Fractale dimensie

Eline Sommereyns
6wwli nr.9

Inhoudstabel

Inleiding **3**

Gehele dimensie **4**

- Begrip dimensie 4
- Lengte, breedte, hoogte 4
- Tijd-ruimte 4

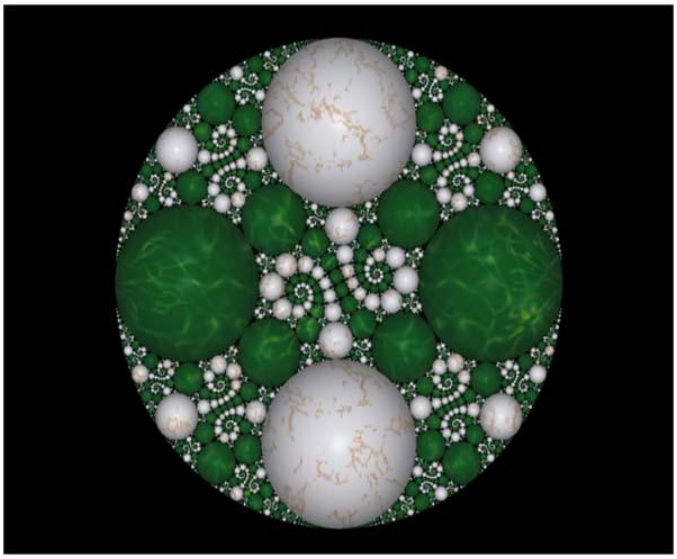
Fractale dimensie **5**

Fractalen 5

- Wat? 5
- Definitie 5
- Eigenschappen 5
- Voorbeelden 5

Fractale dimensie 7

- Kustlijnen en fractalen 7
- Waarom niet geheel? 8
- Berekenen van de dimensie 9



Hausdorff dimensie **13**

- Definitie Hausdorffmaat 13
- Definitie Hausdorff dimensie 13

Besluit **14**

Bronnen **15**

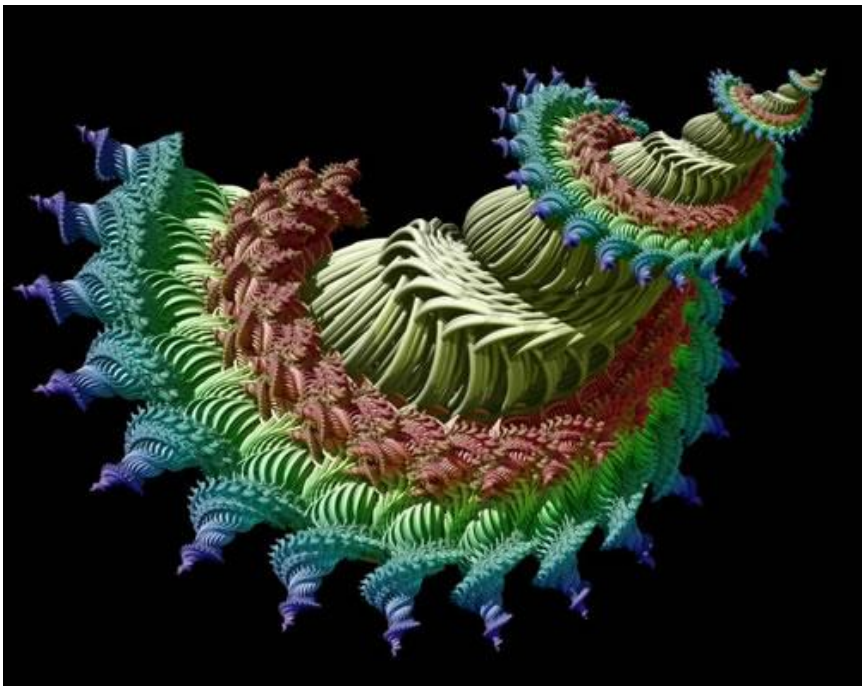
Inleiding

In onze omgeving kennen we drie dimensies. We kunnen deze drie dimensies ook waarnemen. In werkelijkheid zijn er nog veel meer dimensies dan deze drie. Zo bestaat er ook de fractale dimensie. Deze dimensie is in tegenstelling tot de meeste andere dimensies een niet-geheel getal. Toch is de dimensie van fractalen, want dat is de fractale dimensie, berekenbaar.

Vooraleer we bezig gaan zijn met het berekenen van de dimensie van fractalen, gaan we eerst eens kijken naar wat een dimensie nu is. Het is ook noodzakelijk om te weten wat fractalen zijn, dus gaan we het daar ook over hebben.
Een fractaal heeft naast de fractale dimensie nog twee belangrijke eigenschappen waar we het dan gaan over hebben, namelijk zelfgelijkvormigheid en iteratie.

Na deze twee zaken te hebben besproken, kunnen we eindelijk beginnen met de fractale dimensie. Om deze te berekenen wordt er eerst met behulp van de gehele dimensies een algemene formule opgesteld. Deze formule gaan we dan ook toepassen op fractalen en zo gaan we exact de fractale dimensie kunnen berekenen.

De fractale dimensie is eigenlijk een andere naam voor de Hausdorff dimensie, specifiek voor fractalen. Deze dimensie omvat vele dimensies, zoals naast de fractale ook de Euclidische dimensie. In de definitie van de Hausdorff dimensie spreekt men ook over de Hausdorffmaat. Hierover gaat het laatste deel gaan.



Gehele dimensies

Begrip dimensie

Dimensie is het Latijnse woord voor afmeting. Dimensies zijn dus parameters om de vorm en afmeting van een figuur te bepalen. Dit is het meest bekende begrip dimensie en waarover we het hier ook gaan hebben.

Dimensie kan ook een andere betekenis hebben, zoals in de natuurkunde. Daar is dimensie een groothedensoort. Zo is lengte een gronddimensie, en zijn breedte en hoogte van dezelfde groothedensoort.
We kunnen het ook hebben over de dimensie van vectorruimtes. Hierbij wordt het aantal vectoren waaruit de basis is opgebouwd bedoelt.
Zo bestaan er nog veel meer begrippen dimensie.

Lengte, breedte en hoogte

Wij nemen in onze omgeving drie dimensies waar, wat de Euclidische dimensie wordt genoemd. Deze zijn lengte, breedte en hoogte. Dé dimensie is het aantal dimensies dat een figuur bevat. Zo is een figuur eendimensionaal wanneer het juist één dimensie heeft, dus enkel lengte, breedte of hoogte.

Een punt is nuldimensionaal: heeft geen breedte noch lengte noch hoogte.
Een lijn is eendimensionaal: heeft een lengte, maar geen breedte of hoogte.
Een vlak is tweedimensionaal: heeft zowel lengte als breedte, maar geen hoogte.
Een lichaam is driedimensionaal: heeft zowel lengte als breedte als hoogte.

Er bestaan veel ‘valse’ driedimensionale figuren. Zo proberen wij om op een tweedimensionaal vlak (zoals de bovenkant van een blad papier) een driedimensionale figuur weer te geven, door er onder meer schaduw aan toe te voegen.

Tijd-ruimte

Tijd-ruimte bestaat uit de drie ruimtelijke dimensies of de Euclidische dimensie (dus lengte, hoogte en breedte) en uit één tijdsdimensie. De toevoeging van de dimensie tijd maakt dat we een vierdimensionale ruimte krijgen. Dit vloeit voort uit de relativiteitstheorie die zegt dat tijd en ruimte niet los van elkaar staan, maar juist in elkaar verweven zijn.

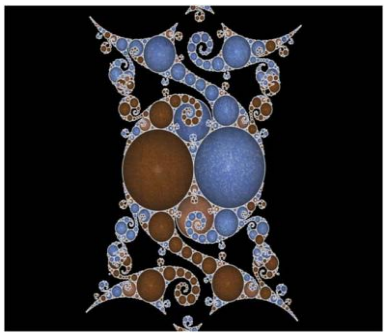
Fractale dimensie

Naast al de gehele dimensies bestaat er ook een niet-gehele dimensie. Deze wordt de fractale dimensie of gebroken dimensie genoemd. Voordat we het over de fractale dimensie zelf kunnen hebben, moeten we eerst weten wat fractalen zijn. De fractale dimensie is immers een belangrijke eigenschap van fractalen.

Fractalen

Voordat we het gaan hebben over de dimensie van fractalen, gaan we het eerst hebben over de fractalen zelf.

Wat?



De naam fractal is afgeleid van het Latijnse woord frangere wat breken betekent. Dit verwijst naar de gebroken dimensie van fractalen. Het zijn meetkundige figuren waarin eenzelfde motief zich steeds herhaalt. Zo ontstaan er grillige randen waarvan de dimensie niet een geheel getal is.
In de fractale geometrie wordt gewerkt met een metrische ruimte[1] met een niet-gehele dimensie.

Definitie

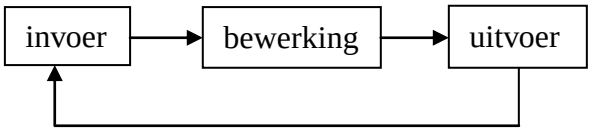
Een fractaal is een verzameling (van punten, curven,. . .) waarvoor de Hausdorff dimensie[2] strikt groter is dan de topologische dimensie.

Eigenschappen

Fractalen hebben drie belangrijke eigenschappen: zelfgelijkvormigheid, iteratie en de gebroken dimensie.

1. *Iteratie*

Iteratie betekent dat elke uitvoer van een bewerking opnieuw wordt ingevoerd.



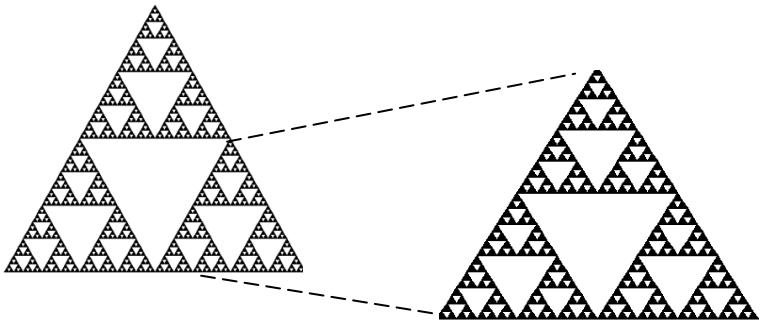
We nemen bijvoorbeeld de bewerking x^2 en we beginnen bij 2 in te voeren. Dan krijgen we $2^2 = 4$. Dan wordt 4 de nieuwe invoerwaarde en krijgen we $4^2 = 16$. Zo kunnen we blijven

[1] Een metrische ruimte is een ruimte *X,d* waarop een afstandsfunctie *d* gedefinieerd is.
[2] Hierover gaan we het later hebben. De fractale dimensie is gelijk aan de Hausdorff dimensie van fractalen, dus we kunnen ook zeggen dat een fractaal een verzameling is waarvoor de fractale dimensie strikt groter is dan de topologische dimensie.

verder gaan. Bij fractalen zorgt dit, de iteratie, ervoor dat je bijvoorbeeld van een lijnstuk naar de kromme van Koch kunt gaan door telkens dezelfde handeling uit te voeren.

2. *Zelfgelijkvormigheid*

Naast de iteratie en gebroken dimensie is de zelfgelijkvormigheid ook een eigenschap van fractalen. Hierbij zal de fractaal zichzelf blijven herhalen naarmate er verder op wordt ingezoomd. Dit heeft tot gevolg dat je maar een deel van een fractaal nodig hebt om de hele fractaal te weten te komen.
Bijvoorbeeld bij de Sierpinski-driehoek zie je dit duidelijk: als je inzoomt, zie je telkens opnieuw dezelfde driehoek terugkomen.



Voorbeelden

Een voorbeeld is het maken van de Koch kromme:

- We beginnen met een lijnstuk. Dit verdelen we in drie gelijke stukken.

- Het middelste stuk vervangen we door 2 even grote stukken die een hoek van 60° vormen.

- Nu delen we deze lijnstukken op in telkens drie even lange lijnstukken. En vervangen we het middelste stuk door 2 even grote lijnstukken die een hoek van 60° vormen. Zo blijven we verder gaan. (iteratie)

Na 100 keer krijgen we dit:

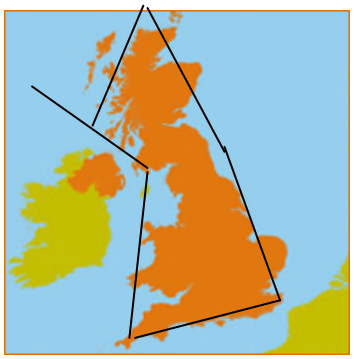
Op deze manier worden de meeste fractalen gemaakt. Zo is het ook mogelijk om zelf fractalen te maken, zolang ze maar de drie eigenschappen bezitten. Er bestaan dus heel veel fractalen zo.

Fractale dimensie

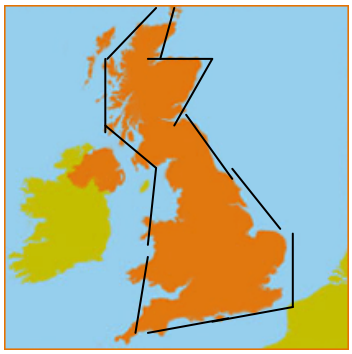
We weten nu wat een dimensie is en wat fractalen zijn, dus gaan we het nu eindelijk hebben over de fractale dimensie. Deze eigenschap van fractalen is vrij speciaal, want we kennen enkel dimensies bestaande uit een natuurlijk getal.

Kustlijnen en fractalen

Bij vlakken en lichamen zijn de dimensies makkelijk te bepalen, maar als het kronkelige lijnen zijn wordt het al veel moeilijker. Een goed voorbeeld is de kustlijn. Bij een kustlijn met vele bochten en kronkels erin zal een meetlat dat twee keer kleiner wordt dan het oorspronkelijke, niet twee keer meer erop passen. De meetlat zal er meer dan twee keer inpassen, bijvoorbeeld twee-en-een-half keer of drie keer. Hoe kleiner de meetlat wordt, hoe meer hij erop gaat passen. De kustlijn is dan niet tweedimensionaal, maar ook niet driedimensionaal.

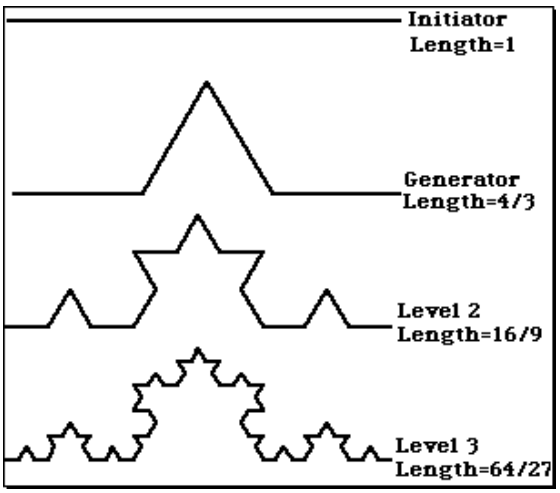


Hier gaat het lijnstuk 5 en een halve keer er rond.



Als we nu de helft van dat lijnstuk nemen, verwachten we dat het er 11 keer op past. Wanneer we het toepassen zien we dat het er 13 keer op past.

Net hetzelfde geldt voor fractalen. In onderstaande afbeelding staan de eerste stappen om de kromme van Koch te maken.

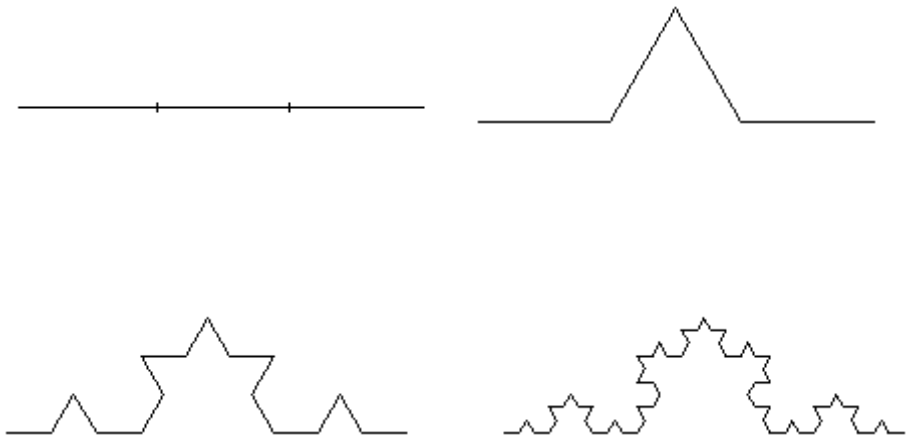


We zien dat de lengte steeds groter wordt.
Als we op de kromme van Koch een lat met lengte één zouden leggen zouden we de eerste afbeelding hebben. Stel dat we nu onze lat verkleinen tot een derde, dan past het vier keer op de kromme van Koch en geen drie keer, zoals we zouden verwachten. Als we zo steeds kleiner gaan, zien we dat we steeds meer dan de verwachte aantallen bekomen. Net zoals de lengte steeds groter wordt.

Waarom niet geheel?

Fractalen zullen door hun grillige randen altijd een niet gehele dimensie hebben. In tegenstelling tot het voorbeeld met de kustlijn, zullen we bij fractalen wel de exacte dimensie kunnen bepalen.

Om aan te tonen hoe we bij deze niet-gehele dimensie terecht komen, maken we gebruik van de constructie van de kromme van Koch. We begonnen met een lijnstuk. Dit is eendimensionaal.



Na 100 keer kregen we dit:

De kromme van Koch neemt op den duur ook in hoogte toe naar een 2 dimensionale figuur. Toch blijft het tussen een eendimensionaal lijnstuk en een tweedimensionaal vlak. Zo krijgen we de niet-gehele dimensie. De kromme van Koch is ongeveer 1,2618 dimensionaal.

Elke fractaal is op een gelijksoortige manier opgebouwd, waardoor elke fractaal noch een lijn, noch een vlak, noch een lichaam zal zijn.

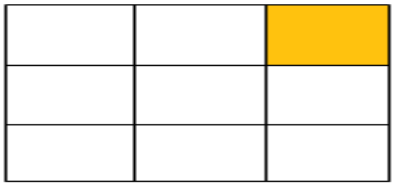
Berekenen van de dimensie

Zoals al eerder vermeld, is het mogelijk om exact de dimensie van fractalen te bepalen. Hiervoor zoeken we een verband tussen de vergrotingsfactor, het aantal gelijkvormige delen en de dimensie zelf.

1. *Verband bij gehele dimensionale figuren*

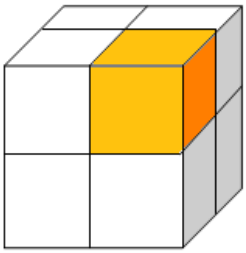
Stel we willen een rechthoek creëren die drie keer zo groot is als de oorspronkelijke. We hebben een willekeurige rechthoek met zijden a en b genomen. Om de gewilde rechthoek te creëren moeten we beide zijden verdrievoudigen. Onze nieuwe rechthoek heeft dus zijden 3a en 3b.

Nu willen we weten hoeveel van de oorspronkelijke rechthoeken in deze nieuwe rechthoek passen. Hiervoor gebruiken we de oppervlakte. De oorspronkelijke rechthoek heeft een oppervlakte van ab en de nieuwe heeft een oppervlakte van 9ab. De oorspronkelijke rechthoek past dus negen keer in de nieuwe.



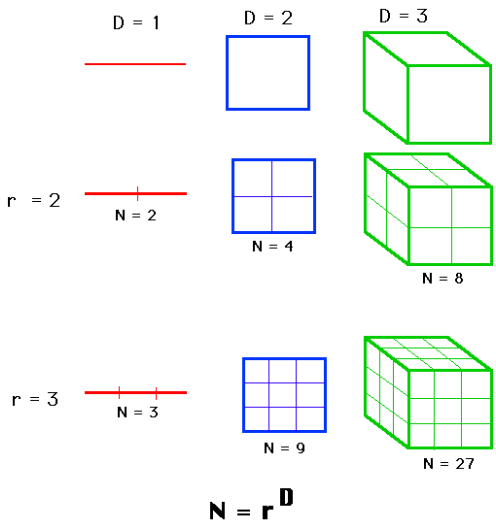
Wat we zojuist hebben gedaan kunnen we ook omschrijven als volgt: we hebben onze rechthoek eerst met drie vermenigvuldigt om de gewenste lengte van zijde a te krijgen, en dan nog eens met drie vermenigvuldigt om de gewenste lengte van zijde b te krijgen. Zo krijgen we ook onze nieuwe rechthoek. We weten dat als we drie vermenigvuldigen met drie het negen is (dus negen rechthoekjes geraken er in de grote). Als we dit als volgt schrijven $9 = 3^2$, zien we dat de twee verwijst naar de dimensie (lengte een breedte). Wat de vergrotingsfactor ook is en wat het aantal zelfgelijkvormige figuren ook zijn, het zal altijd tot de tweede worden gedaan bij vlakken. Vandaar dat een vlak dus tweedimensionaal is.

Wanneer we hetzelfde doen voor een kubus merken we dat de vergrotingsfactor altijd tot de derde zal worden gedaan, terwijl het voor de lijnstukken tot de eerste wordt gedaan.



Zo kunnen we dus zeggen dat een kubus driedimensionaal is want willen we bijvoorbeeld een kubus creëren die twee keer zo groot is als de oorspronkelijke, dan hebben we acht kubussen hiervoor nodig en $8 = 2^3$.

Een lijnstuk is dan eendimensionaal want we hebben zes van deze lijnstukken nodig om er eentje te maken die zes keer zo groot is, dus $6 = 6^1$.



We kunnen dus zeggen dat het aantal gelijkvormige figuren gelijk is aan de vergrotingsfactor tot de eerste, tweede of derde macht is, afhankelijk van de dimensie. Algemeen kunnen we dit dan schrijven als :

$$s^d = a$$

met d, de gelijkvormigheidsdimensie
s, de reductiefactor (of vergrotingsfactor)
a, het aantal delen dat gevormd wordt

Bij deze afbeelding is N het aantal delen (a) en r de reductiefactor (s).

2. *Bij fractalen*

De formule die we bekomen waren voor de gehele dimensie kunnen we ook toepassen bij fractalen. Als we deze formule oplossen naar *d* krijgen we:

$$d = \frac{\log a}{\log s}$$

Met deze formule kunnen we dus zowel de dimensie van fractalen bepalen als van andere figuren (met een gehele dimensie).

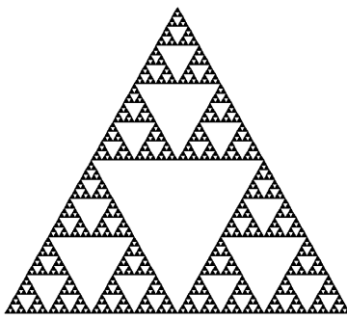
Hieronder staan enkele fractalen en hun fractale dimensie:

- Sierpinski driehoek:

  $a = 3$ (3 nieuwe gelijkvormige driehoeken)

  $s = 2$ (de zijde wordt 2 keer kleiner)

  $$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}584962501 \ldots$$



- Kromme van Koch

$a = 4$

$s = 3$

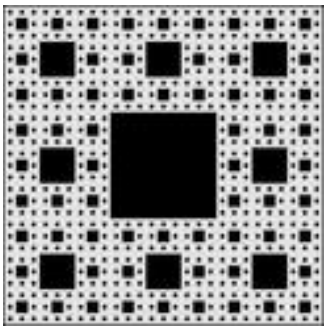
$$d = \frac{\log 4}{\log 3}$$
$$= 1{,}261859507 \ldots$$

- tapijt van Sierpinski

$a = 8$

$s = 3$

$$d = \frac{\log 8}{\log 3}$$
$$= 1{,}892789261 \ldots$$

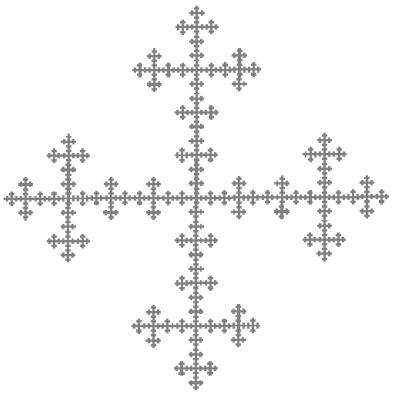


- Boxfractal

$a = 5$

$s = 3$

$$d = \frac{\log 5}{\log 3}$$
$$= 1{,}464973521 \ldots$$



- Cantor verzameling

$a = 2$

$s = 3$

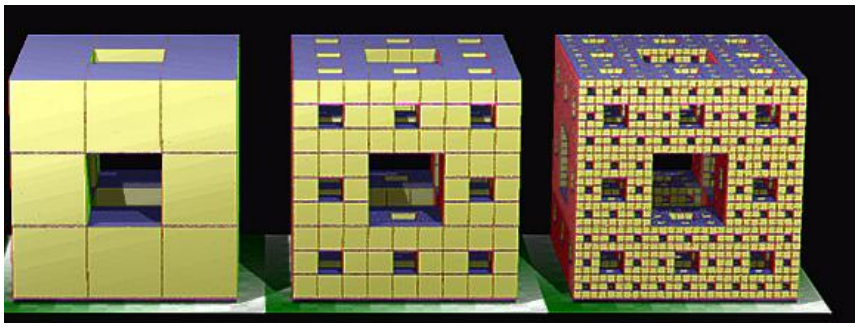
$$d = \frac{\log 2}{\log 3}$$
$$= 0{,}63092975 \ldots$$

- spons van Menger

  $a = 20$

  $s = 3$

  $d = \frac{\log 20}{\log 3}$
  $= 2{,}726833028 \ldots$



Sommige fractalen hebben een dimensie tussen nul en één, ze zijn dus net geen lijnstuk. Anderen hebben een dimensie tussen één en twee. Deze komen het meeste voor, want er wordt ofwel van eendimensionale figuur vertrokken die zich eerder naar een vlak vormt (kromme van Koch) ofwel vertrekkend van een tweedimensionale figuur die kleiner wordt (Sierpinski driehoek). Als laatste heb je ook nog fractalen met een dimensie tussen twee en drie, zoals de Sierpinski kubus. De fractale dimensie ligt dus telkens ergens tussen de voor ons bestaande dimensies (0,1,2 en 3).

Het verschil tussen de dimensie van fractalen en de dimensie van andere figuren is dat elke fractaal een unieke dimensie heeft. Zo zien we dat geen enkel van de voorgaande fractalen een gelijke dimensie hebben, terwijl elk vlak tweedimensionaal zal zijn.

Hausdorff dimensie

De Hausdorff dimensie is vernoemd naar de Duitse wiskundige Felix Hausdorff. Hij introduceerde het begrip voor het eerst in 1918. De Russische wiskundige Abram Besicovitch ontwikkelde later de manieren om de Hausdorff dimensie te berekenen, vandaar dat het ook de Hausdorff-Besicovitch dimensie wordt genoemd.
De fractale dimensie en de Euclidische dimensie zijn afgeleiden van de Hausdorff dimensie. De formule om de fractale dimensie te bepalen, is dan ook een vereenvoudigde versie van de formule om de Hausdorff dimensie te bepalen.

Voor de definitie maakt men gebruik van ongeveer hetzelfde principe als voor de fractale dimensie, maar dan wordt in de plaats van 'meetlatten', bolletjes gebruikt.
De figuur waarvan we de Hausdorff dimensie wensen te berekenen overdekken we met bolletjes met een bepaalde diameter. We tellen het aantal bolletjes. Dan wordt de diameter kleiner gemaakt, bijvoorbeeld gehalveerd, en tellen we opnieuw. We verwachten dat er twee keer meer bolletjes op zullen passen, maar net zoals bij de fractalen zal dat ook meer kunnen zijn.

De definitie van de Hausdorff dimensie maakt gebruik van de Hausdorffmaat. De Hausdorffmaat is een maat (afmeting of volume) van een deelverzameling van een metrische ruimte.

Definitie Hausdorffmaat

De Hausdorffmaat $m_\sigma(X)$, met $\sigma \geq 0$, is gedefinieerd voor elke $X \subset [0,1]$ door:

$$m_\sigma(X) = \lim_{\epsilon \to 0^+} inf\ (\sum_i \delta(S_i)^\sigma) \leq \infty$$

Het infimum wordt genomen over alle aftelbare bedekkingen van X met intervallen $S_1,\ S_2,\ \ldots$ van lengte $\delta(S_i) \leq \epsilon$.

Hierin is $\delta(S_i)$ de diameter, waarvoor geldt:

De diameter $\delta(S)$ van een deelverzameling S van een metrische ruimte X, d, is gedefinieerd als de maximum afstand in S onder d.

$$\delta(S) = sup\{d(x,y): x, y \in S\}$$

Definitie Hausdorff dimensie

Gegeven zijn $X \subset [0,1]$ en een Hausdorffmaat $m_\sigma(X)$:
Als er een getal D_f bestaat zo dat

$$m_\sigma(X) = 0 \; voor \; \sigma > D_f$$

$$m_\sigma(X) = \infty \; voor \; \sigma < D_f$$

dan is D_f de Hausdorff dimensie.

We kunnen het zien als volgt:

Hoeveel intervallen met lengte 1/10 zijn er minstens nodig om [0,1] te overdekken? Het antwoord hierbij is 10.

Als we intervallen met een lengte ϵ nemen, dan zijn er 1/ϵ intervallen nodig om [0,1] te overdekken.

Als we de diameter $\delta(S_i) = \epsilon$ nemen, dan hebben we dus 1/ϵ intervallen nodig met telkens een lengte ϵ.
Dan nemen we een kleinere diameter (want $\delta(S_i) \leq \epsilon$), bijvoorbeeld $\delta(S_i) = \frac{\epsilon}{2}$. Bij een figuur met een gehele dimensie, zal het aantal intervallen dat nodig is 2 keer meer zijn dan bij de vorige, dus 2/ϵ. Als het daarentegen een niet-gehele dimensie heeft, dan zullen er meer of minder intervallen zijn.
Stel dat we nu in totaal minder intervallen krijgen. We krijgen dan een n-aantal intervallen met lengte ϵ/2 en waarbij $n < 2/\epsilon$.

Een deel van de definitie van de Hausdorffmaat zegt:

$$\sum_i \delta(S_i)^\sigma$$

We kunnen dus voor de verschillende waarden van $\delta(S_i)$ de som berekenen:

$$\epsilon^\sigma + \epsilon^\sigma + \epsilon^\sigma + \cdots + \epsilon^\sigma = \frac{1}{\epsilon}\epsilon^\sigma = \epsilon^{\sigma-1}$$

$$\frac{\epsilon^\sigma}{2} + \frac{\epsilon^\sigma}{2} + \frac{\epsilon^\sigma}{2} + \cdots + \frac{\epsilon^\sigma}{2} = n\frac{\epsilon^\sigma}{2}$$

Zo kunnen we telkens de som bepalen waarbij de diameter steeds kleiner wordt. Het infimum van al deze verschillende waarden zal dan zijn voor de kleinste waarde van $\delta(S_i)$ en dus ook meteen voor $\lim_{\epsilon \to 0^+}$.

Als de diameter steeds kleiner wordt, kunnen we het gaan schrijven als 1/aϵ, waarbij a een steeds groter wordend getal is. Dan krijgen we als we het infimum van alle waarden pakken het volgende:

$$q.\frac{1}{a\epsilon}^{\sigma}$$

Waarbij q het aantal intervallen voorstelt.

Stel dat we nu $\sigma = 1$ nemen. De limiet van ϵ naar 0 zal dan oneindig zijn.
Stel $\sigma = 2$, dan zal de Hausdorffmaat ook oneindig zijn. Ook voor reële getallen, zoals 0,2, is de Hausdorffmaat oneindig. Dit geldt dus voor alle $\sigma \in \mathbb{R}_0$.

➔ Voor alle $\sigma \in \mathbb{R}_0$, is de Hausdorffmaat oneindig.

Stel $\sigma = 0$. Dan zal de Hausdorffmaat gelijk zijn aan q.

Stel σ oneindig groot, dan zal de breuk zo klein worden dat het praktisch nul is, waardoor de limiet hiervan 0 zal zijn. De Hausdorffmaat is dan 0.

➔ Voor σ oneindig groot is de Hausdorffmaat 0.

Bijvoorbeeld:
De dimensie van de Cantorverzameling is 0,63.
Dit is de Hausdorff dimensie want:

Er bestaat een σ kleiner dan de dimensie waarvoor de Hausdorffmaat oneindig is.
Er bestaat ook een σ groter dan de dimensie, waarvoor de Hausdorffmaat 0 is.

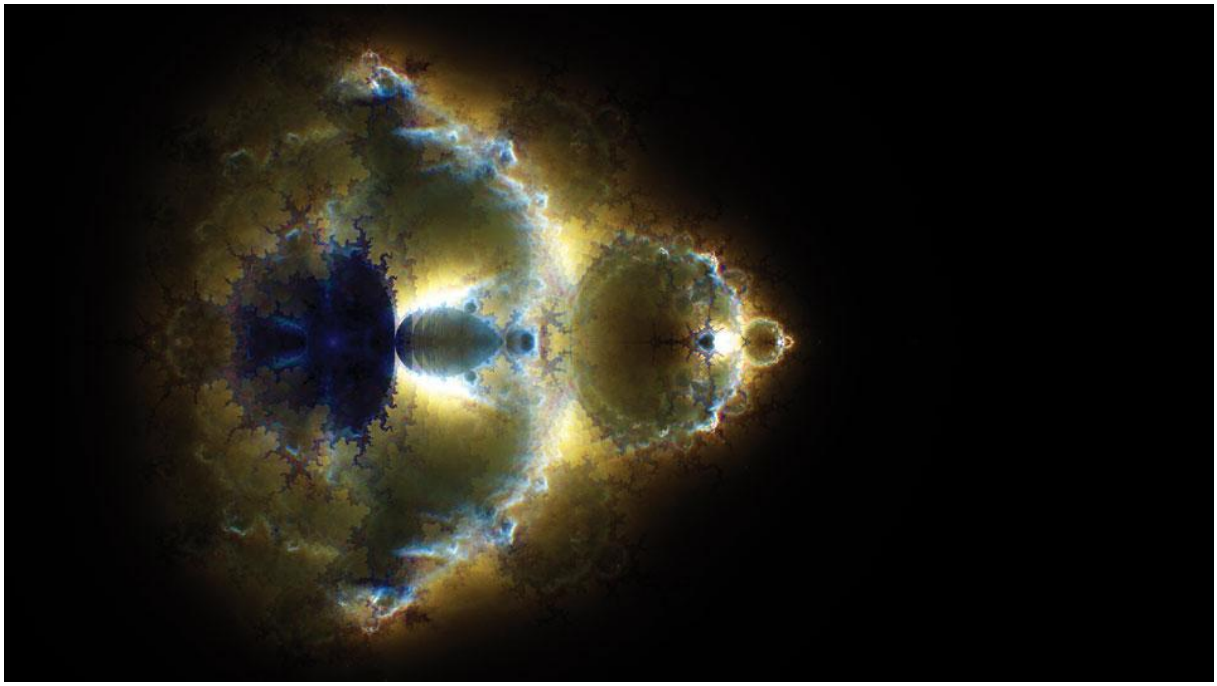
Besluit

Door de grillige vormen van fractalen hebben ze geen gehele dimensie. De fractale of gebroken dimensie is dus een zeer belangrijke eigenschap van fractalen.
We hebben een formule gevonden om de fractale dimensie exact te bepalen, namelijk

$$d = \frac{\log a}{\log s}$$

waarbij a het aantal zelfgelijkvormige delen voorstelt en s de reductiefactor. Aan de hand van deze formule hebben we de dimensie voor enkele fractalen kunnen bepalen. We kwamen tot de conclusie dat de fractale dimensie uniek is en nooit een geheel getal zal zijn.

De fractale dimensie maakt deel uit van de Hausdorff dimensie en de formule is een vereenvoudigde versie van de formule om de Hausdorff dimensie te bepalen. De Hausdorff dimensie voor fractalen is gelijk aan de fractale dimensie en voor punten, lijnen en vlakken is het gelijk aan de Euclidische dimensie ervan. We hebben de Hausdorff dimensie gedefinieerd aan de hand van de Hausdorffmaat. De Hausdorffmaat zelf hebben we ook kunnen definiëren met behulp van de diameter van een deelverzameling in een metrische ruimte.



Bronnen

Dimensie:

http://www.philipvanegmond.nl/wiskunde/dim1-n.htm

http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html

http://nl.wikipedia.org/wiki/Dimensie_%28algemeen%29

http://www.fabc.info/fysica1.htm

http://nl.wikipedia.org/wiki/Ruimtetijd

http://www.onzichtbaar.com/dimensies.html

Fractalen:

http://www.fractal.org/Fractaaltjes/Fractale-Ondernemen.htm

http://www.fractalen.net/html/algemeen.html

Fractale dimensie:

http://users.telenet.be/wild/wiskunde/dimensies.html

http://simone.neuro.kuleuven.ac.be/Fractals/gemeenschappelijke_basis.html#gebroken%20dimensie

http://home.hccnet.nl/s.f.boukes/fractals/fracmatj.htm

http://home.hccnet.nl/s.f.boukes/fractals/fracmatk.htm

Hausdorff dimensie:

http://biblio.ugent.be/input/download?func=downloadFile&fileOId=523017 (p49-50)

http://nl.wikipedia.org/wiki/Hausdorff-dimensie

http://nl.wikipedia.org/wiki/Hausdorffmaat

boeken:
Waarom is de blauwe hemel blauw? Van orde, chaos en fractalen, A. Warrinnier
Fractalen: een geheime code van de natuur gebroken, P. Geerlings en R. Finsky