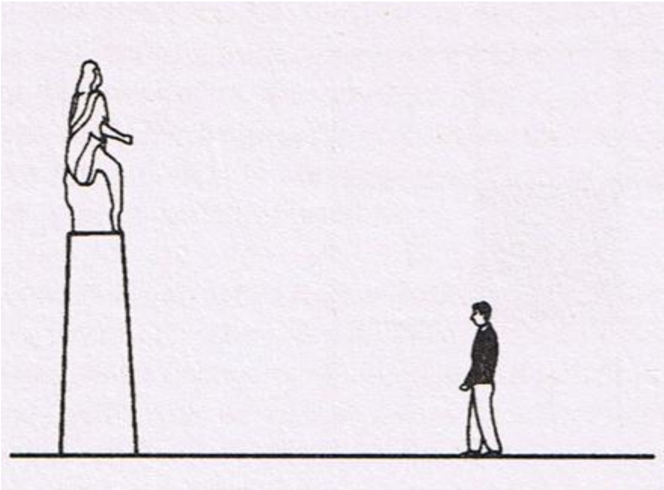
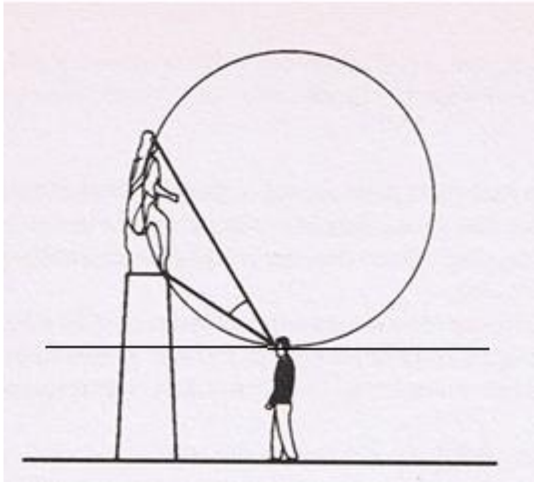
HET STANDBEELDPROBLEEM





HET PROBLEEM

Waar moet iemand gaan staan om een zo goed mogelijke kijk te hebben op een standbeeld dat op een sokkel staat, d.w.z. zo dat de hoek waaronder hij het standbeeld ziet zo groot mogelijk zou zijn ?

DE OPLOSSING

Teken een cirkel door het hoogste en het laagste punt van het standbeeld zodat die cirkel raakt aan de horizontale lijn die op de ooghoogte van de toeschouwer loopt. Als het oog van de toeschouwer zich in het raakpunt bevindt, staat hij op de ideale plaats.

VOORAFBESCHOUWING

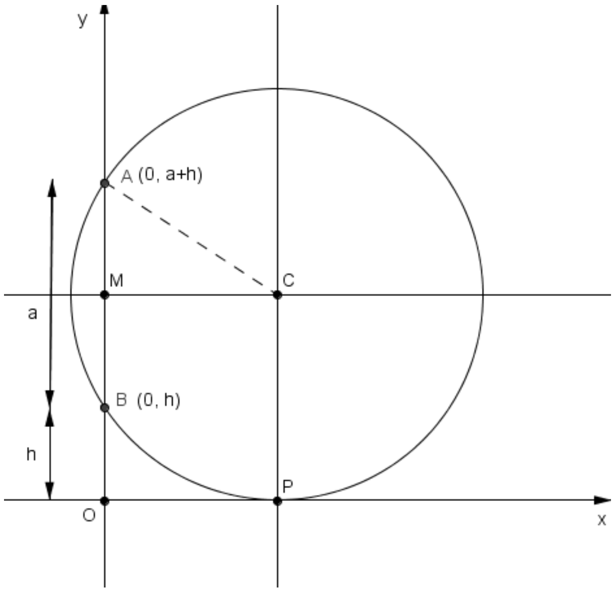
Stel dat a de hoogte is van het standbeeld en dat h de hoogte is van de sokkel boven de ooghoogte. Op de nevenstaande figuur duiden A en B het hoogste en het laagste punt van het standbeeld aan. Beschouw de cirkel met middelpunt C die door de punten A(0, a+h) en B(0, h) gaat en die raakt aan de x-as in het punt P.
De straal van die cirkel is klaarblijkelijk

$$|CP| = h + \frac{a}{2}.$$

Via de stelling van Pythagoras in driehoek AMC vinden we voor het apothema van de koorde [AB]:

$$|CM| = \sqrt{\left(h + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(a+h)h}\,.$$

Dit is uiteraard ook gelijk aan de afstand $|OP|$.



Opmerking.
Wie vertrouwd is met het begrip ‘macht van een punt ten opzichte van een cirkel’ weet dat

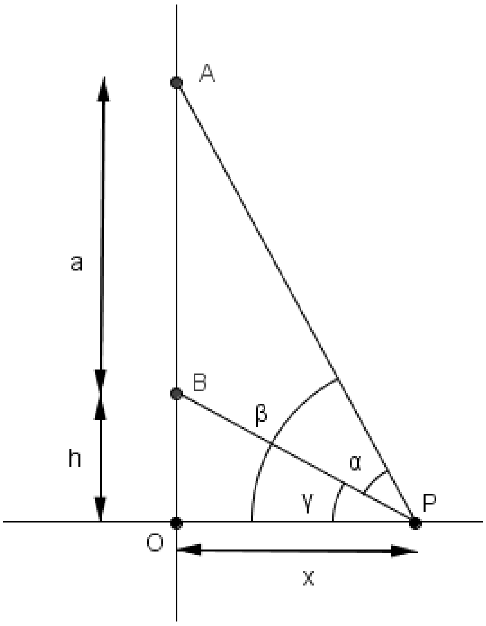
$$|OP|^2 = |OA|.|OB|$$

waaruit direct volgt dat

$$|OP| = \sqrt{(a+h)h}\,.$$

UITWERKING

We stellen een formule op voor de waarde van tan α in functie van x, waarbij α de hoek is van waaruit men van op een punt P het standbeeld [AB] ziet en waarbij x de afstand is van het oog tot de sokkel van het standbeeld.



$$\tan\alpha = \tan(\beta-\gamma)$$
$$= \frac{tan\,\beta - \tan\gamma}{1+\tan\beta.\tan\gamma}$$
$$= \frac{\frac{a+h}{x} - \frac{h}{x}}{1+\frac{(a+h)h}{x^2}}$$
$$= \frac{ax}{x^2+(a+h)h}.$$

We laten het aan de lezer over om de afgeleide te berekenen van deze uitdrukking en vast te stellen dat die nul wordt voor $x = \sqrt{(a+h)h}$, wat meteen een maximumwaarde oplevert voor tan α en dus ook voor de hoek α.