

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bewijs.

Vertrek van de formule $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ en vervangen hierin achtereenvolgens x door $0, 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} x=0 & : 1^3 = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 \\ x=1 & : 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ x=2 & : 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ & \dots \\ x=n & : (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1. \end{aligned}$$

De som van de getallen in het linkerlid is uiteraard gelijk aan de som van de getallen uit het rechterlid. Merk op dat je dan in beide leden $1^3, 2^3, \dots, n^3$ kunt schrappen zodat er in de som van de rechterleden enkel nog $(n+1)^3$ overblijft.

Dan is

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + (n+1).$$

Maak nu gebruik van de gekende formule

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dus is

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

zodat

$$\begin{aligned} 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) &= (n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{(n+1)[(2n+1)^2 - 3n - 2]}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt het gewenste resultaat.

Opmerking. Je kunt de formule uiteraard ook bewijzen via volledige inductie, maar dan veronderstel je natuurlijk dat de formule al gekend is!