

Puzzels met getallen

Dr. Luc Gheysens

Mijn ouders losten nooit getallenpuzzels op en hadden twee zonen. Onze kinderen heten Liesbeth en Marlies.

Van magisch vierkant tot sudoku

Reeds eeuwenlang zijn wiskundigen gefascineerd door magische vierkanten. Deze vierkantige getallenroosters waarin de natuurlijke getallen van 1 tot en met n^2 in n rijen en n kolommen worden gerangschikt, hebben de magische eigenschap dat de som van de n getallen op elke

rij, in elke kolom en op de twee diagonalen telkens gelijk is aan $\frac{n(n^2 + 1)}{2}$, de zogenaamde magische constante van het vierkant. Het beroemdste vierkant van orde 3 (met 3×3 vakjes) is de zogenaamde Lo Shu en bevat de cijfers van 1 tot en met 9:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

De vraag rijst meteen of er een algemene formule bestaat voor magische vierkanten van orde 3 als men toelaat dat hierin willekeurige getallen staan. Het was de Franse wiskundige Edouard Lucas (1842 – 1891) die deze formule vond:

$x+y$	$x-y-z$	$x+z$
$x-y+z$	x	$x+y-z$
$x-z$	$x+y+z$	$x-y$

Voor alle waarden van x , y en z levert het bovenstaande rooster een magisch vierkant op met $3x$ als magische constante.

Magische vierkanten vormden ongetwijfeld de inspiratiebron voor sudoku's die sedert 2005 in heel wat kranten verschenen. Sudoku betekent in het Japans 'uniek cijfer'. In een rooster met 9 maal 9 vakjes staan een aantal cijfers ingevuld. Het is de bedoeling dat in elke horizontale rij, in elke verticale kolom en in elk 3×3 -blok de cijfers van 1 tot en met 9 telkens precies één keer voorkomen. Voor een dergelijke puzzel is er maar één oplossing mogelijk.

Het was uiteindelijk Wayne Gould, een gepensioneerde rechter uit Matamata in Nieuw-Zeeland die op het lumineus idee om een computerprogramma te ontwikkelen om sudoku's aan te maken. Hieraan werd ongeveer zes jaar gewerkt en uiteindelijk werd de puzzel in 2004 in het Verenigd Koninkrijk geïmporteerd door de Daily Mail.

Sindsdien doken heel wat andere getallenpuzzels (vaak met Japanse namen) op in diverse dagbladen zoals bv. kakuro, sumbrero, kuromasu, futoshiki, hitori ... Creatieve geesten

bedachten ook allerlei varianten op de originele sudoku, zoals bv. de tridoku, de cross-sudoku, de chaossudoku ... Op puzzelland.com kom je hiervoor ongetwijfeld aan je trekken en voor de driedimensionale variant tredoku verwijzen we naar www.tredoku.com.

Van Loyd tot Dudeney

De Amerikaan Sam Loyd (1841-1911) en de Engelsman Henry Ernest Dudeney (1857-1930) mag men terecht als de twee grootste puzzelbedenkers aller tijden bestempelen. Ze waren tijdgenoten en concurrenten, maar wisselden ook veel ideeën uit. Hun getallenpuzzels en meetkundige vraagstukken verschenen in heel wat kranten en tijdschriften.

De getallenpuzzel waarmee Sam Loyd wereldberoemd werd (maar die hij waarschijnlijk niet zelf heeft bedacht) is ongetwijfeld de 14-15-puzzel, die bestaat uit 15 blokjes en één leeg vakje. Hij loofde 1 000 dollar uit voor wie erin zou slagen door het verschuiven van de cijferblokjes van de situatie 1 naar de situatie 2 over te gaan.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	.

Situatie 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	.

Situatie 2

Uiteindelijk bleek deze puzzel onoplosbaar te zijn!

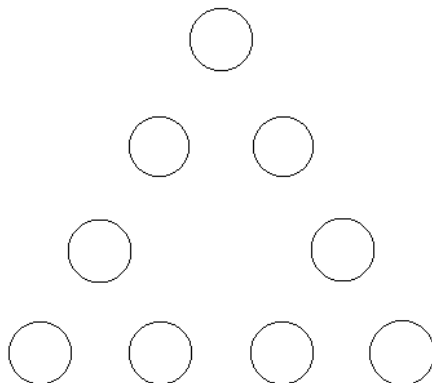
Een leuke puzzel van Dudeney, geïnspireerd op een magisch vierkant van orde 3 is de volgende. In het vierkant hieronder komen de cijfers van 1 tot en met 9 precies één keer voor en het getal op de twee rij (384) is precies het dubbel van het getal op de eerste rij (192). Bovendien is het getal op de derde rij (576) die drievoud van het getal op de eerste rij. Kan jij een andere oplossing bedenken die aan dezelfde voorwaarden voldoet? Tip: er zijn drie andere oplossingen.

1	9	2
3	8	4
5	7	6

De puzzels van Loyd en Dudeney werden in de vorige eeuw vooral door Martin Gardner (1914 – 2010) terug in de belangstelling gebracht in zijn populaire boeken en zijn artikels in The Scientific American, waarin hij ook heel wat originele getallenpuzzels publiceerde. Ook de puzzelredacteur David Wells verzamelde heel wat van deze hersenbrekers in zijn puzzelboeken, die in het Nederlands werden uitgegeven.

In Rusland leefde een gerenommeerd puzzelfanaat, die heel wat leuke getallenpuzzels bedacht, nl. Boris Kordemsky (1907 – 1999), een wiskundedocent uit Moskou. Hieronder vind je één van de 359 puzzels uit zijn boek ‘The Moscow Puzzles’.

Plaats de cijfers van 1 tot en met 9 in de cirkeltjes in het diagram zodat de som van de vier cijfers langs de drie zijden gelijk is aan 17. En hoe kan je ze rangschikken zodat de som langs de drie zijden telkens gelijk is aan 20? We vonden zelfs een schikking waarbij de som telkens 21 is. Kan jij deze oplossingen vinden?



Van alphametics tot mastermind

Een *cryptarithm* is een getallenpuzzel waarbij in een rekenkundige som verschillende cijfers worden vervangen door verschillende letters of symbolen. Wanneer in een dergelijke puzzel de lettercombinaties bovendien bestaande woorden opleveren, spreekt men van een *alphametic*, een term die door J.A.H. Hunter werd bedacht in 1955.

Het meest gekende voorbeeld van een alphametic is ongetwijfeld de puzzel die Henry Dudeney in 1924 publiceerde: SEND + MORE = MONEY, met als oplossing $9\ 567 + 1\ 085 = 10\ 652$. Andere voorbeelden vind je o.a. op de website www.cryptarithms.com.

In zijn puzzelboek ‘Madachy’s Mathematical Recreation’ verzamelde Joseph S. Madachy, die jarenlang de uitgever was van het Amerikaanse tijdschrift Journal of Recreational Mathematics, een aantal leuke alphametics waaronder deze ‘Franse’ som:

$$\begin{array}{r}
 \text{UN} \\
 \text{UN} \\
 \text{DEUX} \\
 + \text{DOUZE} \\
 \hline
 \text{SEIZE}
 \end{array}$$

Voor deze puzzel blijken er zelfs twee oplossingen te bestaan: $35 + 35 + 8\ 230 + 84\ 372 = 92\ 672$ en $34 + 34 + 8\ 632 + 87\ 316 = 96\ 016$.

Ik bedacht de volgende puzzel (verschillende letters stellen verschillende cijfers voor):

$$\sqrt{VROUW} = MAN.$$

Kan jij (met behulp van een rekentoestel) hiervoor een oplossing vinden? En is er meer dan één oplossing?

Getallenpuzzels waarin alle cijfers van 1 tot en met 9 één keer voorkomen, hebben altijd al een magische aantrekkingskracht gehad. Zo biedt de website <http://puzzlemaker.discoveryeducation.com> de mogelijkheid om zelf een aantal leuke getallenpuzzels te maken (en op te lossen). Hieronder zie je een voorbeeld van een 'Math Square', waarin naast elke rij en onder elke kolom de uitkomst staat van een bewerking en waarbij alle cijfers van 1 tot en met 9 precies één keer moeten ingevuld worden.

	+		+		23
-		/		×	
	-		-		0
+		×		+	
	+		+		8
6		9		41	

Een ander soort getallenpuzzel waarbij een codegetal moet worden geraden, vindt zijn oorsprong in het populaire spelletje mastermind. Hierbij is het de bedoeling een geheim getal van vier cijfers te vinden in te vullen in de onderste vakjes). Telkens worden eerst vier getallen gegeven waarvan enkele kenmerken worden verklapt die zij gemeen hebben met het geheime getal:

- voor elk juist cijfer op de juiste plaats.
- voor elk juist cijfer dat niet op de juiste plaats staat.

Opgelet. In het geval dat een cijfer meer dan één keer voorkomt in het gezochte getal geldt het volgende : het krijgt een rondje als het in het geheime getal een keer voorkomt; het krijgt twee rondjes als het in het geheime getal twee keer voorkomt, enz. De zwarte rondjes worden eerst toegekend, dan de witte. Elk hokje van het gegeven getal kan niet meer dan één rondje (zwart of wit) toegewezen krijgen.

Voorbeeld.

1	8	5	○
8	7	5	● ○
5	7	4	●
4	0	1	○

--	--	--

Van ‘des chiffres en des lettres’ tot flippo’s

In het begin van de jaren '70 dook op de Franse televisie een spelprogramma op dat bestond uit twee delen: twee kandidaten moesten met behulp van een aantal willekeurig gekozen letters een zo lang mogelijk woord proberen te vormen en daarna moesten ze met behulp van 6 getallen (kleiner dan 10 of veelvoud van 5) via de hoofdbewerkingen (+, -, x en :) een willekeurig gekozen getal tussen 100 en 999 zo dicht mogelijk proberen te benaderen. Niet alle zes getallen moesten hiervoor gebruikt worden. Het programma kreeg de evidente naam ‘Des chiffres en des lettres’ en verscheen zowel op de Vlaamse als op de Nederlandse televisie onder de naam ‘Cijfers en letters’. Ik verbaasde me er steeds over hoe één van de medewerkers (die bekend stond als ‘het rekenwonder’) er haast altijd in slaagde exact het getal van drie cijfers als uitkomst te bekomen.

Een voorbeeld: vorm met de getallen 6, 10, 25, 50, 8 en 75 het getal 456.

Oplossing: $((50 : 25) + 75) \times 6 - 10 + 4 = 456$, want

$$50 : 25 = 2$$

$$2 + 75 = 77$$

$$77 \times 6 = 462$$

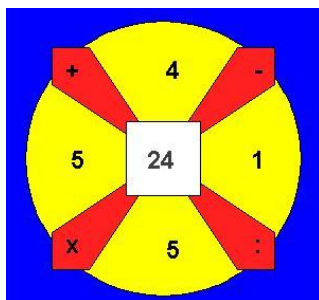
$$462 - 10 = 452$$

en $452 + 4 = 456$.

Voor wie over een eenvoudig computerprogramma beschikt (zoals misschien ook ‘het rekenwonder’ uit de TV-uitzending er eentje ter beschikking had?) is het oplossen van een dergelijke rekensom nu een koud kunstje. Je vindt een dergelijk rekenprogramma bijvoorbeeld op de website van collega Aad van de Wetering: <http://home.wxs.nl/~avdw3b/aad.html> (zoek daar naar het programma ‘Reken’).

Een tweede soort getallenpuzzel dat gemakkelijk via een dergelijk rekenprogramma kan worden opgelost is het zogenaamde 24-spel, dat in de jaren '90 op de zogenaamde flippo's in zakjes chips opdook. Op deze flippo's stonden vier cijfers afgebeeld en het was de bedoeling om hiermee via de vier hoofdbewerkingen (+, -, x en :) precies 24 te vormen. Alle cijfers moesten bovendien precies één keer gebruikt worden.

Een eenvoudig voorbeeld:



Oplossing: $5 \times 4 + (5 - 1) = 24$.

Op de website www.fi.uu.nl/toepassingen/03002/toepassing_rekenweb.html van het Freudenthalinstituut kan je dit spelletje, dat de rekenvaardigheid stimuleert en bovendien de volgorde van de bewerkingen leert te gebruiken, online spelen.

Een leuke uitdaging waarmee de doorsnee-puzzelaar die vertrouwd is met het 24-spel heel wat moeite kan hebben, is de vraag om met behulp van de vier cijfers 1, 4, 5 en 6 via de vier hoofdbewerkingen +, x, - en : het getal 24 te vormen. Hiervoor zijn er twee oplossingen, nl. $6 : ((5:4) - 1) = 6 : 1/4 = 24$ en $4 : (1 - (5:6)) = 4 : 1/6 = 24$.

Van Diophantos tot Augustus de Morgan

Heel wat getallenpuzzels zijn vraagstukjes waarbij men met behulp van een vergelijking met één onbekende of via een stelsel van twee of meer vergelijkingen met 2 of meer onbekenden tot een oplossing kan komen. We geven hieronder enkele voorbeelden, waarbij sommige opgaven ‘klassiekers’ zijn in het domein van de getallenpuzzels.

Probleem 1

De Griekse wiskundige Diophantos leefde in de derde eeuw na Chr. in Alexandrië. Naar hem worden vergelijkingen waarbij men gehele getallen als oplossing zoekt *diophantische vergelijkingen* genoemd. Over zijn leeftijd kennen we het volgende raadsel:

“Diophantos’ jeugd maakte het zesde deel van zijn leven uit; na verder een twaalfde kreeg hij een baard; na verder een zevende trouwde hij en zijn zoon werd vijf jaar daarna geboren; de zoon werd maar half zo oud als zijn vader en de vader overleed vier jaar na de zoon. Hoe oud werd Diophantos?”

Oplossing.

Als x de leeftijd is van Diophantos, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de volgende vergelijking: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$ met als oplossing $x = 84$.

Probleem 2

Drie mannen bezitten elk een aantal goudstukken. De eerste geeft aan de beide anderen evenveel goudstukken als ze al hadden. Daarna doet de tweede hetzelfde en tenslotte de derde ook. Op het einde hebben ze elk 8 goudstukken. Hoeveel hadden ze er bij het begin? (Probleem van Claude Gaspard Bachet, 18^{de} eeuw).

Oplossing.

Men kan dit probleem op de klassieke manier oplossen via een stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden. Men kan echter ook ‘achteruit’ redeneren: op het einde hebben ze elk 8 euro's, dus vooraleer de derde persoon er uitdeelde aan beide anderen hadden ze er resp. 4, 4 en 16. Vooraleer de tweede persoon er uitdeelde had de eerste er 2 en de derde 8 en bijgevolg had de tweede er 14. Dan had de tweede er aanvankelijk 7 en de derde 4, zodat de eerste 13 goudstukken had (aangezien het totaal aantal goudstukken gelijk is aan 24).

Probleem 3

Een moeder is 21 jaar ouder dan haar dochter. Over 6 jaar zal die moeder 5 keer zo oud zijn als haar dochter. Waar bevindt de vader zich momenteel?

Oplossing.

Noem x de leeftijd van de dochter en y de leeftijd van de moeder. Dan is

$$\begin{cases} y = x + 21 \\ y + 6 = 5(x + 6) \end{cases}$$

met als oplossing voor x : $x = -\frac{3}{4}$, d.i. 9 maanden voor de geboorte. De vader bevindt zich dus heel dicht bij de moeder ...

Probleem 4

Hieronder zie je 10 kaartjes waarop de cijfers van 0 t.e.m. 9 staan afgebeeld. Hoe kan je, door hoogstens twee kaartjes van positie te veranderen, ervoor zorgen dat de sommen van de vijf cijfers in beide kolommen gelijk zijn?

8	2
4	1
5	9
0	3
7	6
+	+
_____	_____

Oplossing.

Aangezien de som $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$ een oneven getal is kunnen de uitkomsten van beide optellingen niet gelijk zijn aan elkaar, tenzij ... men het kaartje met het cijfer 6 omdraait zodat het een 9 wordt!

Probleem 5

Twee Arabieren, van wie de ene 5 broden heeft en de andere 3, ontmoeten een rijke en uitgehongerde derde Arabier. Ze besluiten hun broden te delen zodat iedereen even veel te eten krijgt. Uit dankbaarheid schenkt de rijke Arabier hen na de maaltijd 8 goudstukken. De eerste Arabier beweert dat hij recht heeft op 5 goudstukken zodat de tweede er dan 3 krijgt. De tweede Arabier stelt echter voor dat ze er elk 4 zouden krijgen. Wie heeft gelijk?

Oplossing.

Als men de 8 broden telkens in 3 gelijke stukken verdeelt, heeft men 24 stukken. Elke Arabier eet dus 8 stukken. De eerste Arabier heeft dus 7 stukken afgestaan en de tweede slechts één stuk zodat de eerste recht heeft op 7 goudstukken en de tweede slechts 1 goudstuk ontvangt.

Probleem 6

De Britse wiskundige en logicus Augustus de Morgan overleed in 1871 en was x jaar oud in het jaar x^2 . In welk jaar werd hij geboren?

Oplossing.

$43^2 = 1849$ is de enige mogelijkheid. De Morgan werd dus geboren in 1806.

Oplossingen van de puzzels in de tekst

De puzzel van Dudeney

2	1	9
4	3	8
6	5	7

2	7	3
5	4	6
8	1	9

3	2	7
6	5	4
9	8	1

De getallenpuzzel van Kordemsky

2				5				6							
5		4		7		3		9		7					
9		8		6		4		1		2					
1	6	7	3	2	9	1	8	4	3	8	5				
som = 17				som = 20				som = 20							
6															
7		4													
5		2													
3	8	1	9												
som = 21															

$$\sqrt{VROUW} = MAN$$

$$\sqrt{43\,681} = 209 \quad \text{en} \quad \sqrt{67\,081} = 259$$

Math Square

9	+	6	+	8	23
-		/		X	
7	-	2	-	5	0
+		X		+	
4	+	3	+	1	8
6		9		41	

Mastermind

0	7	8
---	---	---

Literatuur

A. van den Essen, Magische vierkanten: van Lo Shu tot Sudoku, Veen Magazines, Diemen, 2007.

J.S. Madachy, Madachy's Mathematical Recreations, Dover Publications, New York, 1966.

H. E. Dudeney, Amusements in Mathematics, Dover Publications, New York, 1958.

S. Loyd, Cyclopedia of 5000 Puzzles, privé-uitgave, 1914.

B. A. Kordemsky, The Moscow Puzzles, 359 mathematical recreations, Pelican Books, 1975.

C. Wells, Merkwaardige en interessante puzzels, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 1996.

L. Gheysens, Twee plus twee is vijf, die Keure, Brugge, 2007.

M. Tahan, De man die kon rekenen, Uitgeverij Sijthoff, Amsterdam, 2009.

Nakomertje. Het probleem van de auteur van deze tekst.

In 2006 was ik zo oud als het getal gevormd door de laatste twee cijfers van zijn geboortjaar. Hoe oud ben ik nu?