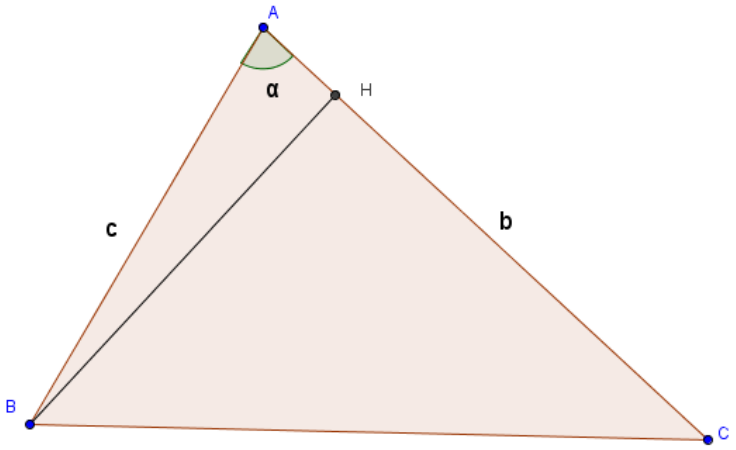
De vlieger van Pythagoras
een alternatief bewijs voor de stelling van Pythagoras
Dr. Luc Gheysens
2011-09-11

Hieronder geven we een eenvoudig bewijs van de stelling van Pythagoras.

We zullen hierbij gebruik maken van een gekende formule:
de oppervlakte van een willekeurige driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijden vermenigvuldigd met de sinus van de ingesloten hoek:

$$Opp.\Delta\, ABC \;=\; \frac{1}{2}\, b\, c\, sin\alpha$$

Bewijs



figuur 1

Als BH de hoogtelijn is uit B en H het voetpunt van die hoogtelijn op de zijde [AB] (figuur 1) dan is

$$Opp.\Delta\,\mathrm{ABC} \;=\; \frac{1}{2}\,|\mathrm{AC}|\,|\mathrm{BH}| = \frac{1}{2}\,\mathrm{b}\,|\mathrm{BH}|\,. \qquad (1)$$

In ΔABH is

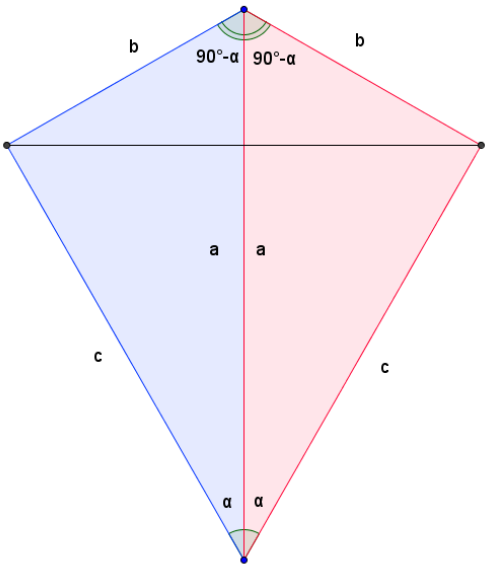
$$sin\alpha = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{|BH|}{c}$$

zodat

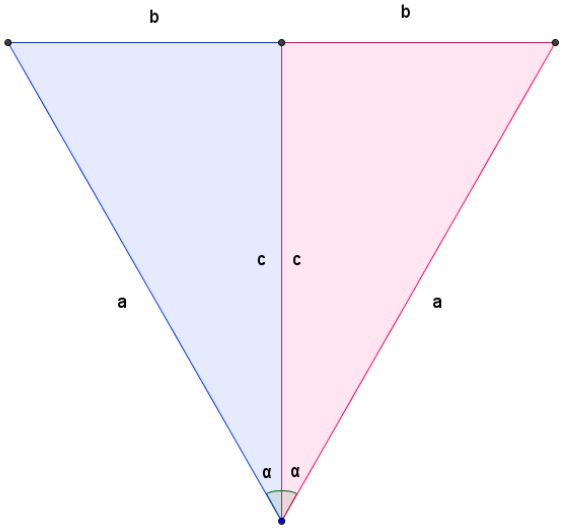
$$|BH| = c\;\; sin\alpha \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt de vooropgestelde formule voor de oppervlakte van Δ ABC.

Bewijs voor de stelling van Pythagoras.



figuur 2



figuur 3

Figuur 2 is een vlieger die bestaat uit twee rechthoekige driehoeken waarvan de schuine zijden (met lengte a) tegen elkaar liggen. De hoekpunten van de rechte hoeken zijn met elkaar verbonden zodat de vlieger ook kan gezien worden als een vierhoek die bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken. In de ene driehoek hebben de even lange benen lengte b en in de andere driehoek hebben de even lange benen lengte c.

We passen twee keer de bovenstaande formule toe voor de oppervlakte van een driehoek:

$$Opp.vlieger = \frac{1}{2}\, c^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\, b^2 \sin[2(90° - \alpha)]$$
$$= \frac{1}{2}\, c^2 \sin 2\,\alpha + \frac{1}{2}\, b^2 \sin(180° - 2\,\alpha)$$
$$= \frac{1}{2} b^2 \sin 2\,\alpha + \frac{1}{2}\, c^2 \sin 2\,\alpha \qquad (3)$$

(bij de laatste overgang gebruiken we het feit dat de sinus van supplementaire hoeken gelijk is).

In figuur 3 zijn de twee rechthoekige driehoeken waaruit de vlieger is opgebouwd op een andere manier tegen elkaar geplaatst, nl. met de rechthoekszijden met lengte c tegen elkaar. Op die manier ontstaat een gelijkbenige driehoek waarvan de even lange benen lengte a hebben. We passen hierop opnieuw de bovenstaande formule toe:

$$Opp.vlieger = \frac{1}{2}\, a^2 \sin 2\alpha \qquad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt dan direct dat $a^2 = b^2 + c^2$.
Q. E. D.

Opmerking (met dank aan Alexander Bogomolny).

De gekende formule van Heron drukt de oppervlakte van een driehoek uit in functie van de lengte a, b en c van de drie zijden en van de halve omtrek s = (a + b + c)/2

$$Opp.\ driehoek = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Pas de formule van Heron toe op figuur 3.
De oppervlakte van figuur 3 is duidelijk gelijk aan bc en de halve omtrek aan a + b.
Bijgevolg is

$$bc = \sqrt{(a+b)(a+b-a)(a+b-a)(a+b-2b)}$$

zodat

$$b^2c^2 = (a+b)b^2(a-b)$$

en dus is

$$b^2c^2 = (a^2-b^2)b^2.$$

Hieruit volgt dan direct dat

$$c^2 = a^2 - b^2$$

wat opnieuw een bewijs oplevert voor de stelling van Pythagoras.