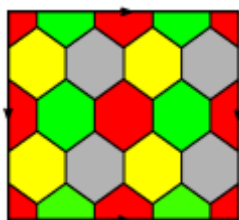


Het kleuren van kaarten door Jan Aarts

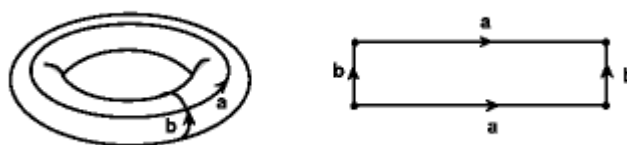


Kaartenmakers weten allang dat je aan vier kleuren genoeg hebt om de landen van een kaart zo te kleuren dat buurlanden nooit dezelfde kleur krijgen. Wiskundigen echter slaagden er lange tijd niet in een bewijs te leveren voor dit ervaringsfeit, dat dan ook bekend stond als het *vierkleurenprobleem*. De bewijzen, die inmiddels wel gevonden zijn, zijn nog steeds dermate ingewikkeld dat ze zonder computer niet geleverd noch gecontroleerd kunnen

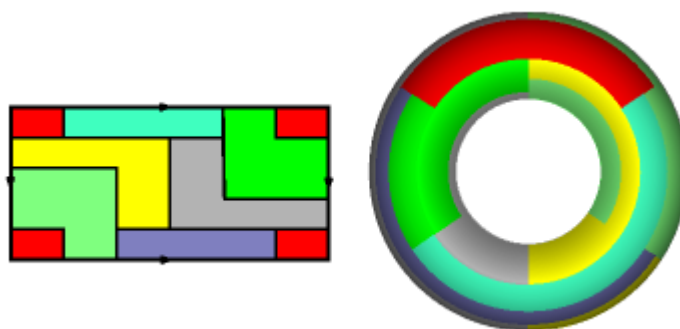
worden. Vreemd genoeg blijkt het kleurenprobleem voor landkaarten op ingewikkeldere oppervlakken een heel stuk gemakkelijker.

De torus

We kijken eerst naar de torus. Om het tekenen van kaarten op de torus te vereenvoudigen, knippen we de torus open, maar houden goed in de gaten hoe we hem weer in elkaar moeten plakken, zie figuur 1. In figuur 2 hebben we een kaart op de opgeknipte torus getekend die bestaat uit 7 landen die twee aan twee aan elkaar grenzen. Let goed op: nadat de torus in elkaar is geplakt (zie figuur 2, rechts) vormen de vier rode stukjes in de hoeken samen één land! Om deze kaart zó te kleuren dat buurlanden verschillende kleuren krijgen, zijn 7 kleuren nodig. Deze kaart toont dus aan dat je op de torus niet vier, maar minstens 7 kleuren nodig hebt om landkaarten te kleuren. 'Zijn 7 kleuren dan wel genoeg voor de torus?' is dan de logischerwijs de volgende vraag. Om dit probleem aan te pakken, moeten we eerst nog even kijken naar de definitie van een kaart.



Figuur 1



Figuur 2



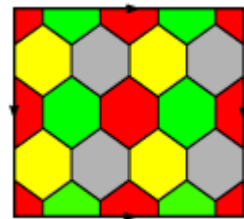
Figuur 3

Reguliere kaarten

Een *land* op de torus is een topologische veelhoek begrensd door ribben. Een *kaart op de torus* is een verdeling van de torus in een aantal landen, die alleen randpunten met elkaar gemeen kunnen hebben. Twee verschillende landen zijn *buurlanden* als de twee landen één of meer ribben gemeenschappelijk hebben. Een punt dat tot drie of meer landen behoort noemen we een *meerlandenpunt*. Als elk meerlandenpunt een drielandenpunt is dan noemen we de kaart *regulier*. Voor ons probleem hoeven we alleen naar reguliere kaarten te kijken. In figuur 3 zie je waarom dat zo is. Het vijflandenpunt, links, wordt door een kleine wijziging van de grenzen omgebouwd tot drie drielandenpunten, rechts. Als je de rechter kaart kunt kleuren, dan krijg je de kleuring van de linker kaart cadeau.

Stel nu dat iemand voor ons een reguliere kaart op de torus tekent. Kunnen we die dan kleuren met 7 kleuren? We tellen eerst hoeveel landen, ribben en hoekpunten de kaart heeft. Het aantal landen ('zijvlakken') noemen we Z , het aantal ribben R en het aantal hoekpunten H . Als ik dit doe bij de kaart in figuur 2, dan vind ik $Z = 7$, $R = 21$ en $H = 14$, en je ziet dat

$$Z - R + H = 0.$$



Figuur 4

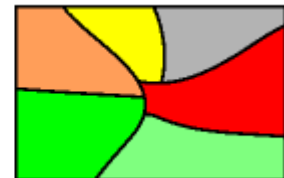
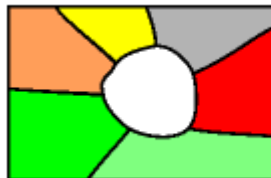
Deze formule staat bekend als de *formule van Euler voor de torus*. De formule is geldig voor iedere kaart op de torus. Als je de moed kunt opbrengen, moet je dit maar eens controleren bij de kaart in figuur 4. De kaart die we proberen te kleuren is regulier. Dat betekent dat in ieder hoekpunt 3 ribben samenkomen. Dat geeft $3H$ ribben. Maar hierbij wordt iedere ribbe 2 keer geteld, want iedere ribbe verbindt 2 hoekpunten. Dus $3H = 2R$. Dit stoppen we in de formule van Euler; er komt

$$3Z = 3R - 3H = R.$$

We beweren nu: *In onze kaart is er een land met ten hoogste 6 ribben, en dus ten hoogste 6 buuren*. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Zou ieder land ten minste 7 ribben hebben, dan krijgen we ten minste $7Z$ ribben, waarbij iedere ribbe 2 keer geteld wordt (want iedere ribbe behoort tot 2 landen). We vinden $2R \geq 7Z$; maar dat is in strijd met het eerdere resultaat $R = 3Z$. Daarmee is het bewijs van de bewering voltooid.

Zeven kleuren volstaan

Om te bewijzen dat je onze kaart kunt kleuren met 7 kleuren, gaan we als volgt te werk. Iedere kaart met ten hoogste 7 landen kunnen we kleuren met 7 kleuren; dat is geen kunst. Dan gaan we alle kaarten met 8 landen



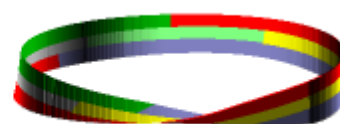
Figuur 5

kleuren, vervolgens alle kaarten met 9 landen, enzovoort. Iedere keer gaat dat op dezelfde manier, en ik zal nu vertellen hoe dat gaat. Ik neem aan dat ik iedere kaart op de torus met ten hoogste k landen gekleurd heb en dat ik nu een kaart met $k+1$ landen voor me heb liggen. Ik zoek nu in die kaart een land met ten hoogste 6 buuren; er is net bewezen dat zo'n land er

is. Hoe ik nu verder ga kun je zien in figuur 5. Ik trek dat land met ten hoogste 6 burens eerst samen tot één punt en maak vervolgens de kaart weer regulier. De kaart rechts heeft nu één land minder dan de gegeven kaart, dus k landen. Die kaart is al gekleurd met 7 kleuren. Ik breng die kleuring over naar de gegeven kaart en kleur het binnenste land met de zevende kleur. Klaar: *iedere kaart op de torus kan gekleurd worden met ten hoogste 7 kleuren.*

Andere oppervlakken

En hoe zit het nu met andere oppervlakken? In figuur 6 is een kaart op de Möbiusband getekend. Als je goed kijkt, dan zie je dat je 6 kleuren nodig hebt om deze kaart



Figuur 6

te kleuren. En je kunt bewijzen dat iedere kaart op de Möbiusband gekleurd kan worden met ten hoogste 6 kleuren. Precies hetzelfde resultaat vind je voor het projectieve vlak en de fles van Klein. Voor de krakeling, dat is een bol met twee hengsels, blijken 8 kleuren nodig te zijn.

Het onderzoek naar het kleuren van kaarten op oppervlakken gaat terug tot het artikel *Map Colour Theorem* dat P.J. Heawood in 1890 publiceerde in het *Quarterly Journal of Mathematics*. Van hem zijn de eerste formules en resultaten, bijvoorbeeld de resultaten voor de torus die we hier besproken hebben. Het duurde enige tijd voor men in de gaten kreeg dat er een lacune in de bewijzen zat. Het resultaat voor de fles van Klein bijvoorbeeld is gevonden door Philip Franklin in 1934. Het duurde tot 1968 voordat de bewijzen helemaal in orde waren. Dit alles kun je vinden in het boek *Map Colour Theorem* van Gerhard Ringel. Het boek opent met een spannend verslag van de dag waarop het bewijs door Ringel en Ted Youngs werd voltooid.

Over de formule van Euler voor *sferische veelvlakken* schreef J.M. Aarts een artikel in *Pythagoras*, december 2002.

Over het kleuren van *sferische veelvlakken* schreef Dion Gijswijt een artikel in *Pythagoras*, februari 2003.

Gerelateerde artikelen

['Vier kleuren is voldoende', zegt de computer](#)

Teken een landkaart, kleur de landen zó dat buurlanden nooit dezelfde kleur hebben, en gebruik daarbij zo min mogelijk kleuren. Je zult zien dat je aan vier kleuren genoeg hebt. Maar hoe bewijst je dat? Dat is kortgezegd het *vierkleurenprobleem*, waar inmiddels 150 jaar aan gewerkt is en dat vele bewijzen opgeleverd heeft waar echter altijd iets op aan te merken viel. Het eerste bewijs waar nog geen fout in ontdekt is, stamt uit 1976. Het is zo omvangrijk en ingewikkeld dat het alleen met een computer geleverd en gecontroleerd kan worden.