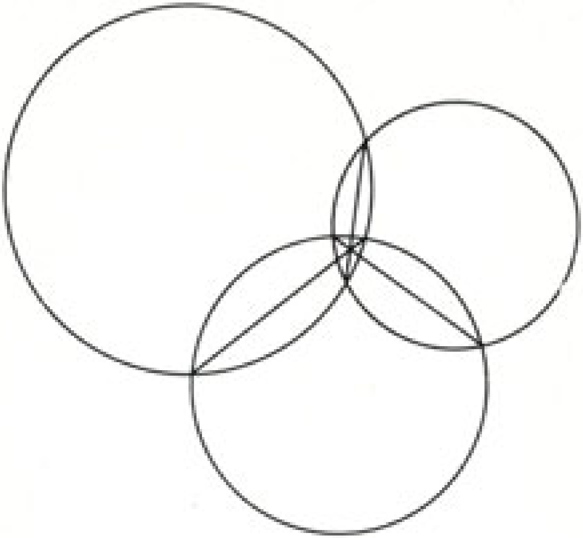
Pythagoras

wiskunde tijdschrift voor jongeren

jaargang 27
nummer 2
maart 1988

stichting ivio

Drie-koorden-stelling

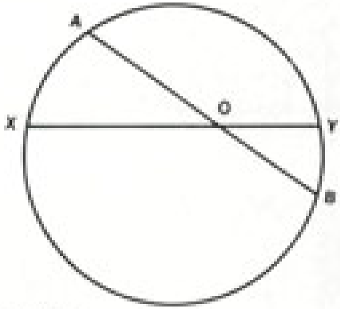


Laat drie cirkels elkaar twee aan twee snijden. Dat levert drie paar snijpunten op, althans in de figuur hierboven (waartoe we ons voorlopig zullen beperken). Door elk van die drie paren kan een lijntje worden getrokken. En ... die drie verbindingslijntjes blijken door één punt te gaan. Een bewijs daarvoor is gemakkelijk te leveren. Je hebt er een stelling voor nodig die vroeger in elk eenvoudig leerboek over meetkunde was te vinden.

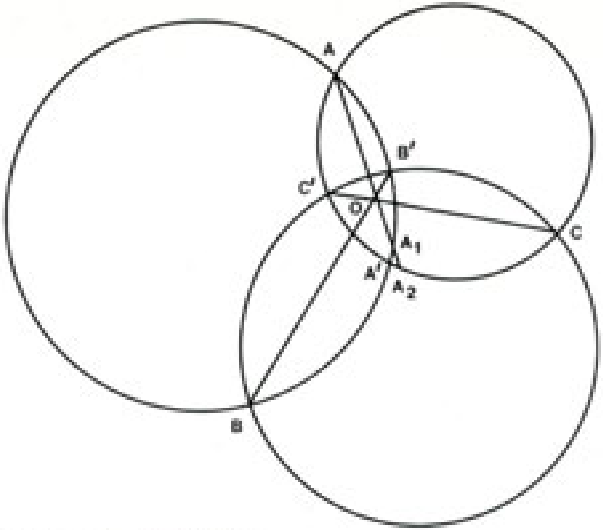
Uit de oude doos?
Eerst dus even aandacht voor die 'oude' stelling. Zoals je wellicht weet, is een *koorde* een lijn die twee punten van een cirkel met elkaar verbindt.
Als nu twee koorden AB en XY in een cirkel elkaar snijden in O (figuur 1), dan is

$$AO \cdot OB = XO \cdot OY$$

Dat is alles.



Figuur 1



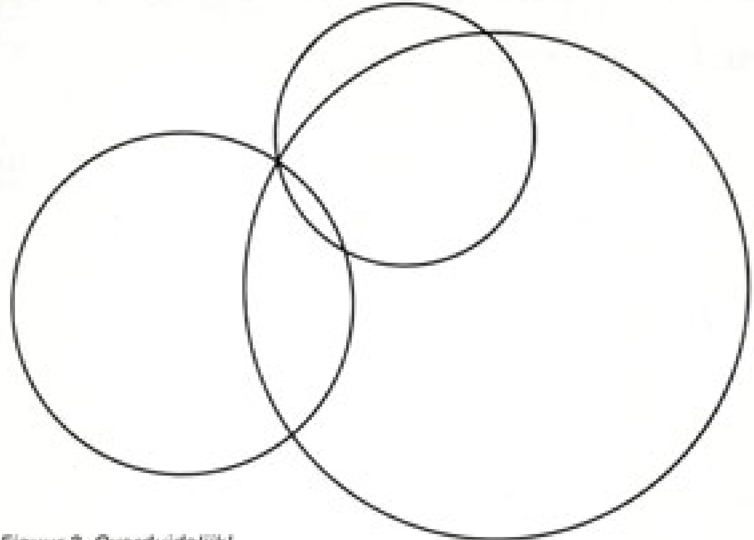
Figuur 2. Een beetje gesmokkeld.

Bewijs
Voor de situatie in de begin-figuur is een bewijs snel geleverd. Geef de snijpuntenparen aan met A en A', B en B', en C en C' (figuur 2). BB' en CC' snijden elkaar in O. Gaat AA' nu ook door O? Laten we eens aannemen van niet. Daarvoor hebben we bij het tekenen van figuur 2 wat gesmokkeld, zodat AO cirkel $AB'B$ in A_1 snijdt, en cirkel $AC'C$ in A_2. Door driemaal na elkaar de 'stelling-uit-de-oude-doos' toe te passen kunnen we echter aantonen dat A_1, A_2 en A' samenvallen, dus één en hetzelfde punt zijn. Er geldt namelijk

$$
\begin{aligned}
AO \cdot OA_1 &= BO \cdot OB' \\
&\qquad \text{(cirkel } AB'A_1B\text{)} \\
&= CO \cdot OC' \\
&\qquad \text{(cirkel } BC'B'C\text{)} \\
&= AO \cdot OA_2 \\
&\qquad \text{(cirkel } AC'A_2C\text{)}
\end{aligned}
$$

Omdat $AO \neq 0$, volgt dan $OA_1 = OA_2$.
Dus A_1 en A_2 vallen samen, en dat kan alleen maar in A'. Dat is immers het snijpunt van de cirkels waar A_1 en A_2 op liggen.

Nogmaals de oude doos
Natuurlijk zullen drie cirkels elkaar lang niet altijd snijden op de manier van de begin-figuur. En lang niet altijd zal een andere situatie er uit zien als figuur 3, waarin het overduidelijk is dat de drie bedoelde lijnen (koorden) door één punt gaan.
Geldt voor allerlei andere snij-mogelijkheden nog steeds dat de verbindingslijnen van bij elkaar horende snijpunten door één punt gaan? En wat te doen als twee cirkels twee samenvallende snijpunten bezitten, dat wil zeggen elkaar raken?



Figuur 3. Overduidelijk!

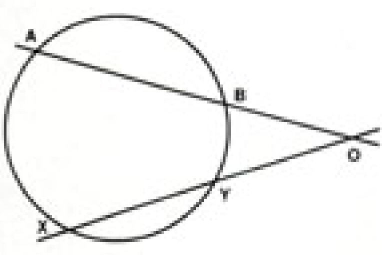
Om dat uit te zoeken moeten we nog wat verder graven in de oude meetkunde-doos. De stelling die we daar zojuist uit hebben opgediept, bezit namelijk nog twee varianten. Die komen ons in andere situaties goed van pas.

Variant 1 Als twee snijlijnen AB en XY van een cirkel elkaar in een punt O buiten de cirkel snijden (figuur 4), dan is

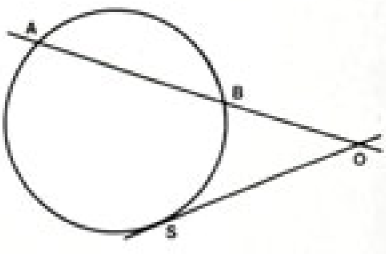
$$AO \cdot OB = XO \cdot OY$$

Variant 2 Als een snijlijn AB van een cirkel en een raaklijn in S aan die cirkel elkaar in O snijden (figuur 5), dan is

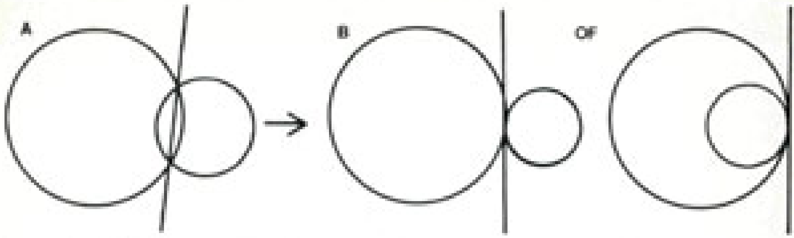
$$OA \cdot OB = SO^2$$



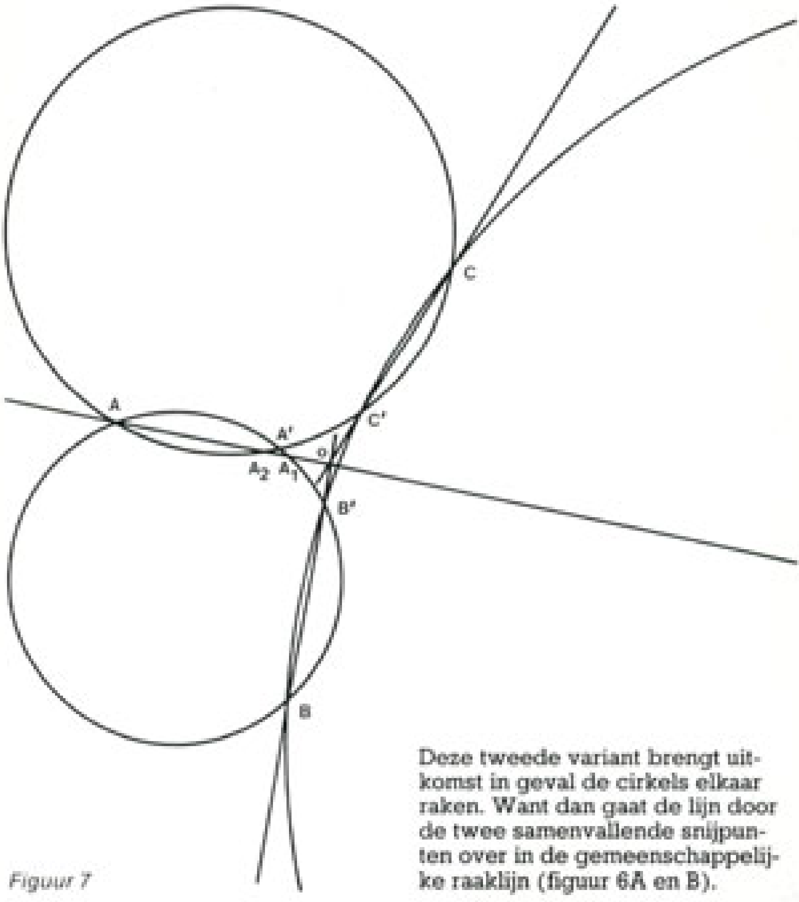
Figuur 4. AO · OB = XO · OY



Figuur 5. AO · OB = SO²



Figuur 6. De 'snij-koorde' (A) gaat over in de gemeenschappelijke raaklijn (B).



Deze tweede variant brengt uitkomst in geval de cirkels elkaar raken. Want dan gaat de lijn door de twee samenvallende snijpunten over in de gemeenschappelijke raaklijn (figuur 6A en B).

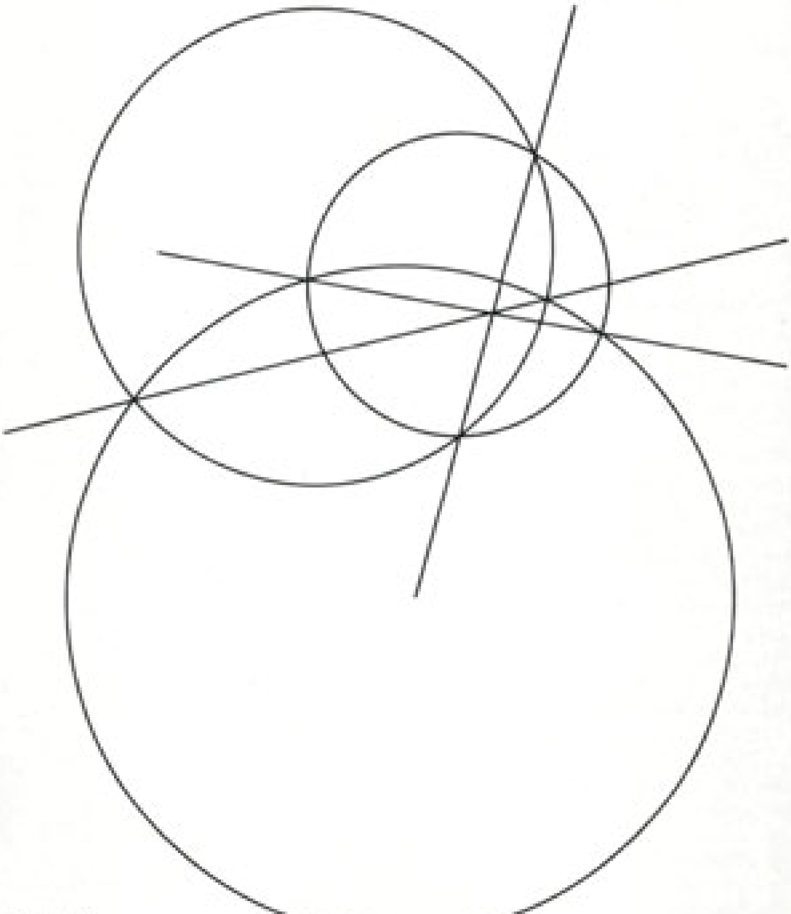
Figuur 7

Met variant 1

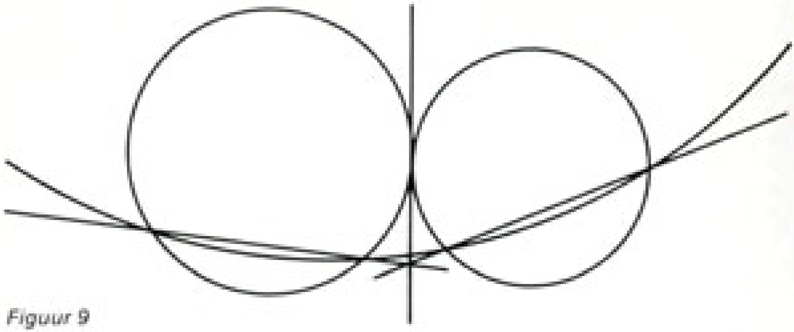
Figuur 7 is een snij-situatie waarbij variant 1 driemaal na elkaar moet worden toegepast. We hebben meteen maar de smokkel-figuur gegeven, waarin wordt verondersteld dat de lijn AO cirkel $AB'B$ in A_1 snijdt, en cirkel $AC'C$ in A_2. Met variant 1 geldt dan:

$$\begin{aligned} AO \cdot OA_1 &= BO \cdot OB' \quad \text{(cirkel } AA_1B'B\text{)} \\ &= CO \cdot OC' \quad \text{(cirkel } BB'C'C\text{)} \\ &= AO \cdot OA_2 \quad \text{(cirkel } AA_2C'C\text{)} \end{aligned}$$

En daaruit volgt dan weer dat A_1 en A_2 samenvallen in A'.



Figuur 8



Figuur 9

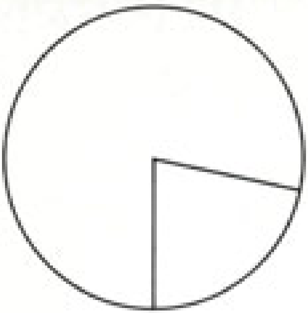
Altijd door één punt?
Met de stelling-uit-de-oude-doos en z'n varianten kun je *elke* situatie waarin drie cirkels elkaar snijden (of raken) te lijf. Bedenk zelf maar enkele (eventueel heel gekke) situaties, of ga dat nog eens na voor de figuren 8 en 9. (Bij het bewijs van figuur 9 is een combinatie nodig van variant 1 en variant 2!) □

Verder de oude doos in

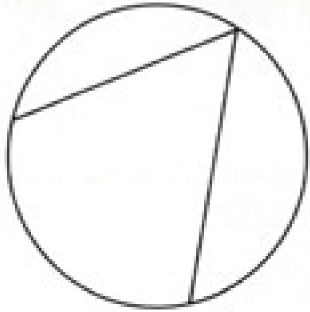
Lang niet iedereen zal vertrouwd zijn met de (oudere) meetkunde-stof. Anderen hebben misschien behoefte aan een opfrissertje. Daarom hier nog een bewijs voor de 'stelling-uit-de-oude-doos'.

Eerst wat voorbereiding. Een *middelpuntshoek* in een cirkel is de hoek gevormd door twee stralen van de cirkel (figuur 1). Zoals de naam al aangeeft valt het hoekpunt samen met het middelpunt van de cirkel. Het aantal hoekgraden van een middelpuntshoek is gelijk aan het aantal booggraden van de ingesloten cirkelboog. Of anders gezegd: Een middelpuntshoek is gelijk aan de boog waarop hij staat.
Een *omtrekshoek* van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en waarvan de benen middellijn of koorde van de cirkel zijn (figuur 2).
In figuur 3 zijn op dezelfde boog *AB* een omtrekshoek *AOB* en een middelpuntshoek *AMB* getekend. Die situatie is in figuur 4 nogmaals weergegeven. Bovendien is daarin ook de lijn *OM* getekend en bij *M* iets doorgetrokken. Eenvoudig is in te zien dat driehoek *AOM* en driehoek *BOM* gelijkbenig zijn. Daaruit volgt dat de hoeken met een stip gelijk zijn. Hetzelfde geldt voor de hoeken met een kruisje.
De som van de hoeken van een driehoek is 180°. Hoek *OMC* is een gestrekte hoek; dus ook 180°. Hoek *AMC* is daarom tweemaal zo groot als een hoek met een stip. Evenzo is hoek *CMB* tweemaal zo groot als een hoek met een kruisje.

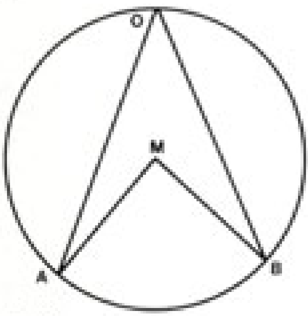
Kortom, uit figuur 4 volgt dat de omtrekshoek *AOB* de helft is van de middelpuntshoek *AMB*. Algemeen gezegd: Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.



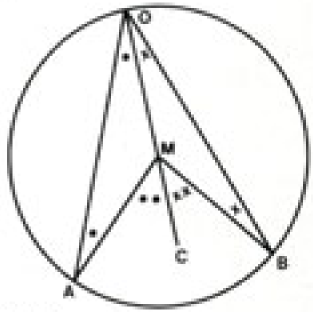
Figuur 1



Figuur 2



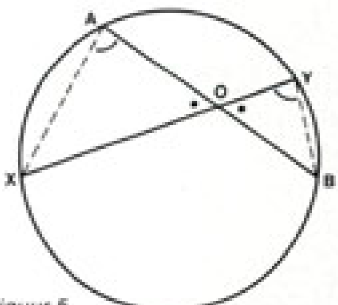
Figuur 3



Figuur 4

Nu de stelling zelf. In figuur 5 zijn net als in figuur 1 uit het artikel, nogmaals twee koorden AB en XY in een cirkel getekend die elkaar in een punt O snijden. Vervolgens zijn de lijnen AX en YB getrokken.
Hoek XAB en hoek XYB zijn nu omtrekshoeken. Omdat ze op eenzelfde cirkelboog XB staan, zijn ze gelijk. De hoeken met een stip bij O zijn ook gelijk. Dus driehoek XAO is gelijkvormig met driehoek OYB.
In gelijkvormige driehoeken zijn de verhoudingen van overeenkomstige zijden gelijk. In het bijzonder geldt

$$\frac{AO}{OY} = \frac{XO}{OB}$$



Figuur 5

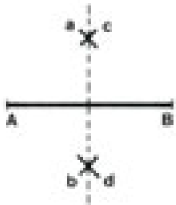
Of anders geschreven:

$$AO \cdot OB = XO \cdot OY$$

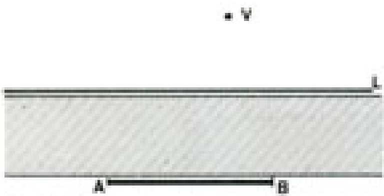
Het bewijs voor 'variant 1' en 'variant 2' gaat bijna op dezelfde manier. □

Halveren zonder schaalverdeling I

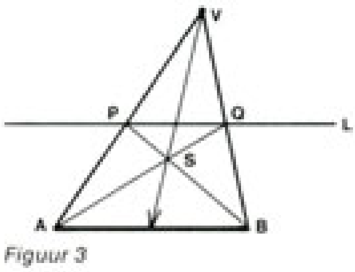
Stel dat je het midden wilt bepalen van een lijnstuk *AB*. Met een liniaal is dat geen probleem. Meet de lengte van het lijnstuk, deel die door twee en klaar is Kees.
Met een passer en een liniaal *zonder* schaalverdeling kan het ook (figuur 1). Trek vier cirkelboogjes met gelijke straal (de boogjes *a* en *b* met de passerpunt in *A* en de boogjes *c* en *d* met de passerpunt in *B*). Verbind daarna de snijpunten van de boogjes met elkaar.
Wist je dat het ook kan met *uitsluitend* een liniaal *zonder* schaalverdeling?



Figuur 1



Figuur 2



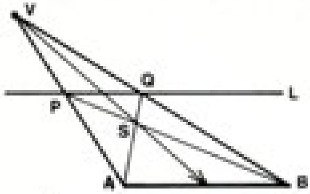
Figuur 3

Recept
Het moet wel een liniaal zijn met twee evenwijdige zijkanten, maar bijna alle linialen zien er zo uit, dus dat is geen probleem.
Hier is het recept. Leg eerst de liniaal langs *AB* en trek een lijn *l* evenwijdig aan *AB* (figuur 2). Kies vervolgens een punt *V*. Het is handig om dat punt aan de andere kant van *l* te nemen, maar strikt noodzakelijk is het niet.
Trek *VA* en *VB* (figuur 3). *VA* snijdt *l* in *P*, *VB* snijdt *l* in *Q*. Geef het snijpunt van *AQ* en *BP* aan met *S*.

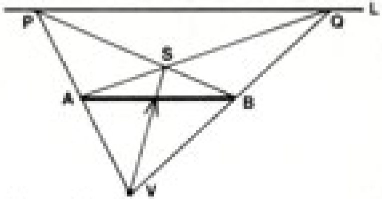
En nu komt het: De lijn *VS* deelt het lijnstuk *AB* precies middendoor! Verbazend, niet waar?

Wanneer mis?
Hoe je *V* ook kiest, altijd klopt het (figuur 4)! Zelfs als *V* aan dezelfde kant van *l* ligt als *AB* (figuur 5). Of tussen *AB* en *l* (figuur 6 en 7).

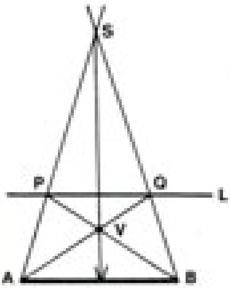
In dat laatste geval moet je overigens wel even uitkijken. Zie je dat het soms toch mis kan gaan? Wanneer?



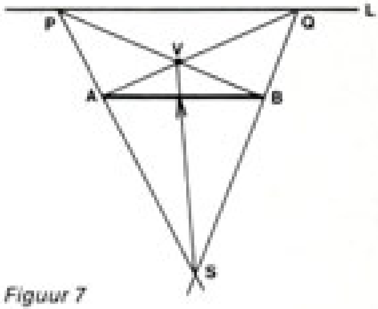
Figuur 4



Figuur 5



Figuur 6



Figuur 7

Bewijs

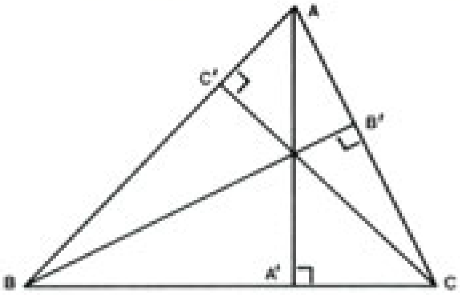
Nu het bewijs. Want we kunnen natuurlijk wel beweren dat *VS* altijd *AB* middendoor deelt, maar waarom is dat zo? Probeer het maar eens te bewijzen. Je mag alle middelen gebruiken die je kent: meetkunde-stellingen, coördinaten, verhoudingen, vergelijkingen, enzovoort. Ondoenlijk is het niet. Veel mooier dan *reken*-bewijzen zijn natuurlijk bewijzen waarbij je in één oogopslag *ziet* waarom de bewering waar is. En zo'n bewijs kan hier óók worden gegeven. We verklappen niet hoe, maar wel zeggen we dat je de zaken in het juiste *perspectief* moet zien! Denk maar eens aan polderlandschappen, verdwijnpunten en de horizon.

Zie je al iets? In het volgende nummer meer details! □

Verschillende soorten linialen

In het dagelijks leven wordt met een liniaal een latje bedoeld met twee evenwijdige zijkanten en een schaalverdeling. Strikt genomen is in de meetkunde echter ieder hulpmiddel waarmee een rechte lijn door twee gegeven punten kan worden getrokken, een 'liniaal'. (Bij voorbeeld iedere zijde van een geo-driehoek). Wanneer je vindt dat in het recept de liniaal op ongeoorloofde wijze wordt gebruikt, heb je eigenlijk gelijk. Het vraagstuk is dan ook zo te lezen: Een lijnstuk *AB* loopt evenwijdig aan een gegeven (!) rechte *l*. Construeer het midden van *AB* met alleen een liniaal als gereedschap. □

Drie-koorden-speciaal

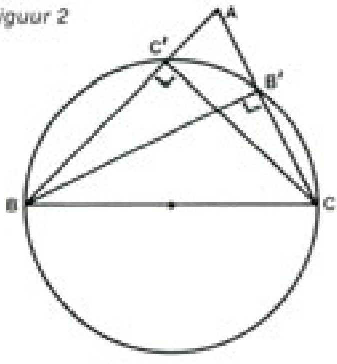


Figuur 1

De drie hoogtelijnen in een driehoek (lijnen van uit de hoekpunten loodrecht op de zijden daartegenover) gaan door één punt (figuur 1). Dat punt is het *hoogtepunt* van de driehoek. Uitgaande van deze eigenschap is een soort 'drie-koorden-speciaal' te construeren.

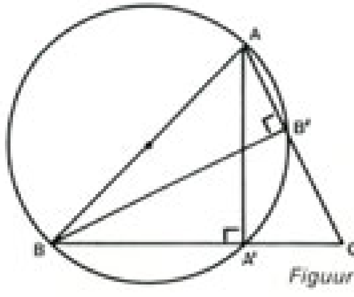
De eerste cirkel
Trek een cirkel met middellijn *BC* (figuur 2). Naast de punten *B* en *C* liggen ook de punten *B'* en *C'* op die cirkel. Immers de hoeken *BC'C* en *BB'C* zijn omtrekshoeken die staan op een boog die precies een halve cirkel is. En omdat een omtrekshoek gelijk is aan de helft van de boog waarop hij staat, zijn de hoeken *BC'C* en *BB'C* inderdaad gelijk aan 90°.

Figuur 2

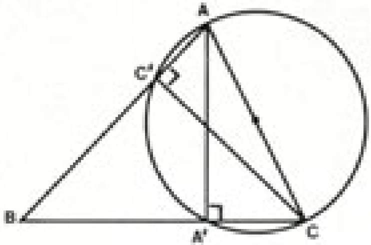


De tweede en derde cirkel
Net als *B*, *C*, *B'* en *C'* liggen de vier punten *B*, *A'*, *B'* en *A* ook op een cirkel. En *A*, *C'*, *A'* en *C* ook. *B*, *A'*, *B'* en *A* liggen op de cirkel met middellijn *AB*, waarin de hoeken *AA'B* en *AB'B* omtrekshoeken van 90° zijn (figuur 3).

A, *C'*, *A'* en *C* liggen op de cirkel met middellijn *AC*, waarin *AC'C* en *AA'C* omtrekshoeken van 90° zijn (figuur 4).

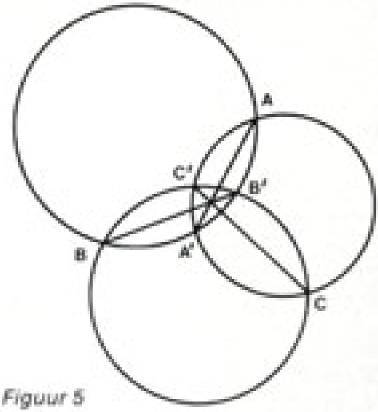


Figuur 3



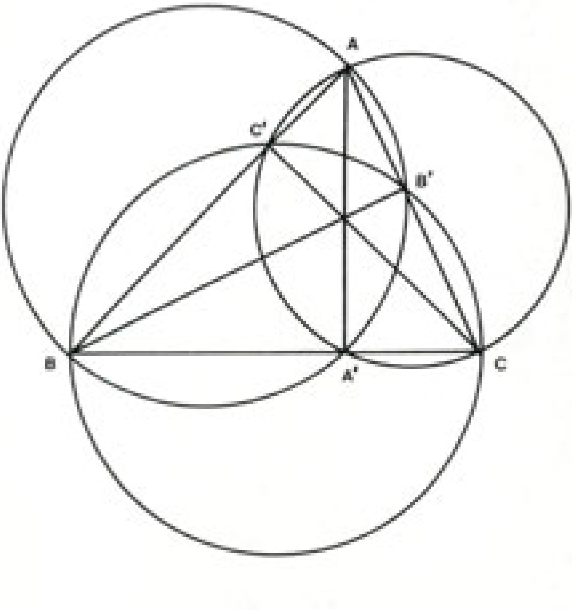
Figuur 4

driehoek *ABC* zijn de koorden die de snijpunten van de cirkels paarsgewijs met elkaar verbinden. En het hoogtepunt van de driehoek is het snijpunt van die koorden!



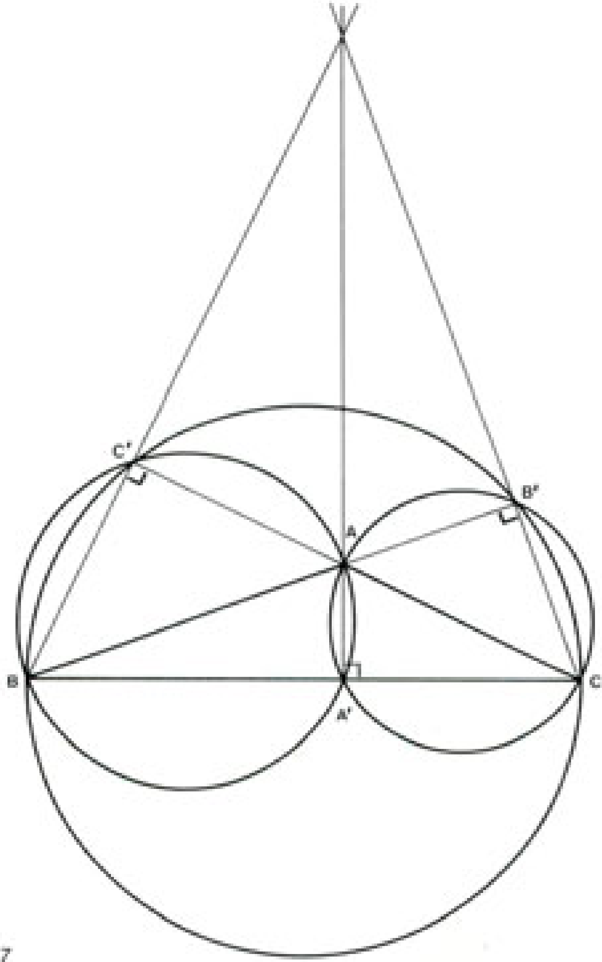
Figuur 5

Alles bij elkaar
Combinatie van de figuren 2, 3 en 4 levert figuur 5. Dat is een speciaal geval van figuur 6, de figuur aan het begin van het artikel 'Drie-koorden-stelling'. Want in figuur 5 zijn *AC'B*, *BA'C* en *CB'A* rechte lijnen. Ze vormen de zijden van een driehoek *ABC*. De drie hoogtelijnen *AA'*, *BB'* en *CC'* van



Figuur 6

Toegift
Zoals gezegd, is figuur 5 een speciaal geval van figuur 6. In figuur 5 zijn de lijnen $AC'B$, $BA'C$ en $CB'A$ uit figuur 6 rechte lijnen. Zo'n situatie is ook te krijgen door uit te gaan van een stomphoekige driehoek ABC (figuur 7). Daarin worden eerst weer de hoogtelijnen AA', BB' en CC' getrokken. Die snijden elkaar na verlenging in het hoogtepunt O dat buiten driehoek ABC ligt. Daarna kunnen de cirkels met middellijnen AB, BC en AC worden getrokken. □



Figuur 7

Zo ver mogelijk de woestijn in

In de tank van de terreinwagen van een woestijn-patrouille kan maximaal 10 liter benzine. Bij een post ligt een aantal vaten opgeslagen, elk met 50 liter benzine. Daaruit kan de tank van de terreinwagen worden (bij)gevuld. De wagen kan slechts één vat tegelijk meenemen. Of er nu een vat wordt meegenomen of niet, steeds is het benzine-verbruik 1 liter op 10 kilometer.
Hoe ver kan de patrouille zich van de post verwijderen?

Slechts één vat
Uiteraard hangt het antwoord af van het aantal vaten dat bij de post ligt opgeslagen.

Als er maar één vat bij de post ligt, kan de patrouille zich 500 kilometer van de post verwijderen. De tank wordt van uit dat ene vat gevuld. Het vat wordt opgeladen en meegenomen. Wanneer na 100 kilometer de tank leeg is, kan deze weer worden gevuld, enzovoort.

Twee vaten
Als er twee vaten bij de woestijnpost liggen, wordt de zaak meteen al een stuk ingewikkelder. Omdat er maar één vat tegelijk meegenomen kan worden, zal er eerst een vat ergens in de woestijn neergezet moeten worden. Vervolgens moet — eventueel nadat de tank is (bij)gevuld — het tweede vat worden opgehaald. Hoeveel kilometer kan de terreinwagen nu afleggen?

Het is handig de te volgen werkwijze in een soort algoritme weer te geven. Bij voorbeeld

vul de tank uit vat 1
laad vat 1
100 kilometer vooruit
zet vat 1 neer
vul de tank uit vat 1
terug naar de post
vul de tank uit vat 2
laad vat 2
100 kilometer vooruit
vul de tank uit vat 1
100 kilometer vooruit
zet vat 2 neer
vul de tank uit vat 2
terug naar vat 1
vul de tank uit vat 1
laat vat 1
100 kilometer vooruit
.....

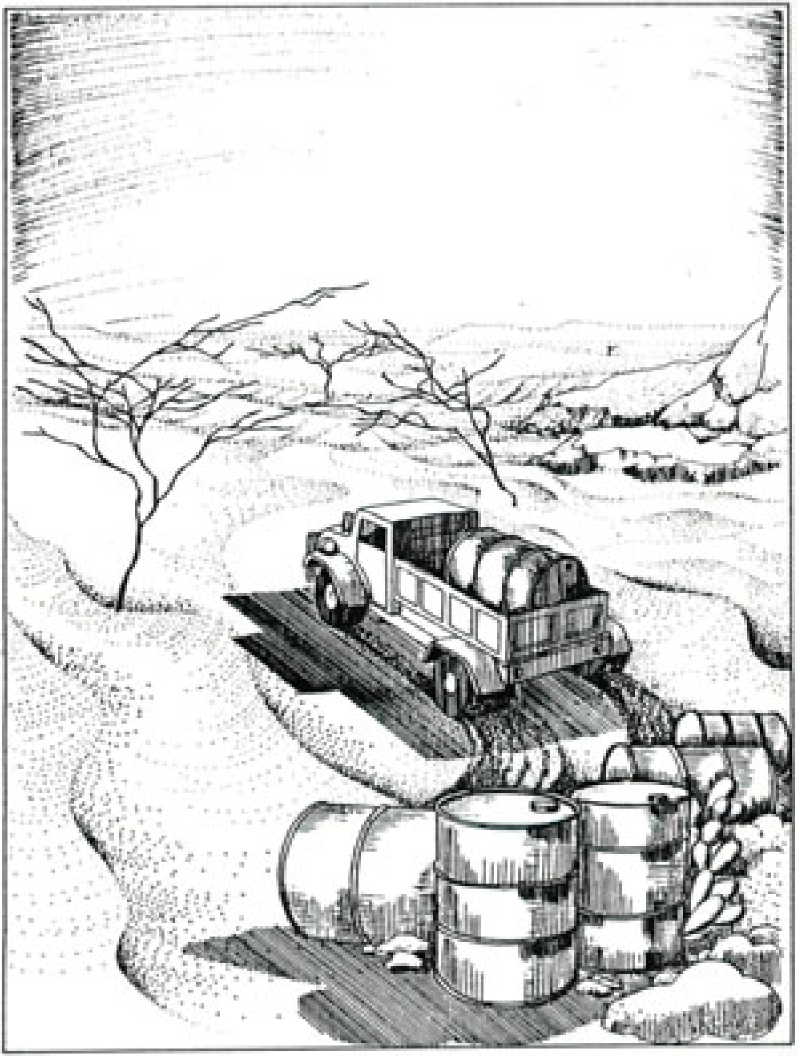
Ga na dat op deze manier 600 kilometer kan worden afgelegd. Dat is maar 100 kilometer meer dan met een vat. Dat lijkt niet veel.

Wie maakt een algoritme dat verder reikt dan 600 kilometer?

Drie vaten en meer
Met drie vaten kan de patrouille 860 kilometer afleggen. Wie levert een algoritme waarmee deze afstand kan worden gehaald? Vooralsnog ziet het er naar uit dat met twee vaten moet worden geprobeerd het derde vat *onaangetast* zo ver mogelijk van de post af te brengen. Daar kan de tank dan worden gevuld met het laatste restje uit een van de eerste twee

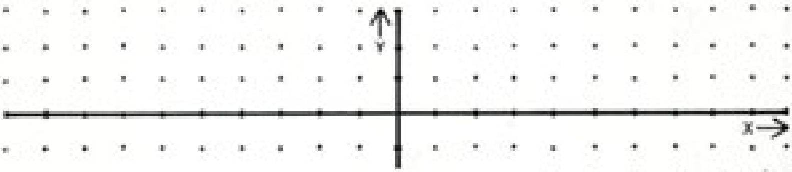
vaten. Daarna kan het derde vat (dat nog helemaal vol is) worden geladen. Zo kan als sluitstuk nog 600 kilometer worden afgelegd.

Een formule Het is heel verleidelijk om een formule te zoeken die voor *n* vaten steeds de maximaal af te leggen afstand geeft.



Bedenk echter wel dat je met zo'n formule niet erg veel opschiet. Voor elk aantal vaten staat of valt de juistheid van de formule namelijk met de constructie van een algoritme dat de berekende grootste afstand inderdaad levert.

Wie verder wil met dit probleem kan dus maar het beste aan de hand van een algoritme proberen uit te zoeken wat de grootste afstand is voor vier vaten, vijf vaten, enzovoort. □



Een prikkelende grafiek

Je eerste grafieken leerde je tekenen op keurig ruitjespapier. In de brugklas werd je op weg geholpen met zogenaamde 'roosterpunten'. Dat zijn de punten ... (—2,—1), (—1,—1), (0,—1), (1,—1), ... (—1,0), (0,0), ... (3,1), (4,1), enzovoort. Deze verzameling paren van gehele getallen wordt ook wel kort aangeduid met $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ben je inmiddels zo ver gevorderd dat je die verzameling roosterpunten op haar beurt zelf ook weer kunt beschouwen als de grafiek van een vergelijking?

Voorbeelden van grafieken die niet altijd een (kromme) lijn zijn, hebben we al vaker gegeven (onder andere in de artikelen 'Schaakbordformules' en 'Absoluutwaardige achten', Pythagoras 26-2). De verzameling $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bevat vreemd genoeg uitsluitend (geïsoleerde) punten. De grafiek valt dus werkelijk als los zand uit elkaar!

Het probleem is verrassend, maar niet zo moeilijk. Onderzoek de volgende vergelijkingen maar eens.

(a) $(\cos 2\pi x)\,.\,(\cos 2\pi y) = 1$

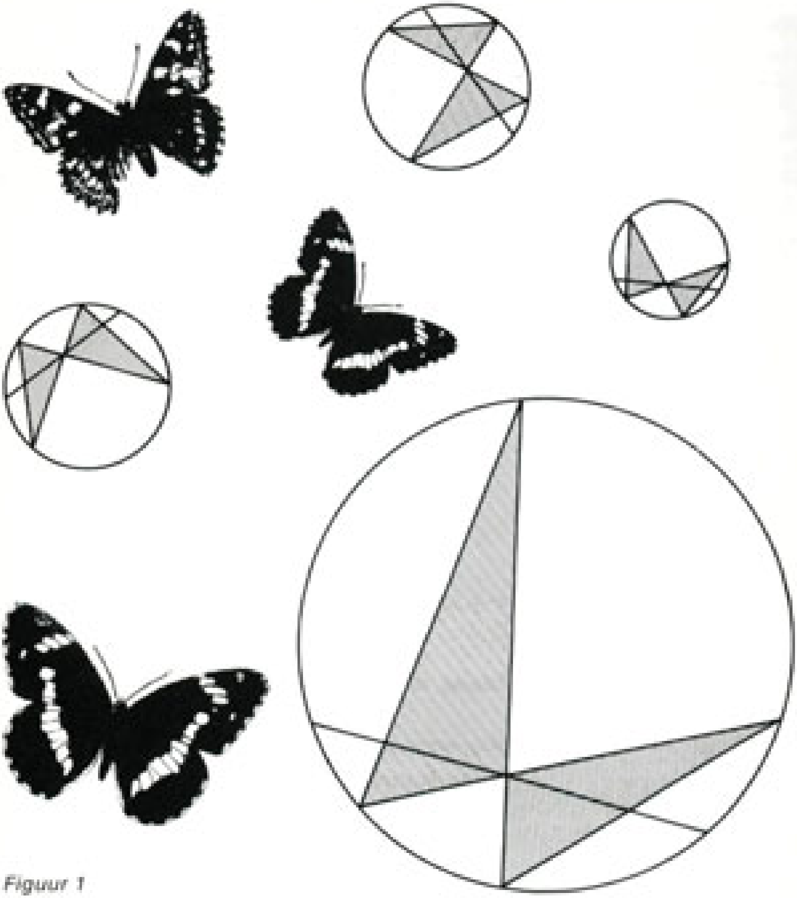
(b) $(\cos 2\pi x)\,.\,\sqrt{(\cos 2\pi y)} = 1$

(c) $\sqrt{(\cos 2\pi x)}\,.\,\sqrt{(\cos 2\pi y)} = 1$

(d) $\sqrt{|(\cos 2\pi x)\,.\,(\cos 2\pi y)|} = 1$

Van deze vier vergelijkingen zijn er *twee* die de gevraagde merkwaardige grafiek opleveren. Welke twee zijn dat?
(Het antwoord is te vinden in het volgende nummer). □

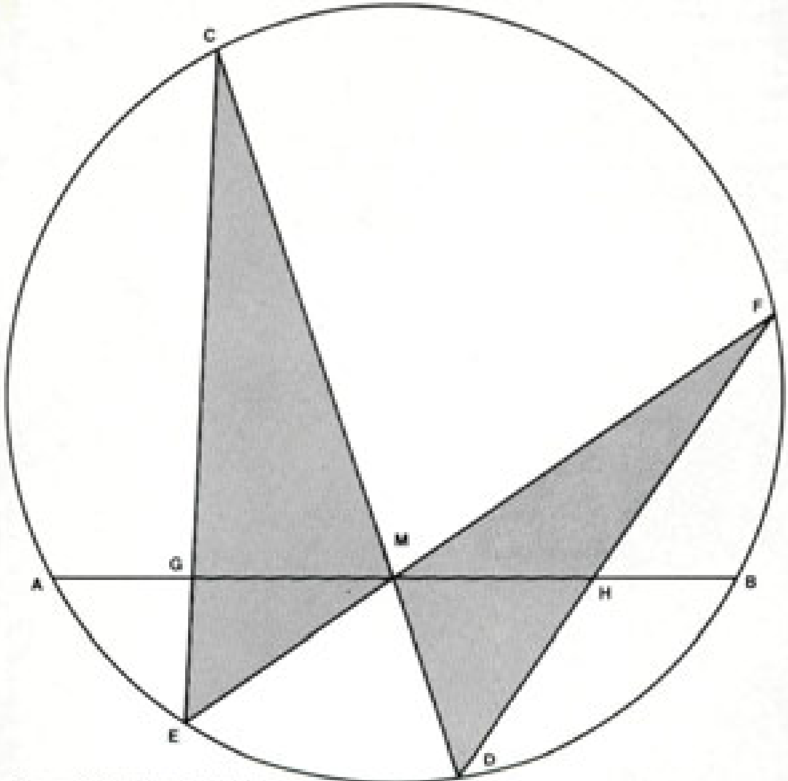
De vlinderstelling



Figuur 1

Figuur 1 bevat een paar tekeningen die aan de vlinders doen denken die er tussen door dwarrelen. Die tekeningen illustreren een resultaat uit de meetkunde dat bekend staat als de vlinderstelling.

> *Vlinderstelling* Trek door het midden M van een koorde AB van een cirkel twee andere koorden CD en EF (figuur 2). Geef de snijpunten van CE en DF met AB aan met G en H. Dan is M ook het midden van GH.

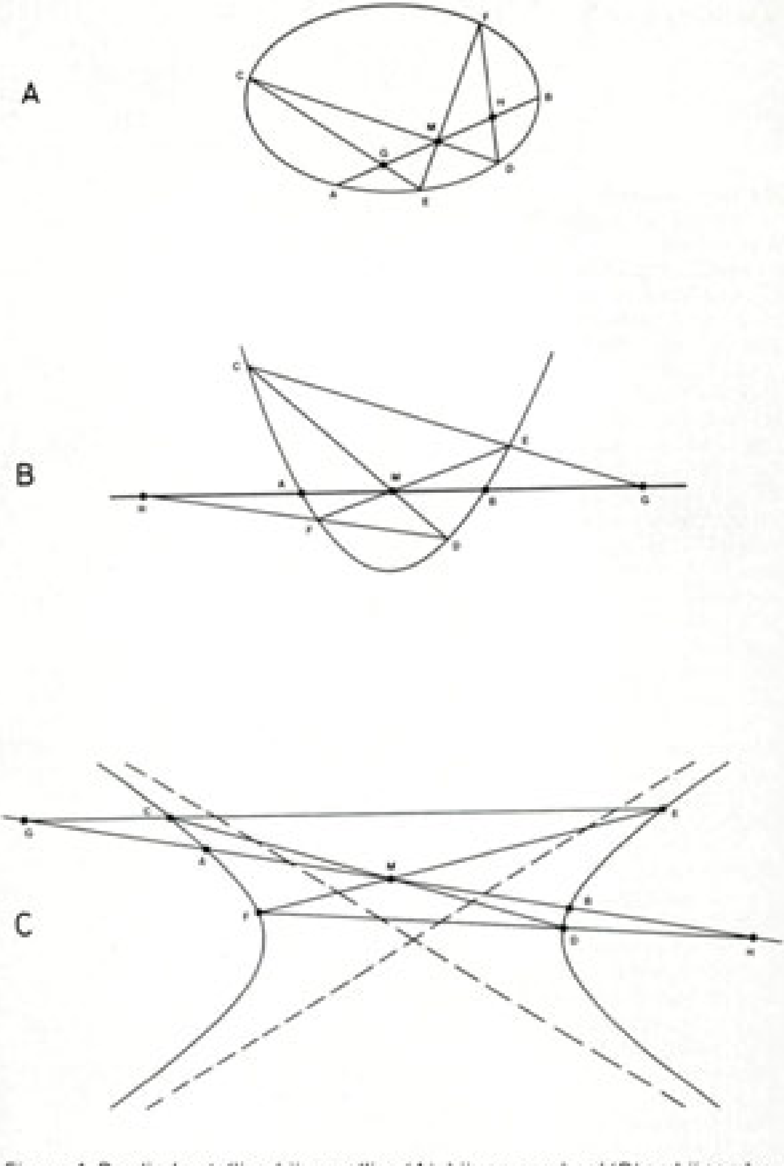


Figuur 2. De vlinderstelling.

Deze stelling is al heel oud. Het gekke is dat hij helemaal niet zo een-twee-drie te bewijzen is. Althans niet met de middelen van de meetkunde die doorgaans op school worden behandeld. Begeef je je echter in de ruimte (vlinders moeten tenslotte kunnen vliegen), dan wordt het een fluitje van een cent.
In het onderdeel 'Vlinders in het vlak' wordt een bewijs gegeven dat berust op enkele eenvoudige middelen van de vlakke meetkunde. Het is een lang bewijs. Maar echt moeilijk is het uiteindelijk niet. Er zijn nog een paar andere bewijzen die gebruikmaken van middelen van de vlakke meetkunde. Deze bewijzen zijn een stuk lastiger.
Het onderdeel 'Vlinders in de ruimte' bevat een bewijs dat berust op projecties. Dit bewijs vergt wat inzicht in de eigenschappen van projecties. Als je dat inzicht eenmaal hebt, is het bewijs zo geleverd.
Kijk maar eens naar welk bewijs je voorkeur uitgaat.

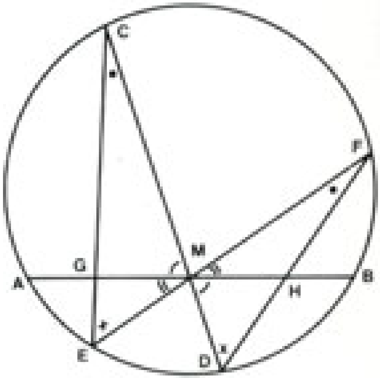
Meer 'vlinders'
In plaats van de snijpunten van AB met CE en DF kunnen ook die met CF en DE worden genomen (figuur 3). Noem deze snijpunten G' en H'. Dan is M ook het midden van $G'H'$ ofwel $G'M = MH'$.
Verder gaat de vlinderstelling ook op bij willekeurige kegelsneden, zoals ellipsen, parabolen of hyperbolen (figuur 4). Gesteld dat M het midden is van AB, dan is M in alle drie de tekeningen van figuur 4 ook het midden van GH. □

Figuur 3. M is ook het midden van G'H'.



Figuur 4. De vlinderstelling bij een ellips (A), bij een parabool (B) en bij een hyperbool (C).

Vlinders in het vlak



Figuur 1. Vier paar gelijke hoeken.

Gelijke hoeken

In figuur 1 is de tekening waarmee de vlinderstelling werd uitgebeeld, nogmaals weergegeven. Gelijke hoeken zijn daarin voorzien van dezelfde tekentjes.
Dat de gemerkte hoeken bij *M* gelijk zijn, zal wel duidelijk zijn.
De hoeken bij *C*, *F*, *E* en *D* zijn *omtrekshoeken* van de cirkel. Dat zijn hoeken waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en waarvan de benen middellijn of koorde van de cirkel zijn. Een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat. Zie het kader 'Verder de oude doos in' bij het artikel 'Drie-koordenstelling'.
Omdat de omtrekshoeken *ECD* en *EFD* op dezelfde boog *ED* staan, zijn ze gelijk aan elkaar. De omtrekshoeken *CEF* en *CDF* staan ook op eenzelfde boog, namelijk *CF*. Dus ook die twee hoeken zijn gelijk.

Hulplijnen

Nu moeten er vier loodlijnen worden neergelaten (figuur 2).
Allereerst x_1 en y_1 vanuit *G* respectievelijk *H* op *CD*. Daarna x_2 en y_2 vanuit *G* respectievelijk *H* op *EF*. De eindpunten van deze vier loodlijnen worden achtereenvolgens aangegeven met *P*, *Q*, *R* en *S*.
De lijnstukken *GM* en *MH* waarvan moet worden bewezen dat ze gelijk zijn, worden aangegeven met *x* respectievelijk *y* (figuur 2).

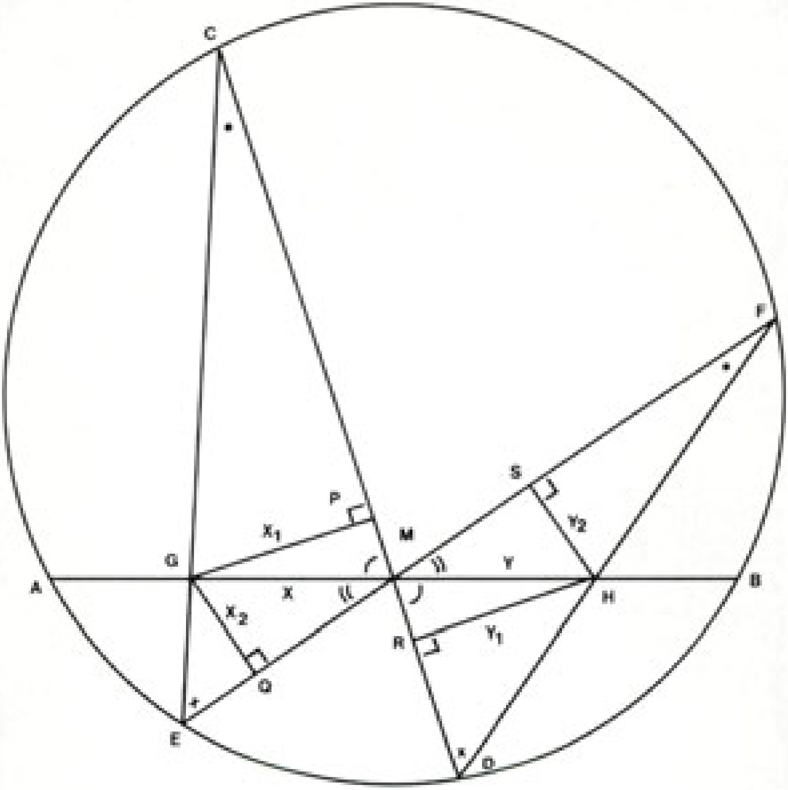
Gelijkvormige driehoeken

In figuur 2 zijn vier paar gelijkvormige driehoeken te onderscheiden. Het zijn steeds rechthoekige driehoeken waarvan eenvoudig is in te zien dat ze gelijke hoeken hebben. Die vier paren gelijkvormige driehoeken zijn

PGM	en	*RHM*	(1)
QGM	en	*SHM*	(2)
PGC	en	*SHF*	(3)
QGE	en	*RHD*	(4)

Bij elk van die paren gelijkvormige driehoeken zijn de verhoudingen van overeenkomstige zijden steeds gelijk. Dus

$$(1) \text{ levert } \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \qquad (5)$$



Figuur 2. Vier loodlijnen en vier paar gelijkvormige driehoeken.

(2) levert $\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}$ (6)

(3) levert $\frac{x_1}{y_2} = \frac{CG}{FH}$ (7)

(4) levert $\frac{x_2}{y_1} = \frac{EG}{DH}$ (8)

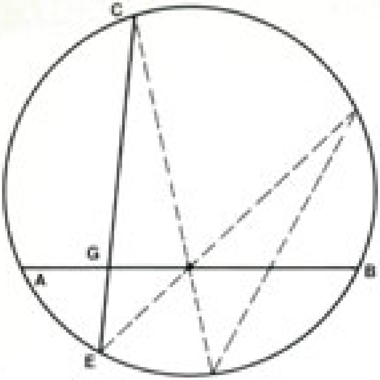
Een oude bekende

Op grond van (5) en (6) geldt nu

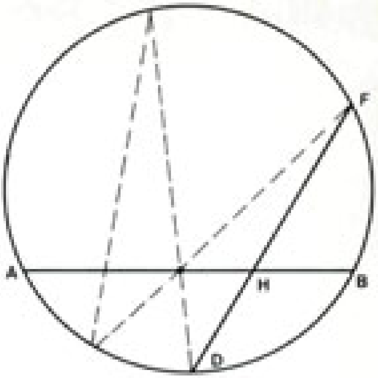
$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{x_2}{y_1} =$$

Met (7) en (8) kan dit verder worden herleid tot

$$= \frac{CG}{FH} \cdot \frac{EG}{DH} = \frac{CG \times EG}{FH \times DH} =$$



Figuur 3. CG × EG = AG × GB



Figuur 4. FH × DH = BH × AH

Vervolgens moet de stelling over elkaar snijdende koorden die in het artikel 'Drie-koorden-stelling' al boven water is gehaald, tweemaal worden toegepast. Eén keer boven de breukstreep (figuur 3) en één keer onder de breukstreep (figuur 4). De herleiding gaat dan verder met

$$= \frac{AG \times GB}{BH \times AH} =$$

Nu is het handig om voor de lijnstukken AM en MB die gelijk zijn, a te schrijven. Met figuur 2 kunnen de lijnstukken AG, GB, BH en AH dan in a, x en y worden uitgedrukt. Zodat kan worden geëindigd met

$$= \frac{(a-x)\ (a+x)}{(a-y)\ (a+y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

Het laatste stapje
Er is dus aangetoond dat in figuur 2 (met $AM = MB = a$) geldt

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

Kruislings vermenigvuldigen levert

$$y^2\ (a^2 - x^2) = x^2\ (a^2 - y^2)$$

Haakjes wegwerken en verder vereenvoudigen leidt tot $a^2 y^2 = a^2 x^2$. En dus $x^2 = y^2$. Daaruit volgt ten slotte $x = y$ ofwel $GM = MH$ (Waarom vervalt $x = -y$?). □

Drievoud plus twee

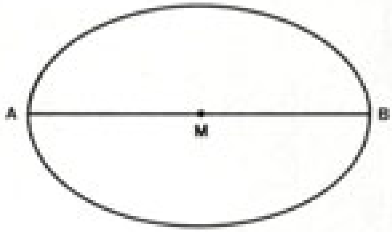
Laat zien dat de som van de kwadraten van elk drietal opeenvolgende gehele getallen gelijk is aan een drievoud plus twee.
Hoe zit dat bij drie opeenvolgende oneven gehele getallen? En bij drie opeenvolgende even gehele getallen? □

Vlinders in de ruimte

Symmetrie
Eerst iets dat op het eerste gezicht weinig te maken heeft met de vlinderstelling. In figuur 1 zie je een *ellips*. AB is de grote as, en M is het middelpunt.

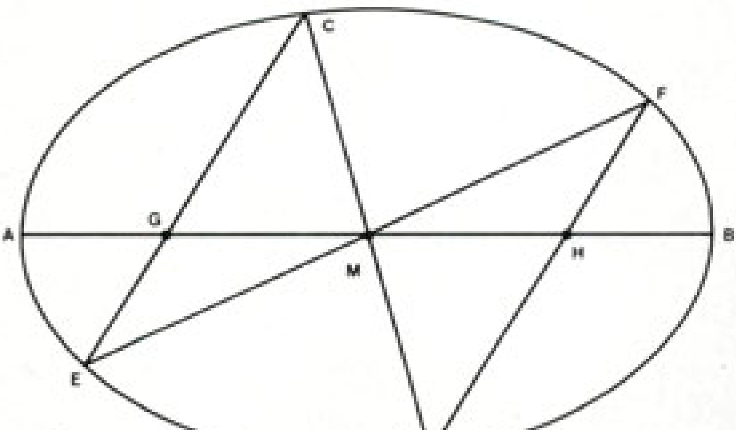
We gaan bij die ellips hetzelfde doen als bij de cirkel. Trek twee koorden CD en EF door M en bepaal de snijpunten G en H van CE en DF met AB (figuur 2). Weer geldt dat M ook het midden is van GH. Maar dat is nu vanzelfsprekend, want de hele figuur is puntsymmetrisch om M.

Is dit nu een bijzonder geval van de vlinderstelling? Niet helemaal. De cirkel is minder symmetrisch geworden. Het is nu een ellips.

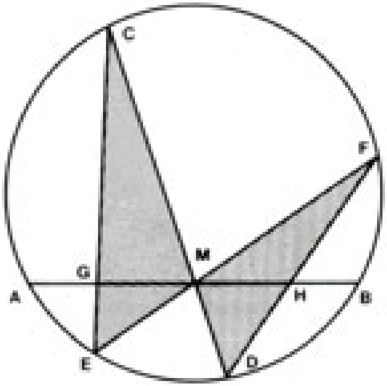


Figuur 1

Maar de rest van de figuur heeft wèl symmetrie gekregen: puntsymmetrie rond M.
Het ruimtelijk bewijs van de vlinderstelling zal er op neer komen dat we door projectie figuur 3 (de uitbeelding van de stelling) overvoeren in een ellips met middelpunt M en as AB.



Figuur 2



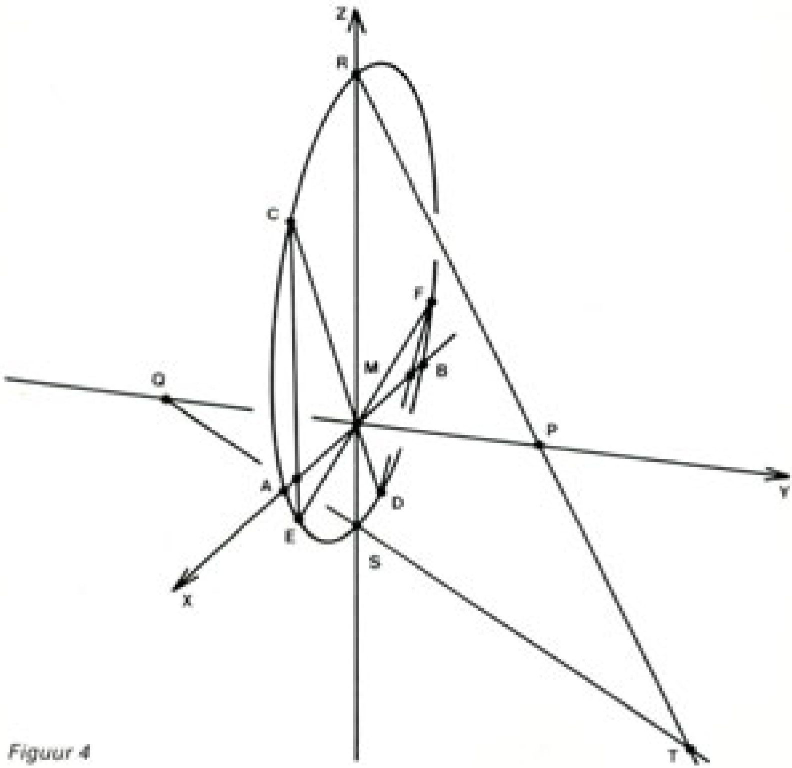
Figuur 3. De vlinderstelling.

Projectie-centrum

Denk je een coördinatenstelsel in de ruimte in. We tekenen figuur 3 dan over in het *XZ*-vlak, en wel zo, dat *AB* samenvalt met de *X*-as, en *M* met de oorsprong (figuur 4). Kies vervolgens punten *P* en *Q* op de *Y*-as zo, dat *PM* = *MQ*. De snijpunten van de cirkel met de *Z*-as noemen we *R* en *S*. Ten slotte bepalen we het snijpunt *T* van *PR* en *QS*. Dat punt *T* wordt het projectie-centrum.

Van cirkel naar ellips

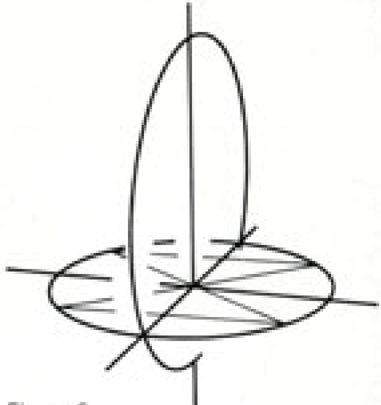
Vanuit *T* projecteren we alles op het *XY*-vlak. De projectie van een



Figuur 4

cirkel is altijd een kegelsnede, en hier wordt het een ellips met AB en PQ als assen. De projecties van de koorden CD en EF worden koorden van de ellips.
In het XY-vlak is nu net zo iets ontstaan als in figuur 2 (zie figuur 5). Maar dan is weer direct duidelijk dat M het midden is van GH, want de horizontale figuur is puntsymmetrisch.

Tijdens het projecteren zijn G en H niet van hun plaats geweest, dus ook in de verticale figuur gold al dat $GM = MH$. Daarmee is het bewijs geleverd!



Figuur 5

Speciale keuze
Kies je in figuur 4 P en Q zo, dat $PM = MQ = AM = MB$, dan wordt de horizontale ellips zelfs een cirkel!

Het bewijs wordt er overigens niet eenvoudiger door. Je gebruikt de puntsymmetrie en die geldt voor de ellips net zo goed als voor de cirkel. □

Wortel-teken verschuiven

$$\sqrt{6\frac{6}{35}} = 6 \times \sqrt{\frac{6}{35}}$$

$$\sqrt{.\,\frac{7}{48}} = . \times \sqrt{\frac{7}{48}}$$

$$\sqrt{8\frac{8}{..}} = 8 \times \sqrt{\frac{8}{..}}$$

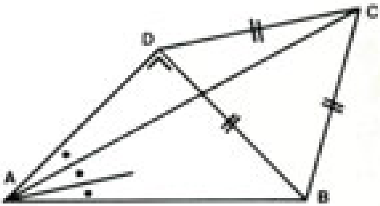
$$\sqrt{a + \frac{a}{..}} = a \times \sqrt{\frac{a}{..}}$$

Verklaar de regelmaat. □

Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven
Oplossingen vóór 30 april insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB).* Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

PO 106
In vierhoek *ABCD* is driehoek *BCD* gelijkzijdig, terwijl hoek *ADB* een rechte hoek is. Verder is gegeven dat hoek *BAC* twee maal zo groot is als hoek *CAD* (zie figuur). Bereken hoek *CAD*.



PO 107
Bepaal een natuurlijk getal dat in decimale schrijfwijze eindigt op precies zes nullen, en dat precies 1988 delers bezit, of bewijs dat zo'n getal niet bestaat.

(Een natuurlijk getal *a* heet een *deler* van het natuurlijke getal *b* indien *b/a* een natuurlijk getal is. Voorbeeld: de delers van 12 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 12.)

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 102 en 103

PO 102
Ab, Bea en Cis spelen een spel met een lottoapparaat met 60 balletjes, genummerd van 1 tot en met 60. Ze trekken tien balletjes (zonder terugleggen), en bepalen de som *S* van de getrokken nummers. Ab wint als *S* een drievoud is, Bea wint als *S* een drievoud +1 is, en Cis wint als *S* een drievoud +2 is.

(a) Hebben Ab, Bea en Cis dezelfde kans om te winnen?
(b) Zelfde vraag als er *negen* in plaats van tien balletjes getrokken worden.

Oplossing van *Jeroen Tiggelman*, 6 vwo, Rijswijk (ZH) (enigszins bewerkt, en voor onderdeel (b) vereenvoudigd):
Je kunt modulo 3 rekenen: bij elk nummer neem je de rest na deling door 3. Er zijn dan slechts balletjes met nummer 0, 1 of 2, van elke soort twintig. Als in een trekking *a* balletjes 0, *b* balletjes 1 en *c* balletjes 2 getrokken worden, geven we dat aan met (a,b,c). Omdat in het apparaat evenveel balletjes van elke soort aanwezig zijn, is de kans op (a,b,c) net zo groot als de kans op (c,a,b), (b,c,a), (a,c,b), (b,a,c) of (c,b,a).

Voor het bepalen van de winnaar kunnen we a, b en c ook weer modulo 3 nemen, want drie ballen van dezelfde soort hebben als som een drievoud. Verder heeft (a,b,c) dezelfde som modulo 3 als $(a\text{-}1,b\text{-}1,c\text{-}1)$. Je kunt dus aannemen dat minstens één van de getallen a, b, c nul is, terwijl de andere 0, 1 of 2 zijn. Afgezien van de volgorde komen voor (a,b,c) dus in aanmerking de drietallen

I. (0,0,0) III. (2,0,0) V. (1,2,0)
II. (1,0,0) IV. (1,1,0) VI. (2,2,0)

In geval I wint Ab, in alle andere gevallen hebben Ab, Bea en Cis dezelfde kansen, afhankelijk van de volgorde. Voorbeeld: in geval VI wint Ab bij (0,2,2), Bea bij (2,0,2) en Cis bij (2,2,0).

Als er *tien* balletjes getrokken worden, kan geval I zich niet voordoen. Dan heeft dus iedereen dezelfde winstkans.

Als er echter *negen* balletjes worden getrokken, kan geval I wel voorkomen, dus dan heeft Ab een grotere kans om te winnen.

Let er op dat we *niet* naar de grootte van de kansen gevraagd hebben!

Er waren 5 inzendingen, maar slechts 2 daarvan waren correct: die van Jeroen Tiggelman, en die van *Pieter Rijken*, 6 vwo, Nijmegen. Zij krijgen de twee prijzen.

PO 103

Een functie f voldoet aan

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2(f(y))^2$$

voor alle x en y. Verder is gegeven dat $f(-1) = 2$.

Bepaal $f(\frac{1987}{1988})$.

Commentaar om typografische redenen schrijven we in deze oplossing soms $a \uparrow b$ in plaats van a^b. Enige inzenders lieten zien dat de functie $f(x) = 2 \uparrow (x^2)$ aan de gestelde eisen voldoet, en concludeerden daaruit dat

$f(\frac{1987}{1988})$ dus gelijk moet zijn aan

$2 \uparrow (\frac{1987}{1988} \uparrow 2)$. Dat is echter slechts het halve werk, want er zijn nog meer functies die aan alle eisen voldoen.

Voorbeeld: $f(x) = 2 \uparrow (x^2)$ als x rationaal, en $f(x) = 0$ als x irrationaal is. Je bent dus pas klaar als je bewezen hebt dat voor *alle* functies die aan de eisen voldoen, geldt dat

$$f(\frac{1987}{1988}) = 2 \uparrow (\frac{1987}{1988} \uparrow 2).$$

Oplossing van *Gerton Lunter*, 5 vwo, Sneek:

Kies in de gegeven formule $x = -1$, $y = 0$, dan staat er $f(-1)f(-1) = (f(-1)f(0))^2$, dus $f(0) = 1$ of $f(0) = -1$.

Kies nu $x = y = -\frac{1}{2}$: $f(-1)f(0) = (f(-\frac{1}{2}))^4$. Het rechterlid is positief, $f(-1) = 2$, dus $f(0)$ moet $+1$ zijn.

Kies vervolgens $x = 0$, $y = -1$, dan krijg je een vergelijking die leidt tot $f(1) = 2$.

We gaan nu bewijzen dat voor elke x en voor elk natuurlijk getal n geldt dat

$$f(n \cdot x) = f(x) \uparrow (n^2). \qquad (1)$$

Voor $n = 0$ en $n = 1$ spreekt deze formule voor zichzelf.

We laten nu zien hoe (1) bewezen kan worden voor $n = k+1$ als je hem al bewezen hebt voor $n = k$ en voor $n = k-1$. Daaruit volgt dan stap voor stap de geldigheid van (1) voor $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ (deze bewijsmethode heet *volledige inductie*).

Neem dus aan dat (1) geldt voor $n = k-1$ en voor $n = k$. Dan volgt hieruit

$$f((k+1)x) = f(kx+x) = \frac{f(kx)^2 f(x)^2}{f(kx-x)} =$$

$\frac{(f(x)\cdot(k^2))^2(f(x))^2}{f(x)\cdot(k-1)^2} =$

$= f(x)\cdot(2k^2+2-(k-1)^2) =$
$f(x)\cdot\ (k+1)^2.$

De rest is simpel:

$2 = f(1) = f(1988\ .\ \frac{1}{1988}) =$

$f(\frac{1}{1988})\cdot 1988^2$ dus

$f(\frac{1}{1988}) = 2\cdot(\frac{1}{1988})^2$ en

$f(1987\ .\ \frac{1}{1988}) = f(\frac{1}{1988})\cdot 1987^2 =$

$= 2\cdot(\frac{1987}{1988})^2.$

Gerton merkte ook nog op dat de functie $f(x) = 2\cdot x^2$ aan alle eisen voldoet, maar, zo schrijft hij, 'ik kon niet bewijzen dat het de enige functie was die aan het voorschrift in de opgave voldoet.' We hebben hierboven al laten zien dat dit ook niet waar is. Uit het bovenstaande bewijs kun je echter eenvoudig concluderen dat $f(x)$ wèl volledig vastligt voor alle rationale x.

Ook *Wim Oudshoorn*, Heiloo, Vrije School, klas 9a, vond een correct bewijs; de oplossingen van de vijf overige inzenders waren onvolledig. Prijswinnaars zijn dus Gerton Lunter en Wim Oudshoorn.

Uitslag Ladderwedstrijd 1986/87

Aan de Pythagoras Olympiade hebben in de 26e jaargang 40 lezers meegedaan. Elke correcte oplossing leverde 1 punt op. Soms hebben we halve punten uitgedeeld.
De einduitslag is:

1.	Jeroen Tiggelman	10½ p
2.	Pieter Rijken	9 p
3.	Piet Bikker	8½ p
4.	Michael Cijsouw	8 p
5.	Erik Fledderus	7½ p
6-8.	Wim Oudshoorn	6 p
	Hugo Schnack	6 p
	Jan Willem Zijlstra	6 p
9-10.	Leon Bun	5 p
	Leonard Lensink	5 p.

De nummers 1, 2 en 3 hebben een boekenbon van ƒ 25,— ontvangen. □

Altijd een negenvoud

$$
\begin{aligned}
72 - 27 &= (7 - 2) \times 9 \\
38\ 17 - 17\ 38 &= (38 - 17) \times \ldots \\
874\ 326 - 326\ 874 &= (874 - 326) \times \ldots \\
\ldots\ \ldots - \ldots\ \ldots &= (8765 - 4321) \times 9999
\end{aligned}
$$

Kun je dit verklaren? □

Altijd een drievoud

De getallen a, b en c vormen een rekenkundige rij.
Laat zien dat $a + b + c$ een drievoud is. □

Internationale Wiskunde Olympiade

De 28e Internationale Wiskunde Olympiade werd vorig jaar gehouden van 5 tot 16 juli in Havanna, Cuba. Het aantal deelnemers was groter dan ooit, namelijk 237 uit 42 landen. 37 landen, waaronder Nederland, waren vertegenwoordigd met het maximaal toegestane aantal van zes deelnemers. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende deelnemers: Reyer Gerlagh (Driebergen), Bas van den Heuvel (Dordrecht), Mark van Hoeij (Someren), Joris van der Hoeven (Amsterdam), Roel Janssen (Kampen), Marc de Jong (Deventer).
Vijf van hen behaalden een prijs. Roel Janssen een tweede prijs, Reyer Gerlagh, Joris van der Hoeven, Marc de Jong en Mark van Hoeij een derde prijs.

Op twee achtereenvolgende dagen (10 en 11 juli) kregen de deelnemers 4½ uur voor drie opgaven. De maximale score per opgave bedroeg 7 punten. In vergelijking met voorgaande jaren was het aantal deelnemers met de maximale score van 42 punten uitzonderlijk hoog, namelijk 22. Zij kregen allen een eerste prijs. Er waren 42 deelnemers (32 tot en met 41 punten) die een tweede prijs kregen en 56 (16 tot en met 31 punten) behaalden een derde prijs. In het officieuze landenklassement werd Roemenië eerste met het spectaculaire aantal van 250 punten, West-Duitsland was tweede en Rusland derde. Nederland kwam op de 14e plaats met 146 punten.

Onder de eerste prijswinnaars was één meisje, uit China. Er waren naar schatting maar ongeveer 15 vrouwelijke deelnemers. Opvallend was de deelname van een 11-jarige jongen uit Australië, die 40 punten scoorde. Dit jaar zal de Olympiade worden gehouden in Australië. In de jaren 1989 en 1990 zullen resp. West-Duitsland en China gastland zijn.

De Nederlandse ploeg
De heren drs. J. M. Notenboom (SOL Utrecht) en drs. J. G. M. Donkers (TU Eindhoven) waren de begeleiders van de Nederlandse ploeg en hadden voor Nederland zitting in de internationale jury. Prof. dr. H. J. A. Duparc, voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor wiskunde, maakte dit jaar als waarnemer deel uit van de Nederlandse delegatie. De Nederlandse ploeg was geselecteerd uit de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1986. De voorbereiding op de internationale Olympiade door middel van lesbrieven werd verzorgd door J. Donkers.

Vijf leden van de Nederlandse ploeg hebben dit jaar hun eindexamen van de middelbare school gedaan. De zesde, Joris van der Hoeven zal het volgend jaar eindexamen doen.

De scores van de Nederlandse deelnemers zijn als volgt:

Opgave	1 2 3 4 5 6	totaal
Reyer Gerlagh	1 7 7 6 7 0	28
Bas van den Heuvel	0 7 1 0 7 0	15
Mark van Hoeij	0 0 7 6 7 0	20
Joris van der Hoeven	7 7 1 0 7 6	28
Roel Janssen	7 5 6 7 7 0	32
Marc de Jong	2 7 1 6 7 0	23

Landenklassement van de Internationale Wiskunde Olympiade 1987

1. Roemenië	250	22. Spanje	91
2. West-Duitsland	248	23. Marokko	88
3. Sovjet Unie	235	24. Cuba	83
4. Oost-Duitsland	231	25. **België**	74
5. U.S.A.	220	26. Iran	70
6. Hongarije	218	27. Noorwegen	69
7. Bulgarije	210	28. Finland	69
8. China	200	29. Colombia	68
9. Tsjechoslowakije	192	30. Mongolië	67
10. Groot Brittannië	182	31. Polen (3)	55
11. Vietnam	172	32. IJsland (4)	45
12. Frankrijk	154	33. Cyprus	42
13. Oostenrijk	150	34. Peru	41
14. **Nederland**	146	35. Italië (4)	35
15. Australië	143	36. Argentinië	29
16. Canada	139	37. Koeweit	28
17. Zweden	134	38. Luxemburg (1)	27
18. Joegoslavië	132	39. Uruguay	27
19. Brazilië	116	40. Mexico (5)	17
20. Griekenland	111	41. Nicaragua	13
21. Turkije	94	42. Panama	7

Tenzij tussen haakjes achter de naam van het land anders vermeld, bestond elk team uit 6 deelnemers.

Opgaven

1. Zij $p_n(k)$ het aantal permutaties van de verzameling $\{1,2,...,n\}$ die precies k invariante punten hebben.
   Bewijs:
   $$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$
   Opmerking: Een permutatie f van de verzameling S is een één-éénduidige afbeelding van S op zichzelf. Een element in S heet een invariant punt van de permutatie als $f(i) = i$.

2. In een scherphoekige driehoek ABC snijdt de bissectrice van hoek A de zijde BC in L en de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in N en A. K is de projectie van L op AB en M is de projectie van L op AC.
   Bewijs dat de oppervlakten van de vierhoek $AKNM$ en de driehoek ABC gelijk zijn.

3. Gegeven zijn reële getallen $x_1, x_2, ..., x_n$ waarvoor geldt $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Bewijs dat er voor elk geheel getal k met $k \geq 2$ gehele getallen $a_1, a_2, ..., a_n$ bestaan, niet alle gelijk aan 0, die voor alle i voldoen aan $|a_i| \leq k - 1$, zodanig dat geldt
   $$|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

4. Bewijs dat er geen functie f bestaat met f: $N \to N$ zodanig dat voor alle natuurlijke getallen n geldt
   $$f(f(n)) = n + 1987 \qquad N = \{0, 1, ...\}$$

5. Zij n een geheel getal groter dan of gelijk aan 3.
   Bewijs dat er n punten in het Euclidische vlak bestaan die voldoen aan
   (i) geen enkel drietal van de punten ligt op één lijn;
   (ii) elk tweetal van deze punten heeft een irrationale afstand;
   (iii) de oppervlakte van een driehoek bepaald door een willekeurig drietal van deze punten is rationaal.

6. Zij n een geheel getal groter dan of gelijk aan 2.
   Bewijs:
   Als $k^2 + k + n$ een priemgetal is voor alle gehele getallen k met $0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$, dan is $k^2 + k + n$ een priemgetal voor alle gehele getallen k met $0 \leq k \leq n - 2$.

Oplossingen verkrijgbaar bij Drs. J. G. M. Donkers, Faculteit der Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB EINDHOVEN. □

Redactioneel

Zoals aangekondigd in nummer 1, in dit nummer extra aandacht voor twee heel bijzondere meetkunde-stellingen: de **drie-koorden-stelling** en de **vlinderstelling**. We geven niet alleen een bewijs voor deze fraaie stellingen, maar gaan ook uitvoerig in op de (elementaire) meetkunde die daarbij nodig is (zie het stukje 'Verder de oude doos in' op bladzijde 6).

Met het artikel 'Halveren zonder schaalverdeling' lopen we al een beetje vooruit op nummer 3. Daarin wordt aandacht besteed aan passer-en-liniaal-constructies; met name de trisectie (driedeling) van de hoek. Uiteraard volgt in nummer 3 ook het aan het einde van 'Halveren zonder schaalverdeling' gevraagde bewijs.
Verder komen in het volgende nummer de oplossingen van de opgaven van de Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1987.

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.
Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.
Foto's en andere illustraties: Klaas Lakeman, Amsterdam (omslag, blz. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 20, 21, 22); Peter Bata (blz. 14); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26).

druk: koninklijke vermande bv

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij, Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^II, 1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 27, nummer 2

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.
Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	20,—/365
Inclusief Archimedes	36,—/660
Losse nummers	5,—/ 90

* Luchtpost-toeslag 15%

stichting ivio
Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL). Tel. 03200-76411
educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten
Postgiro Nederland: 287934 Postcheck België: 000-0130850-94