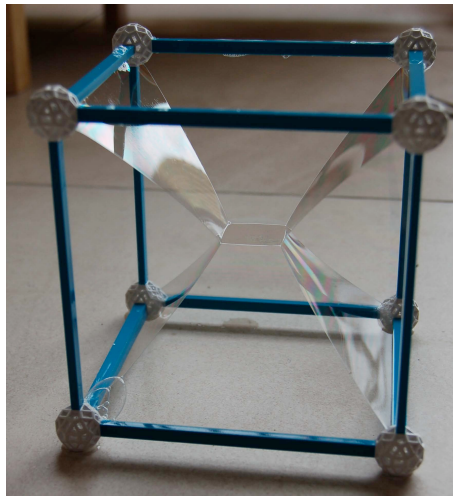
$$|OO'| = \frac{1}{3}|OD|$$

- Bepaal nu  $|BO'| = |CO'|$ .
- Gebruik de cosinusregel om  $|BC|$  te bepalen.
- Gebruik de cosinusregel om  $\alpha$  te bepalen.

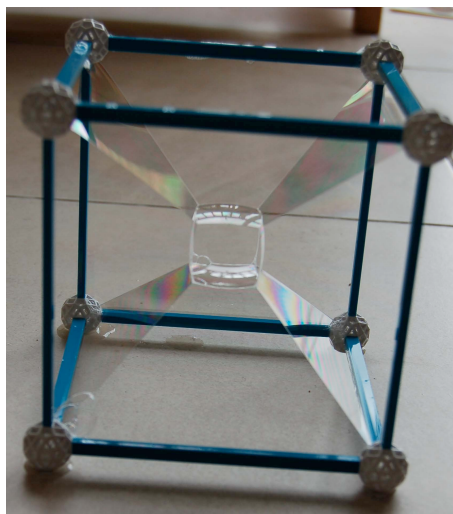
De hoek  $\alpha$  ben je misschien in de chemie cursus ook al eens tegengekomen. Dit is precies de hoek die waterstofatomen maken als ze verbonden zijn met een koolstof-atoom!

### Spelen met de kubus

Indien je een kubus in zeepsop doopt krijgt hij meestal de volgende situatie als minimaaloppervlak:



Het bekomen vlies heeft wat weg van de evenwichtstoestand die we kregen bij het spijkerplaatje met het vierkant, alleen wordt er nu naar meer richtingen getrokken. Met dit kubusgeraamte kan je nog wel meer leuke dingen doen. Je moet maar eens proberen het bovenstaand minimaaloppervlak te krijgen en er dan een zeepbelletje aan toe te voegen.

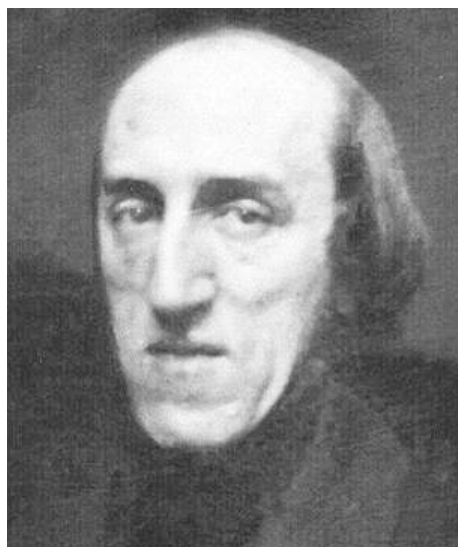


Je krijgt een kubusvormige zeepbel!

---

**Biografie 4.1 Joseph Plateau (1801-1881)**

---



De belgische natuurkundige Joseph Plateau is geboren in Brussel en studeerde vanaf zijn 18de levensjaar bij de bekende Belgische Quetelet. Later haalde hij zijn doctoraat aan de universiteit van Brussel en werd hij als hoogleraar aangenomen aan de universiteit van Gent. Joseph Plateau wordt gezien als de belangrijkste onderzoeker op het gebied van zeepvliezen en zeepbellen. Het werk dat hij er toen over schreef geldt nu, meer dan 120 jaar na zijn dood, nog steeds als de referentie op gebied van experimenteel en theoretisch onderzoek naar zeepvliezen. Joseph Plateau heeft zich echter niet alleen met zeepvliezen bezig gehouden, maar deed bijvoorbeeld ook onderzoek naar de inwerking van kleuren op het netvlies.

Rond zijn veertigste levensjaar was hij volledig blind en men beweert dat hij zijn blindheid heeft te danken aan een experiment dat hij gedaan had toen hij 28 was, waarbij hij 25 seconden in de zon moest kijken. Volgens de website van de Universiteit Gent heeft recent onderzoek naar Plateau's leven echter uitgewezen dat dit verhaal niet klopt.

Zelfs blind wist hij de wereld te verbazen met zijn vernieuwende ideeën en zijn experimenten. Hij maakte nieuwe experimenten die dan werden uitgevoerd door zijn assistenten (zijn vrouw, zijn zoon en zijn schoonzoon). Zijn voornaamste baanbrekend werk gebeurde trouwens in zijn blinde periode.

Als je ooit Burgelijke ingenieur gaat studeren aan de universiteit van Gent, dan zal je dit naamkaartbordje dagelijks tegenkomen.

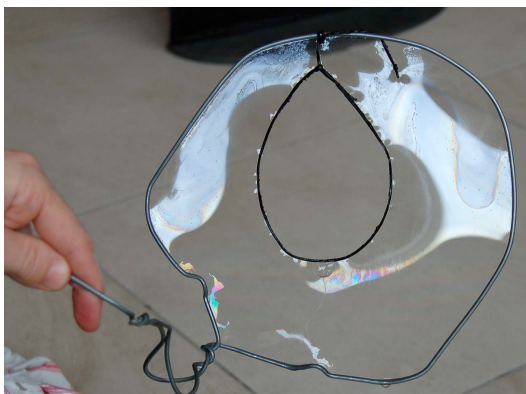


Ook de Plateau-filmprijzen, zeg maar de Vlaamse Oscars, zijn naar hem genoemd.

---

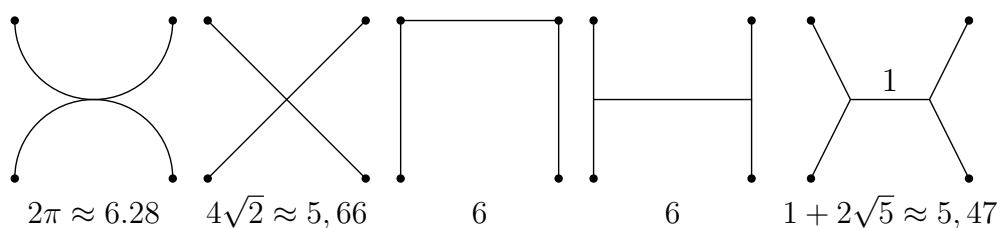
## 5 Oplossingen van de opgaves.

- 1.1 Het zeepvlies trekt langs alle kanten aan het touwtje zodat er een “cirkel van lucht” ontstaat binnenin het touwtje.



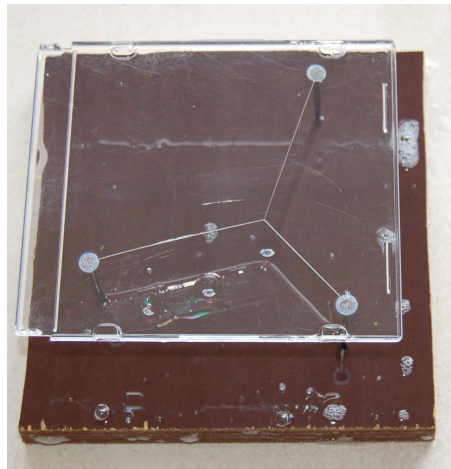
- 1.2 De oppervlakte van het vlies moet zo klein mogelijk zijn. De lus moet dus zo groot mogelijk zijn. De figuur met de grootst mogelijke oppervlakte voor een gegeven omtrek is de cirkel. Dit kan je ook bewijzen (kijk naar het cirkelprobleem van Steiner: pagina 20).

- 2.1 We vinden de volgende afstanden.



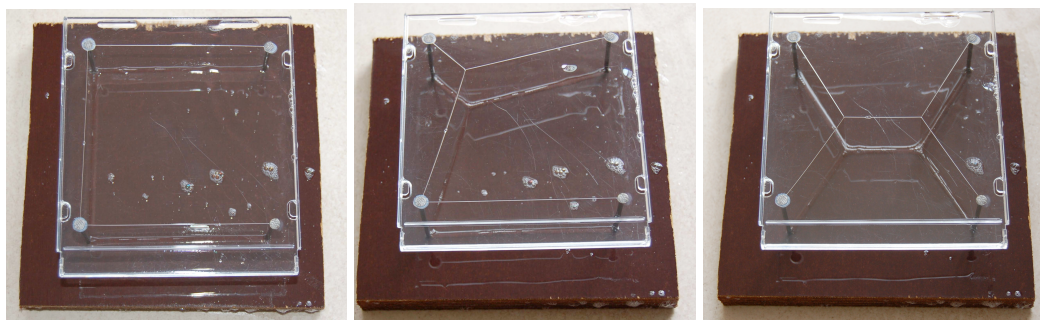
De juiste oplossing is dus (E).

- 2.4 Ofwel worden twee van de drie zijden van de driehoek door een zeepvlies gegeven ofwel krijgen we een vlies zoals op deze foto:

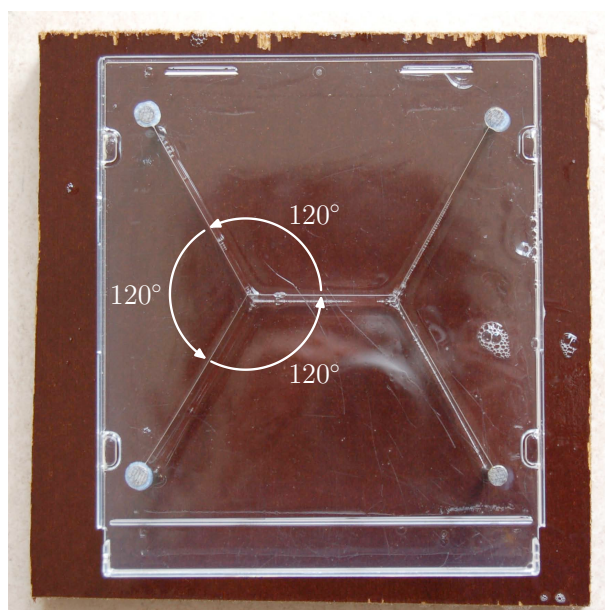


De hoek die ontstaat tussen de verschillende vliezen meet telkens precies  $120^\circ$ .

2.5 De volgende foto's geven de mogelijke evenwichtstoestanden van de zeepvliezen:

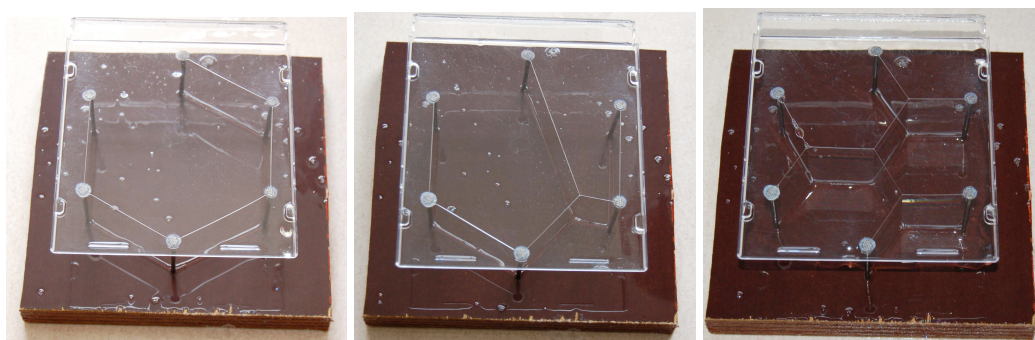


De meest rechtse figuur lijkt verdacht hard op diegene die we kregen indien we de VWO-vraag oplossen. De hoeken die we krijgen op de plaats waar verschillende vliezen elkaar ontmoeten is opnieuw in alle gevallen precies  $120^\circ$ :



2.6 We merken dat indien de verhouding tussen de zijden van de rechthoek te groot wordt, dat er dan slechts 1 evenwichtssituaties met 2 interne punten ontstaat. De hoeken blijven wel steeds  $120^\circ$ .

2.7 We komen tot de opmerking dat er in een zeshoek mogelijk 4 interne punten zijn. Bijvoorbeeld

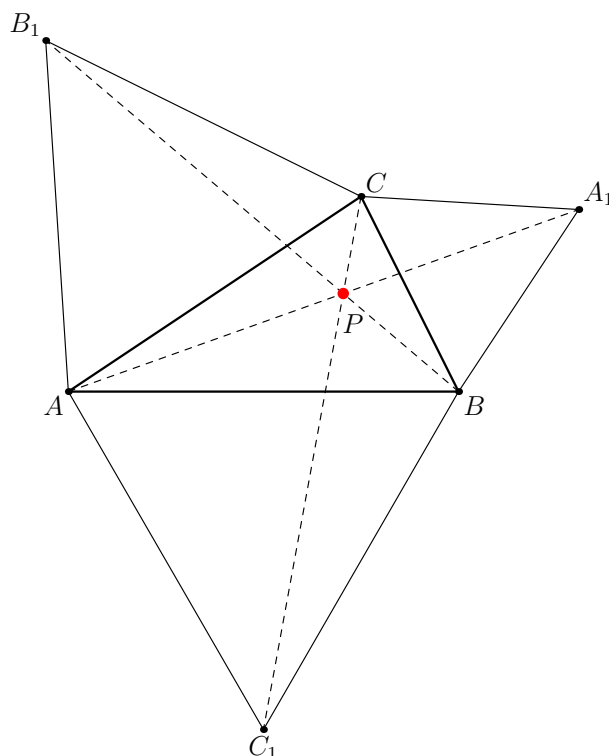


Er zijn echter nog meer mogelijkheden (kijk bijvoorbeeld op pagina 17). Ook hier merken we dat de hoeken steeds  $120^\circ$  zijn.

2.8 De driehoek  $APP'$  is gelijkzijdig want hij heeft 2 gelijke zijden ( $|AP| = |AP'|$ ) en een ingesloten hoek  $\widehat{PAP'}$  van  $60^\circ$ . hierdoor hebben we

$$\begin{array}{rcl}
 |PA| & = & |PP'| \\
 |PB| & = & |PB| \\
 |PC| & = & |P'C'| \\
 \hline
 |PA| + |PB| + |PC| & = & |PB| + |PP'| + |P'C'|.
 \end{array}$$

- 2.9 Omdat  $\triangle APP'$  gelijkzijdig is, is  $|\widehat{APP}| = 60^\circ$  en de complementaire hoek  $\widehat{APB}$  meet dus  $120^\circ$ .
- 2.10 Teken zowel op de zijde  $AC$  als op de zijde  $CB$  een gelijkzijdige driehoek en verbindt de nieuwe hoekpunten steeds met de overstaande zijde van de driehoek  $ABC$ . Het snijpunt van die 2 lijnstukken geeft dan het punt van Torricelli. Natuurlijk kom je ook 2 anders zijden als start nemen.



Merk op dat hierbij ook ineens is aangetoond dat de 3 lijnen die je zo kan trekken precies door 1 punt gaan.

- 2.11 Indien we dezelfde strategie gebruiken, en we zorgen ervoor dat  $BPP'C'$  een rechte lijn is, dan moet het punt  $P$  buiten de cirkel vallen. De beste oplossing voor het punt van Torricelli is in dit geval  $P = A$ .
- 2.12 Aangezien  $\widehat{AD} = \widehat{CD} = \widehat{DA} = 120^\circ$ , is  $\triangle ACD$  gelijkzijdig en dus is

$$|AC| = |CD| = |DA|.$$

De stelling van Ptolemaeus zegt dat in een koordenvierhoek  $ABCD$  geldt dat

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

In ons geval kan dat herleid worden naar

$$|AB| + |BC| = |BD|.$$

(B) is dus het goede antwoord.

*Opmerking:* Merk op dat we de ligging van het punt  $B$  hier niet gebruikt hebben. Aan de hand van de gegeven waarde kon je (bijvoorbeeld met de formules van Simpson) ook een oplossing vinden die geen gebruik maakt van de stelling van Ptolemaeus.

2.13 Stel dat  $|\widehat{APC}| = 120^\circ$ , dan is de vierhoek  $APCC'$  een koordenvierhoek en dan ligt  $P$  op de boog  $\widehat{AC}$ .

2.14 Als we de eigenschap 2.1 toepassen vinden we dat

$$|PA| + |PB| + |PC| = |C'P| + |PB|$$

De afstand  $|PA| + |PB| + |PC|$  is dus minimaal als  $P$  op de rechte  $|BC'|$  ligt.

2.15 We krijgen door de stelling van Pythagoras

$$L(x) = 4\sqrt{x^2 + 1} + 2 - 2x$$

2.16 Als we de afgeleide van  $L(x)$  gelijkstellen aan 0 vinden we

$$L'(x) = 4 \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$$

Door verandering van lid herleidt dit zich tot

$$2x = \sqrt{x^2 + 1}$$

en onder de kwadrateringsvoorwaarde  $x > 0$  krijgen we

$$4x^2 = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Als we deze  $x$  in  $L$  invullen krijgen we

$$L\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 4\sqrt{\frac{1}{3} + 1} + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} + 2 \approx 5,46.$$

2.17 We krijgen, met de notaties zoals op de tekeningen op pagina 14

$$\tan \alpha = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ.$$

en de  $|\widehat{AED}| = 120^\circ$ .

2.18 Voor het linkse geval:

$$L(x) = 4\sqrt{x^2 + 1} + 2a - 2x$$

en dus geeft  $L'(x) = 0$  precies

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} + 2a.$$

(Dit konden we ook rechtstreeks halen uit de resultaten van het vierkant vermits de hoek  $120^\circ$  moet blijven, zal de  $x$  ook zelfde waarde hebben.)

Het rechtse geval levert:

$$L(x) = 4\sqrt{x^2 + a^2} + 2 - 2x$$

met een minimum voor

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right) = 2\sqrt{3}a + 2.$$

Om te kijken welke situatie de kortste weg geeft onderscheiden we 3 situaties:

$a > 1$  Dan hebben we

$$(2\sqrt{3} - 2)a > (2\sqrt{3} - 2) \Rightarrow 2\sqrt{3}a + 2 > 2\sqrt{3} + 2a$$

en de linkse situatie geeft dus de kortste afstand.

$a = 1$  De rechthoek is een vierkant en beide situaties zijn evenwaardig.

$a < 1$  We hebben

$$(2\sqrt{3} - 2)a < (2\sqrt{3} - 2) \Rightarrow 2\sqrt{3}a + 2 < 2\sqrt{3} + 2a$$

en de rechtse situatie geeft de kortste afstand.

2.19 In het linkse geval moet  $x < a$  zijn en om de berekende evenwichtssituatie te houden moet dus  $a > \sqrt{3}/3$ . In het rechtse geval moet  $x < 1$  zijn en om de berekende evenwichtssituatie te houden moet dus  $a < \sqrt{3}$ . We krijgen met andere woorden precies 2 evenwichtssituaties als

$$a \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right[.$$

Als  $a \leq \sqrt{3}/3$  of als  $a \geq \sqrt{3}$ , dan is er slechts 1 evenwichtssituatie met twee interne punten.

2.20 Er is hier aan alle voorwaarden voldaan om gebruik te maken van eigenschap 2.1, zodat we vinden dat

$$|AP| + |DP| + |PQ| + |QB| + |QC| = |EP| + |PQ| + |QF|$$

en de minimale afstand wordt bereikt indien het de zigzaglijn  $EPQF$  een rechte is.

2.21 Vermits een omtrekshoek de helft is van de boog waarop hij staat is

$$|\widehat{APE}| = \frac{|\widehat{AE}|}{2} = 60^\circ.$$

De supplementaire hoek  $\widehat{APQ}$  is dus  $120^\circ$  en idem voor de andere hoeken.

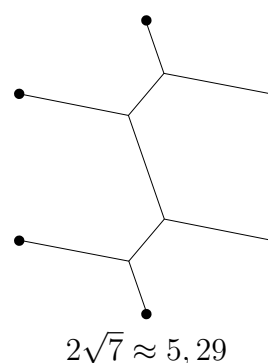
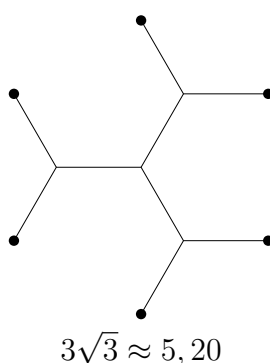
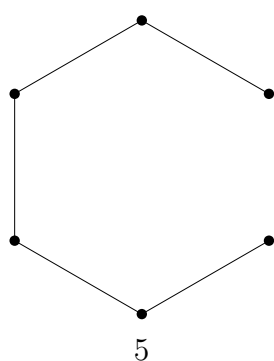
2.22 We verwijderen verschillende malen na elkaar een (echte) spijker die maar aan 1 vlies verbonden is (die bestaat steeds want anders hebben de vliezen lucht omsloten en dat is niet mogelijk. Er zijn 2 mogelijkheden:

- *de andere kant van het vlies is een echte spijker.* Resultaat: 1 spijker en 1 vlies verwijderd.
- *de andere kant van het vlies is een denkbeeldige spijker.* Die denkbeeldige spijker verdwijnt ook en de drie vliezen die er samenkwamen versmelten tot 1 vlies. Resultaat: 2 vliezen minder en 2 spijkers (1 echte en 1 denkbeeldige) minder.

We merken dat er steeds evenveel spijkers als vliezen verwijderd worden. Dit blijven we doen tot er slechts 1 spijker meer over blijft. Het aantal vliezen is op dat moment gelijk aan 0. Hieruit kunnen we besluiten dat er in het begin 1 spijker meer moet geweest zijn dan het aantal vliezen:

$$V = N + D - 1.$$

2.23 We krijgen voor de drie situaties:



Gewoon de rand volgen geeft hier blijkbaar het beste resultaat. Zo onverwacht is dit natuurlijk niet omdat de hoeken van een regelmatige zeshoek zelf  $120^\circ$  zijn.

- 3.1 Stel dat de rechthoek een lengte  $l$  en een breedte  $b$  heeft, het vierkant zijde  $z$  en de cirkel straal  $r$ . Dan vertaalt het gegeven zich als

$$bl = z^2 = \pi r^2$$

en we kunnen aantonen dat

$$2(b + l) \geq 4z \quad \text{en} \quad 4z \geq 2\pi r.$$

Immers, vermits het rekenkundig gemiddelde strikt groter is dan het meetkundig gemiddelde krijgen we enerzijds

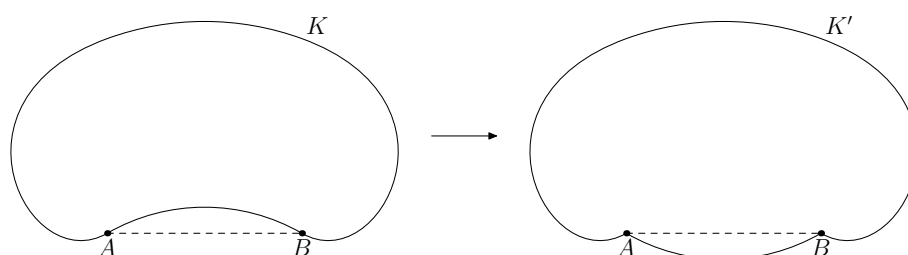
$$\frac{b + l}{2} \geq \sqrt{bl} = \sqrt{z^2} = z.$$

Anderzijds hebben we

$$4z = 4r\sqrt{\pi} = 2(2r\sqrt{\pi}) \geq \sqrt{\pi}(2r\sqrt{\pi}) = 2\pi r.$$

Met andere woorden, (C) is het juiste antwoord.

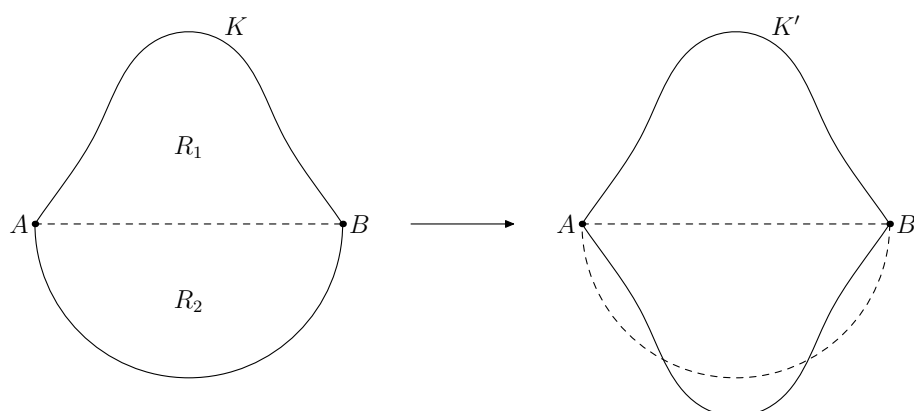
- 3.2 Veronderstel dat  $K$  niet convex is. Dan zijn er 2 punten  $A$  en  $B$  zodat het lijnstuk  $[AB]$  buiten de kromme ligt. Maar als we dan het gedeelte tussen  $K$  en  $[AB]$  spiegelen rond  $[AB]$  krijgen we een nieuwe kromme  $K'$  die dezelfde omtrek heeft, maar een strikt grotere oppervlakte en dat is in strijd met de veronderstelling dat  $K$  maximale oppervlakte omsluit.  $K$  is dus convex.



- 3.3 Veronderstel dat  $R_1$  en  $R_2$  niet dezelfde oppervlakte hebben en dat bijvoorbeeld

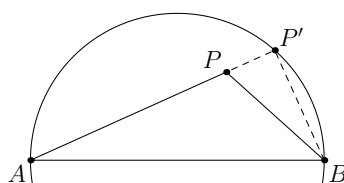
$$\text{oppervlakte } R_1 > \text{oppervlakte } R_2. \quad (3)$$

Dan kunnen we  $R_1$  spiegelen rond het lijnstuk  $[AB]$ . Hieruit kunnen we een nieuwe kromme  $K'$  maken die  $R_1$  en zijn spiegelbeeld omsluit.



$K'$  omsluit dan 2 keer de oppervlakte van  $R_1$  en dat is wegens (3) meer dan wat  $K$  omsluit. Dit is in strijd met de veronderstelling dat  $K$  maximale oppervlakte omsluit.  $R_1$  en  $R_2$  moeten dus dezelfde oppervlakte hebben.

- 3.4 We noemen  $P'$  het snijpunt van  $AP$  en de cirkel. Omdat een omtrekshoek op de middellijn steeds een rechte hoek is, is  $\widehat{PP'B}$  een rechte hoek.



$\widehat{PP'B}$  kan dan geen rechte hoek zijn, anders heeft  $\triangle PP'B$  2 rechte hoeken.

- 3.5 De oppervlakte van de driehoek wordt gegeven door de formule

$$\frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}.$$

Nemen we als basis  $[AC]$ , dan is de hoogtelijn uit  $B$  op zijn grootst als  $|\widehat{ACB}| = 90^\circ$ .

- 4.1 Elke ribbe van de tetraëder is precies verbonden met 1 vlies. Zo ontstaan er 6 vliezen met 1 gemeenschappelijk snijpunt.
- 4.2 – We maken gebruik van vectorrekenen en stel hiervoor de oorsprong in  $O$ . Dan vinden we aangezien  $O$  het zwaartepunt is van de tetraëder en  $O'$  het zwaartepunt is van  $\triangle ABC$  dat

$$\vec{O} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}}{4} \quad \text{en} \quad \vec{O'} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}.$$

In dat geval is

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'O} &= \vec{O} - \vec{O'} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}}{4} - \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3} \\ &= \frac{\vec{D}}{4} - \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{12} = \frac{\vec{D}}{4} + \frac{\vec{D}}{12} = \frac{\vec{D}}{3}\end{aligned}$$

en we vinden dat

$$|OO'| = \frac{1}{3}|OD|.$$

- Met  $|OO'| = \frac{1}{3}$  volgt uit de stelling van Pythagoras in  $\triangle OO'B$  dat

$$|BO'| = |CO'| = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

- Omdat  $|\widehat{BO'C}| = 120^\circ$  zegt de cosinusregel in  $\triangle O'BC$  dat

$$|BC|^2 = |O'C|^2 + |O'B|^2 - 2|O'C| \cdot |O'B| \cdot \cos 120^\circ = \frac{8}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} = \frac{8}{3}.$$

- De cosinusregel toegepast in  $\triangle OBC$  geeft

$$\frac{8}{3} = 1 + 1 - 2 \cos \alpha$$

en we vinden dus  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ . Hieruit volgt dat

$$\alpha = 109^\circ 28' 16''.$$

## Referenties

- [1] Heinrich Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, 1965, Dover Publications.
- [2] Hans van Lint en Jeanne Breeman, *Zeepvliezen, wetenschap en vermaak*, zebra-reeks deel 18, 2004.
- [3] David Stein, *How to make Monstrous, Huge, Unbelievably Big Bubbles*, 2005.
- [4] Cyril Isenberg, *The science of soap films and soap bubbles*, 1992, Dover Publications.
- [5] Louis Bloomfield, *How things work, the physics of everyday life*, 2006, John Wiley and Sons.
- [6] Joseph Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, 1873, bijvoorbeeld beschikbaar in het Frans en het Engels op <http://www.susqu.edu/brakke/>.
- [7] John O'Connor en Edmund Robertson,  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>
- [8] *Het leven en werk van Joseph Plateau*,  
<http://www.mhsgent.ugent.be/nl-plat.html>.
- [9] *Gestructureerde zeepbellen*, <http://www.technopolis.be/>