

Hoe verklaar je het onderstaande merkwaardig verband tussen de getallen uit de rij van Fibonacci en de breuk $\frac{1}{89}$?

$$\begin{array}{r}
 0.0 \\
 0.01 \\
 0.001 \\
 0.0002 \\
 0.00003 \\
 0.000005 \\
 0.0000008 \\
 0.00000013 \\
 0.000000021 \\
 0.0000000034 \\
 0.00000000055 \\
 0.000000000089 \\
 0.0000000000144 \\
 0.00000000000233 \\
 0.000000000000377 \\
 + \quad \dots \\
 \hline
 1/89 = 0.011235955056179\dots
 \end{array}$$

VERKLARING

Als F_n het n -de Fibonaccigetal is, dan tonen we aan dat voor een positief geheel getal $p > 1$ geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{p^n} = \frac{p}{p^2 - p - 1}.$$

Dan geldt voor $p = 10$ dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{p^n} = \frac{10}{89},$$

wat meteen het gezochte bewijs oplevert.

Welnu, volgens de formule van Binet is

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \text{ met } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dus is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{p^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\phi}{p} \right)^n - (-p\phi)^{-n} \right)$$

en via de gekende formule voor de som van een meetkundige reeks wordt dit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{p^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \frac{\phi}{p}} - \frac{1}{1 + (p\phi)^{-1}} \right).$$

Hieruit volgt via wat rekenwerk dat

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{p^n} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{p(1 + \phi^2)}{(p - \phi)(p\phi + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{p(1 + \phi^2)}{\phi p^2 - (\phi^2 - 1)p - \phi}. \end{aligned}$$

Rekening houdend met

$$\frac{1 + \phi^2}{\sqrt{5}} = \phi \quad \text{en} \quad \phi^2 - 1 = \phi$$

wordt dit uiteindelijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{p^n} = \frac{p}{p^2 - p - 1}.$$