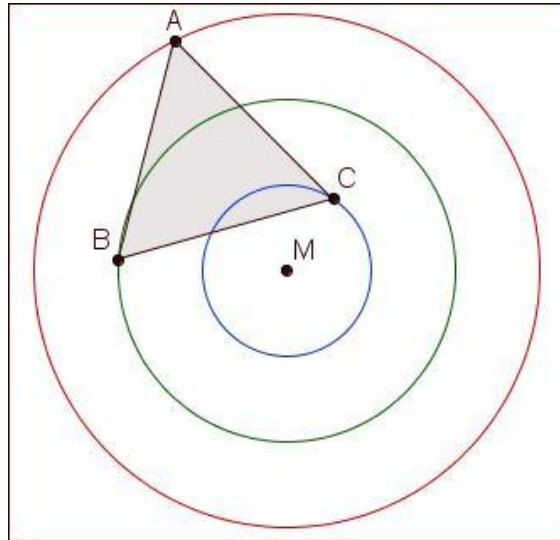




Beschouw (in het vlak) drie concentrische cirkels met stralen 1, 2 en 3 en een gelijkzijdige driehoek zodanig dat op elk van de drie cirkels één hoekpunt van deze driehoek ligt.

Bereken de lengte van de zijden van deze driehoek .

© Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w.

BEWIJS.

De omgekeerde stelling van Ptolemaeus zegt:

“Als het product van de lengtes van de diagonalen van een convexe vierhoek gelijk is aan de som van de producten van de lengtes van de paren overstaande zijden, dan is deze vierhoek een koordenvierhoek (m.a.w. de vier hoekpunten van deze vierhoek liggen op een cirkel).

Stel dat M het middelpunt is van de drie concentrische cirkels (zie figuur) en dat A,B en C de hoekpunten zijn van de driehoek.

Dan is $|MA| \cdot |BC| = |AC| \cdot |MB| + |AB| \cdot |MC|$ (want $|AB| = |AC| = |BC|$ en $|MA| = 3 = 2 + 1 = |MB| + |MC|$) zodat de omgekeerde stelling van Ptolemaeus geldig is.

Dan is $\widehat{AMC} = \widehat{ABC}$ (omtrekshoeken op dezelfde boog) en dus is $\widehat{AMC} = 60^\circ$.

Pas nu in driehoek AMC de cosinusregel toe: $|AC|^2 = |MA|^2 + |MC|^2 - 2 \cdot |MA| \cdot |MC| \cdot \cos 60^\circ$.

Hieruit volgt dat $|AC|^2 = 9 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (1/2) = 7$ zodat $|AC| = \sqrt{7}$.

De zijden van driehoek ABC hebben lengte $\sqrt{7}$.