ONDERZOEKSOPDRACHT

THE MATCHING PROBLEM

Dit probleem werd voor het eerst bestudeerd door de Franse wiskundige Pierre Rémond de Montmort in zijn publicatie 'Essay d' Analyse sur les Jeux du Hazard' (1708).

Veronderstel dat je n kaarten hebt met op elke kaart een verschillend natuurlijk getal van 1 tot en met n. Je schudt de kaarten en legt ze één voor één neer terwijl je telt : "Eén, twee, drie …". Hoe groot is de kans dat je minstens één keer het getal uitspreekt dat op de kaart staat die je op dat ogenblik neerlegt?

Montmort voerde het experiment uit met 13 kaarten en noemde het spel 'Treize'. In de wetenschappelijke literatuur spreekt men over 'Rencontres' of 'The matching problem'.

We vermelden hier twee populaire versies van dit probleem.

1. Het probleem van de garderobejuffrouw.
   Een aantal mannen hebben hun hoed afgegeven aan de garderobe. De juffrouw van dienst geeft aan elke man een willekeurige hoed terug. Hoe groot is de kans dat minstens één man zijn eigen hoed terugkrijgt?

2. Het brievenprobleem.
   Iemand schrijft een brief op naam naar n personen en stopt die lukraak in de n omslagen waarop hij vooraf de adressen heeft geschreven. Hoe groot is de kans dat minstens één brief in de juiste omslag terechtkomt?

Telkens als een element op de juiste plaats terechtkomt, spreken we in het vervolg over een 'match' (to match = goed passen).

OPDRACHT 1 (praktische opdracht)

Neem 4 kaarten uit een kaartspel : harten aas, harten twee, harten drie en harten vier. Schudt de kaarten en leg ze één voor één op tafel neer. Tel het aantal 'matches'. Voer dit experiment een aantal keer uit. In hoeveel procent van de gevallen was er minstens één 'match'?

We zoeken nu een antwoord op de vraag hoe groot de kans is op 0, 1, 2, 3 of 4 'matches' wanneer men de vier kaartjes schudt waarop de getallen 1, 2, 3 en 4 staan.

Om deze vraag te beantwoorden volstaat het de 4! = 24 permutaties van het viertal (1,2,3,4) op te schrijven en bij elke permutatie het aantal 'matches' te tellen. Vul naast elke permutatie het aantal 'matches' in:

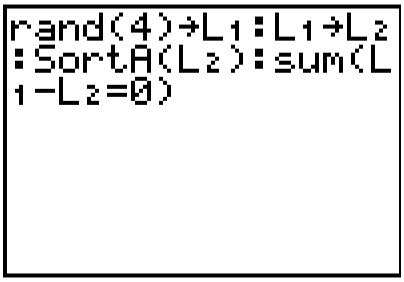
permutatie	aantal 'matches'	permutatie	aantal 'matches'
1234	4	3124	
1243	2	3142	
1324		3214	
1342		3241	
1423		3412	
1432		3421	
2134		4123	
2143		4132	
2314		4213	
2341		4231	
2413		4312	
2431		4321	

Als we met P(i,4) de kans aanduiden op i ‘matches’ bij 4 geschudde kaartjes (waarbij i een natuurlijk getal is van 0 tot en met 4), dan blijkt uit de bovenstaande tabel dat

P(0,4) = 9/24 = 0,375
P(1,4) = 8/24 = 0,3333…
P(2,4) = 6/24 = 0,25
P(3,4) = 0
P(4,4) = 1/24 = 0, 4166…

<u>OPDRACHT 2 (simulatie op het basisscherm van een GRM)</u>

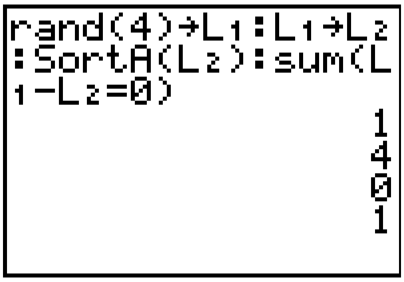
Typ de volgende vier instructies in op het basisscherm van jouw grafische rekenmachine:



Hiermee simuleer je het probleem met de vier kaartjes.

Verklaring :
rand(4) → L_1: het rekentoestel kiest vier reële getallen tussen 0 en 1 en bewaart die in lijst L_1 ;
$L_1 \to L_2$: lijst L_1 wordt gekopieerd in lijst L_2;
SortA (L_2) : de getallen in lijst L_2 worden in stijgende volgorde gesorteerd (SortA = sort ascending);
sum($L_1 – L_2$ = 0): voor elk van de vier getallen in beide lijsten kijkt het rekentoestel na of de getallen die op dezelfde plaats staan gelijk zijn of niet. Als ze gelijk zijn, krijgt de logische uitdrukking $L_1 – L_2 = 0$ de waarde 1. Als ze niet gelijk zijn, krijgt de logische uitdrukking $L_1 – L_2 = 0$ de waarde 0. De som komt dus overeen met het aantal ‘matches’.

Druk nu 24 keer na elkaar op de ENTER-toets en noteer het aantal ‘matches’ dat telkens op het scherm verschijnt. Vergelijk de gevonden resultaten met de theoretische waarden.



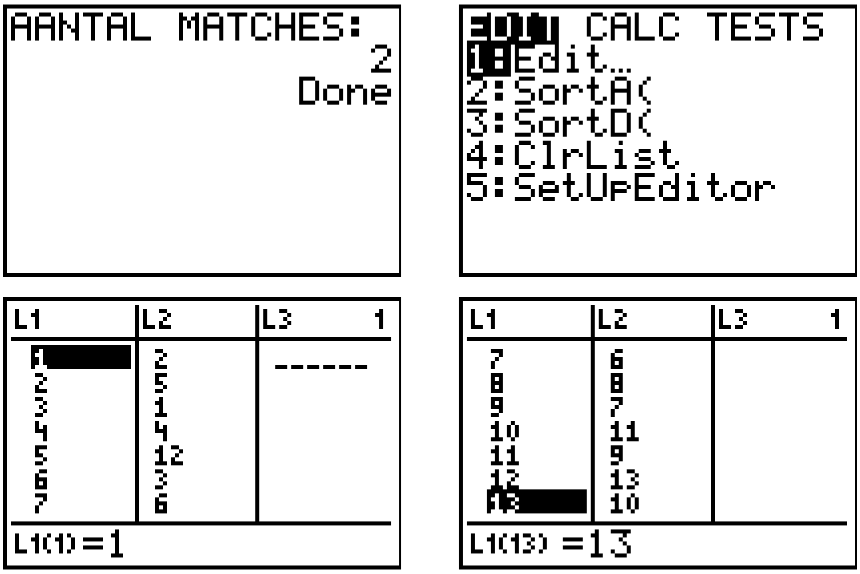
Op de bovenstaande schermafdruk zie je dat het experiment reeds 4 keer werd uitgevoerd en er waren respectievelijk 1, 4, 0 en 1 ‘matches’.

OPDRACHT 3 (simulatie van het spel ‘Treize’ op een GRM)

Het onderstaande programma simuleert het spel ‘Treize’. Verklaar hoe het programma het schudden van de kaartjes simuleert. Typ het programma in op jouw GRM en voer het enkele keren na elkaar uit. Na elke uitvoering verschijnt het aantal ‘matches’ op het scherm. Je kan na de uitvoering van het programma de lijsten L_1 en L_2 eens bekijken en door beide lijsten te vergelijken effectief ontdekken waar de ‘matches’ zitten.

PROGRAM:MATCHES
:ClrHome
:ClrList L_1, L_2
:seq(X,X,1,13) $\rightarrow L_1$
: $L_1 \rightarrow L_2$
:For(I,1,100)
        :randInt(1,12) $\rightarrow$ A
        :L_2(A) $\rightarrow$ B : L_2(A+1) $\rightarrow L_2$(A) : B $\rightarrow L_2$(A+1)
:End
:sum($L_1 - L_2$ = 0) $\rightarrow$ M
:Disp “AANTAL MATCHES : “,M

Bij het experiment waarvan hieronder enkele schermafdrukken staan, waren er twee ‘matches’ nl. bij het cijfer 4 en bij het cijfer 8.



OPDRACHT 4

Op het Internet vind je op de website http://www.rossmanchance.com/applets/ een leuk applet dat het probleem simuleert. Kies bij de rubriek **Probability and Inference** de toepassing *Random babies*.

Vier baby’s met een luier in een verschillende kleur lopen naar vier huisjes toe. Als de kleur van de luier dezelfde als die van het huisje waar de baby naartoe loopt, hebben we een ‘match’.

Voer het experiment uit met vijf baby’s. Kies voor 10, 100, 1000 … experimenten en vergelijk telkens de experimentele waarden met de theoretische waarden. Hoe vind je hierin de wet van de grote aantallen terug?

OPDRACHT 5

Herneem de opdrachten 1 en 2 voor het geval dat je met vijf kaartjes werkt waarop de cijfers van 1 tot en met 5 staan. Stel een tabel op met alle permutaties en bepaal zo de theoretische kansen op 0, 1, 2, 3, 4 of 5 'matches'. Simuleer het experiment daarna ook met jouw GRM.

Aanvulling voor de leraar.

Het bewijs van de **algemene formule** voor de kans P(m,n) op m 'matches' in een geschudde rij van n getallen behoort tot de hogere wiskunde :

$$P(m,n) = \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right).$$

Via deze formule vinden we bijvoorbeeld dat de kans dat er geen enkele 'match' is bij 4 getallen gelijk aan

$$P(0,4) = \frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

$$= 3/8$$
$$= 0{,}375.$$

De kans dat er geen enkele 'match' is in een geschudde rij van n getallen is voor grote waarden van n bij benadering gelijk aan

$$\frac{1}{e} = e^{-1}$$ (waarbij e = 2,71828 … het getal van Euler is).

Dit is een direct gevolg van het feit dat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$ (formule van MacLaurin voor de functie $y = e^x$).

Als je immers in deze formule aan x de waarde –1 toekent, bekom je dezelfde uitdrukking als P(0,n) (voor grote waarden van n).

De kans op minstens één 'match' bij n geschudde getallen is dan gelijk aan

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Dit getal convergeert voor grote waarden van n naar $1-\frac{1}{e} \approx 0{,}63$.

Een mooi 'klassikaal' experiment bestaat er in dat je bijvoorbeeld in een klas met 20 leerlingen de huistaken op een willekeurige manier teruggeeft aan de leerlingen en dan kijkt of minstens één leerling zijn eigen taak heeft ontvangen. De kans dat dit effectief ook gebeurt, is ongeveer 63%.