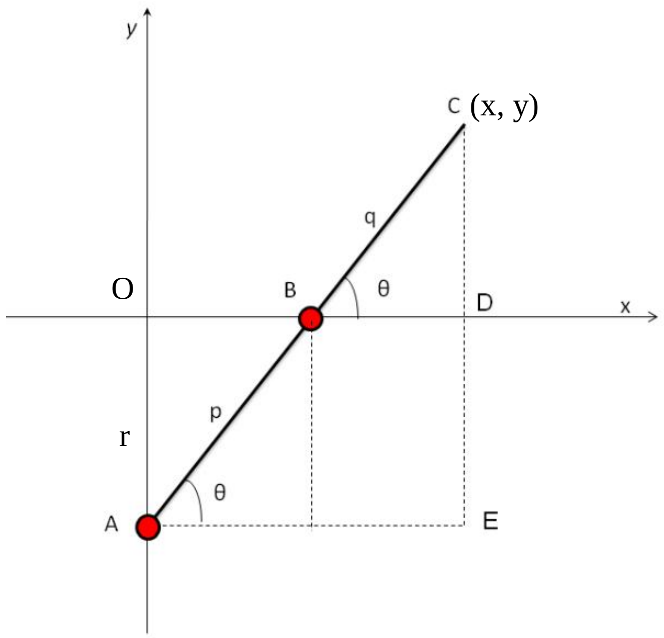
ELLIPSOGRAAF : DE TRAMMEL VAN ARCHIMEDES

Deze ellipsograaf bestaat uit een latje [AC] met daarop een punt B,
waarbij de punten A en B in twee loodrecht op elkaar staande sleuven kunnen schuiven.
Toon aan dat het punt C (het uiteinde van het latje) dan een ellips beschrijft.



EERSTE BEWIJS (met de notaties op de figuur).

Δ ACE is rechthoekig en bijgevolg is $x^2 + (y + r)^2 = (p + q)^2$. (1)

Δ BCD en Δ ACE zijn gelijkvormig en bijgevolg is $\frac{y+r}{y} = \frac{p+q}{q}$ zodat $y + r = \frac{(p+q)y}{q}$. (2)

Uit (1) en (2) volgt dat $x^2 + \frac{(p+q)^2 y^2}{q^2} = (p+q)^2$ en bijgevolg is

$$\frac{x^2}{(p+q)^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$

Stel p + q = a (|AC| = lengte van het latje = de halve grote as van de ellips) en stel q = b (de halve kleine as van de ellips), dan bekom je op die manier de klassieke vergelijking van de ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

TWEEDE BEWIJS (met de notaties op de figuur).

De x-coördinaat van C is $x = (p + q) \cos \theta$ en de y-coördinaat van C is $y = q \sin\theta$.
Via de grondformule van de goniometrie ($\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$) volgt hieruit direct dat

$$\frac{x^2}{(p+q)^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$