

Eekhoutcentrum

Werkwinkel 5

Een duik in de geschiedenis van de wiskunde met Geogebra

Riggy Van de Wiele
Jef De Langhe

K.U. Leuven Campus Kortrijk
zaterdag 19 november 2011

Inleiding

Er zijn heel wat redenen om tijdens de lessen wiskunde te werken rond de geschiedenis van de wiskunde.

Zo kunnen we leerlingen laten inzien dat wiskunde een belangrijk onderdeel is van de menselijke cultuur. Heel wat termen uit de wiskunde worden trouwens in andere dan in wiskundige contexten gebruikt. Denken we bijv. aan "de kwadratuur van de cirkel" en "exponentieel stijgen".

Leerlingen krijgen ook een ander beeld van de wiskunde als ze inzien dat de wiskunde zich ontwikkeld heeft met vallen en opstaan en dat zelfs grote wiskundigen fouten maakten of problemen niet konden oplossen.

Door het vertellen van anekdotes ontdekken de leerlingen dat de wiskundigen mensen van vlees en bloed waren en dat niets menselijks hun vreemd was.

En last but not least levert de historische wiskunde heel wat interessante probleemsituaties om de leerstof aan te brengen, te illustreren of toe te passen.

De geschiedenis van de wiskunde kan op verschillende manieren in de lessen geïntegreerd worden. Zo kunnen we boeiend vertellen over een wiskundige of over een wiskundig probleem uit het verleden. Bij het begin van een leerstofgeheel kan een historische context de interesse en het engagement van de leerlingen opwekken. We kunnen een leerstofgeheel ook starten met een historisch probleem. Soms kan dit probleem onmiddellijk opgelost worden, maar soms kan het maar opgelost worden op het einde van het leerstofgeheel. Ook kunnen sommige historische problemen gebruikt worden als contextoefeningen op een kleiner geheel. Andere problemen kunnen dan weer gebruikt worden bij het oefenen op grote gehelen in de zgn. bufferruimten. En ten slotte zijn historische problemen vaak interessante onderwerpen voor onderzoeksopdrachten.

In deze sessie behandelen we een twaalfstal meetkundige problemen in een historische context¹. We starten met drie eenvoudige problemen uit verschillende periodes die verrassende resultaten opleveren. Daarna komen drie kernproblemen uit de Griekse oudheid aan bod. Het zijn de zogenaamde "onoplosbare" meetkundige constructies, d.w.z. constructies die niet uit te voeren zijn met passer en liniaal. In de 16de en de 17de eeuw begon men in de wiskunde voor het eerst dynamische processen te beschrijven. Het is dus logisch dat heel wat wiskundigen rond de cycloïde werkten, die daarom de "Helena van de meetkundigen" genoemd werd. Naast de cycloïde behandelen we ook enkele aanverwante krommen, de epicycloïde en de hypocycloïde. En ten slotte bespreken we enkele "vergeten" eigenschappen uit de meetkunde, stellingen die pas in de 20ste eeuw ontdekt werden, en die ons doen vermoeden dat er nog een schat aan meetkundige eigenschappen bestaat die wacht op ontdekking.

Heel wat meetkundeproblemen kunnen mooi geïllustreerd worden met een dynamisch meetkundeprogramma. De laatste jaren wordt veel gebruik gemaakt van het programma GeoGebra. Dit programma, dat meetkunde en algebra combineert, laat toe om meetkundige eigenschappen op een dynamische manier te illustreren, en tegelijkertijd coördinaten, afstanden, hoeken en oppervlakten te bepalen en vergelijkingen op te stellen.

In deze sessie maken we gebruik van de versie GeoGebra 4.0 die je sinds eind oktober gratis van het net kunt downloaden. In deze versie zitten heel wat nieuwe mogelijkheden, o.a. bij het gebruik van teksten, bij het werken met het rekenblad en bij het onderzoek van functies.

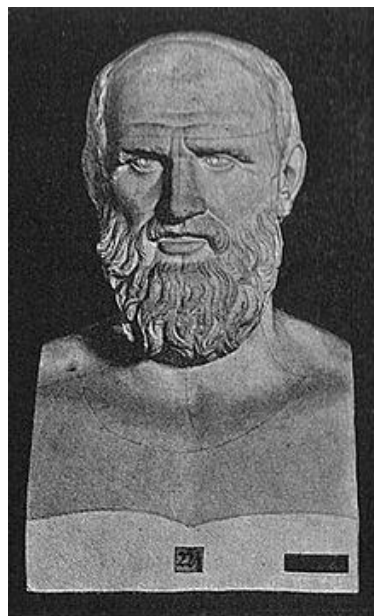
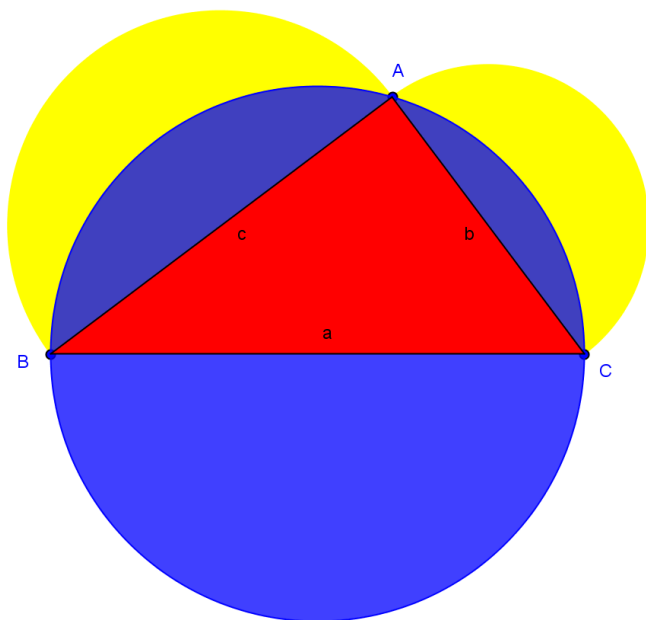
¹ De meeste problemen vind je ook terug in "Het wiskundeboek" van Clifford A. Pickover, uitgegeven bij Librero.

Hoofdstuk 1

Enkele verrassende resultaten

1

De maantjes van Hippocrates



Eén van de oud-Griekse wiskundige problemen staat bekend onder de naam "kwadratuur van de cirkel", nl. het construeren (met passer en liniaal) van een vierkant waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven cirkel.

In 1882 bewees Ferdinand von Lindemann (1852-1939) dat dit probleem onoplosbaar is.

Toch vond Hippocrates van Chios (ca. 470 v.Chr.-ca. 400 v.Chr.) dat de maantjes op bovenstaande figuur², die begrensd worden door halve cirkels, wel "kwadreeerbaar" zijn.

De som van de oppervlakten van die maantjes (bekend als "de maantjes van Hippocrates") zijn immers gelijk aan de oppervlakte van de rechthoekige driehoek ABC. Dit verrassend resultaat is gemakkelijk te bewijzen. Op bovenstaande figuur geldt immers:

$$\text{opp. maantjes} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{c}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} bc.$$

Nu is $c^2 + b^2 = a^2$, dus is de oppervlakte van de maantjes gelijk aan $\frac{1}{2} bc$, d.i. de oppervlakte van de rechthoekige driehoek.

2

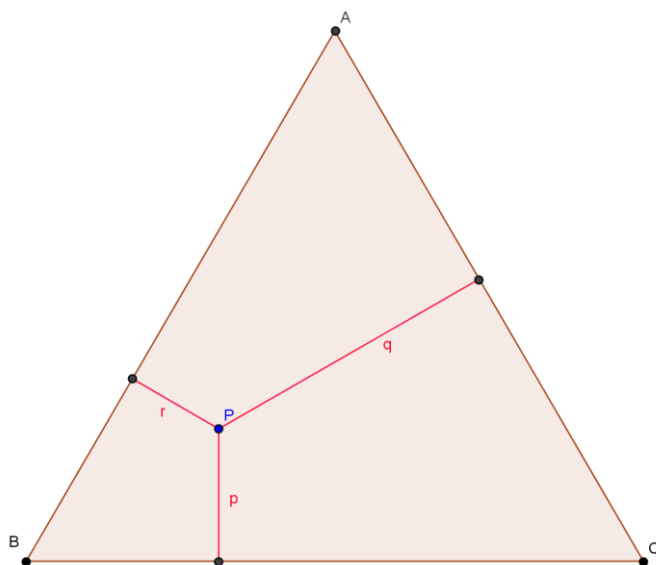
De stelling van Viviani

Een surfer is gestrand op een eiland in de vorm van een gelijkzijdige driehoek. Hij wil een hut bouwen op de plek waar de som van de afstanden naar de zijden het kleinst is, omdat hij aan alle drie de stranden evenveel surft. Waar moet hij zijn hut bouwen?

² Om de kleuren op de Geogebrafiguur te kunnen aanbrengen, werk je best met "lagen". De maantjes hebben dan bijv. laag 0, de cirkel laag 1 en de driehoek laag 2.

Het verrassend resultaat is dat de hut overal kan gebouwd worden.

Deze eigenschap "In een gelijkzijdige driehoek is de som van de afstanden van een willekeurig punt binnen de driehoek tot de drie zijden van de driehoek constant" is vernoemd naar de Italiaanse

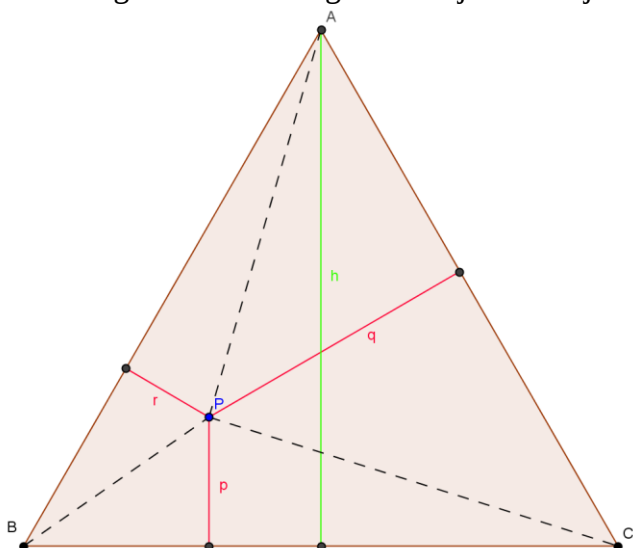


Vincenzo Viviani

wiskundige en wetenschapper Vincenzo Viviani (1622-1703), een leerling van Torricelli. Galileo Galilei was zo onder de indruk van Viviani's talent, dat hij hem naar zijn huis in Arcetri, ten zuiden van Firenze, haalde om met hem te werken. Na Galilei's dood schreef Viviani diens biografie. Hij hoopte een complete editie van Galilei's werk te kunnen publiceren, maar dit werd door de Kerk verboden.

In 1660 werkte Viviani samen met Giovanni Borelli aan een experiment om de snelheid van het geluid te kunnen bepalen. Aan de hand van het tijdsverschil tussen het beeld en het geluid van een kanon op grote afstand, bepaalden ze deze op 350 m/s. Dat was een stuk dichter bij de werkelijke waarde dan de 478 m/s die Pierre Gassendi daarvoor had bepaald³.

De stelling van Viviani is gemakkelijk te bewijzen.



We verdelen de driehoek ABC in drie driehoeken BPC , CPA en APB .

De som van de oppervlakten van deze

driehoeken is $\frac{z \cdot p}{2} + \frac{z \cdot q}{2} + \frac{z \cdot r}{2} = \frac{z}{2}(p + q + r)$.

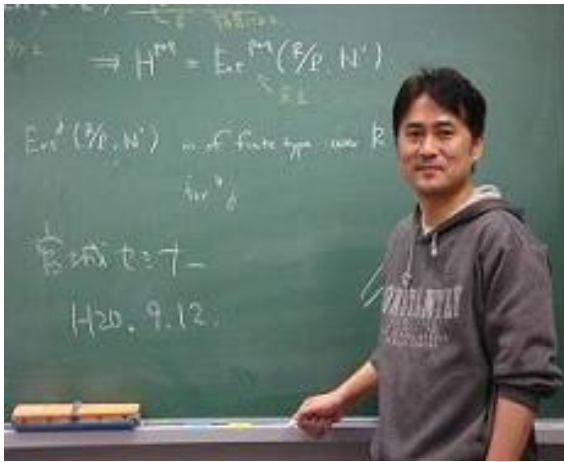
Die som is ook gelijk aan de oppervlakte van de driehoek ABC of aan $\frac{z \cdot h}{2}$.

Daaruit volgt: $p + q + r = h$.

De som van de drie afstanden is dus gelijk aan de hoogte van de driehoek en is dus constant.

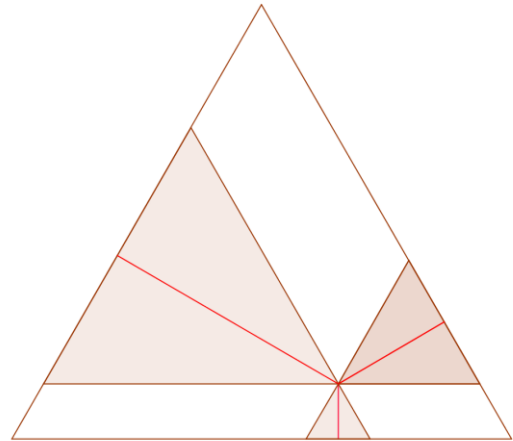
In 2005 publiceerde de Japanse wiskundige Ken-Ichiroh Kawasaki van de stelling van Viviani onderstaand "bewijs zonder woorden", dat we met GeoGebra heel mooi kunnen simuleren.

³ Voor lucht bij kamertemperatuur (20 °C) is de geluidssnelheid ca. 343 meter per seconde; bij droge lucht (met relatief weinig waterdamp) met een temperatuur van 0 °C is dat 331 m/s.

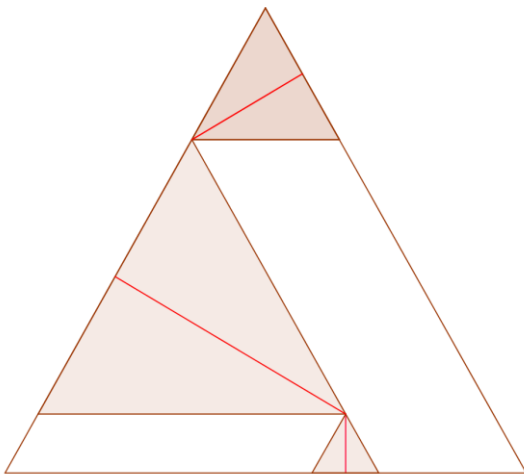


G

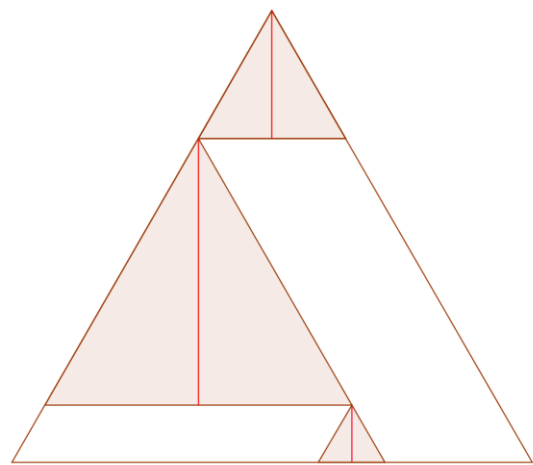
Ken-Ichiroh Kawasaki



1



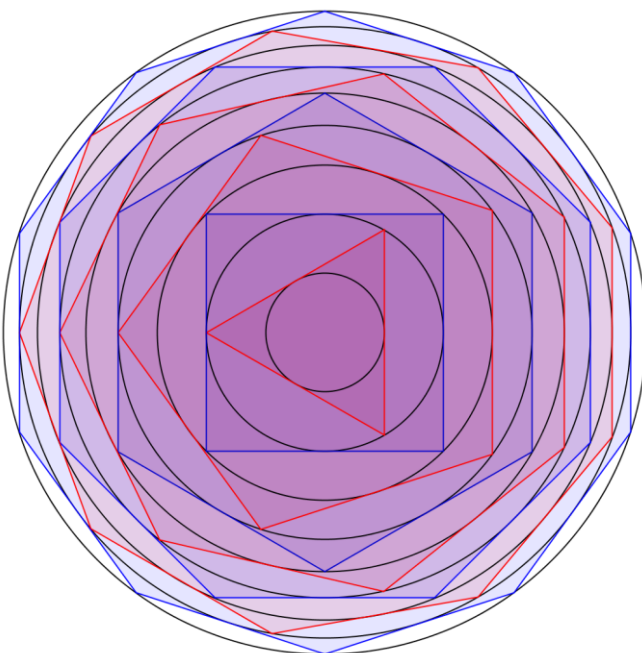
2



3

3

Cirkels en veelhoeken



- Teken een cirkel met straal $r = 1$ cm.
- Teken een regelmatige (gelijkzijdige) driehoek die omgeschreven is aan de cirkel. Teken daarna een cirkel die omgeschreven is aan de driehoek.
- Teken een regelmatige vierhoek (vierkant) die omgeschreven is aan de nieuwe cirkel. Teken daarna een cirkel die omgeschreven is aan de vierhoek.
- Ga daar oneindig mee door.

Je krijgt veelhoeken met telkens een hoekpunt meer en omgeschreven cirkels met een steeds grotere straal.

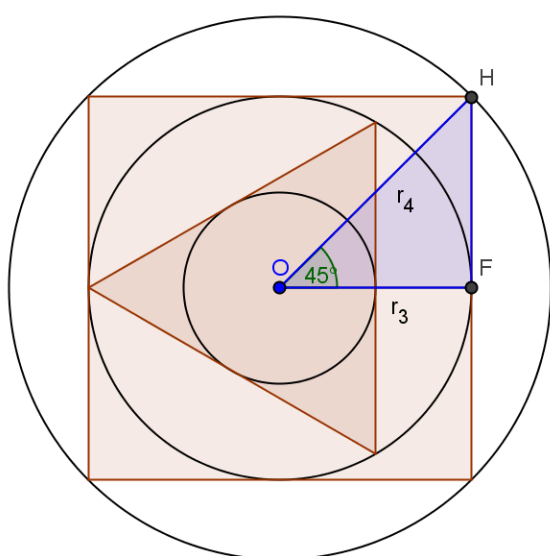
De vraag is nu: "wordt deze straal groter dan de straal van het zonnestelsel, groter dan de straal van de aarde, groter dan de straal van een bol van het atomium, groter dan de straal van een officiële wedstrijdvoetbal?"



Edward Kasner

Het is heel merkwaardig dat er lange tijd controverse was over de limietwaarde R van deze straal.

De eersten die deze limietwaarde uitrekenden in 1940 waren Edward Kasner (1878-1955) en James Newman in hun boek "Mathematics and imagination". Het was in datzelfde boek dat ze de benamingen "googol"⁴ en "googolplex"⁵ lanceerden. Strikt gezien werd de benaming "google" bedacht door het neefje van Edward Kasner, Milton Sirota, toen toen 9 jaar oud was en die op zijn vraag tijdens een wandeling in de New Jersey Palisades in 1938 de benaming bedacht. De firmanaam "Google" is afgeleid van Googol. Kasner en Newman kwamen voor de limietwaarde ongeveer 12 uit. Dezelfde waarde wordt ook genoemd in een Duits artikel uit 1964.



Laten we zelf de berekening eens maken.

Op nevenstaande tekening vinden dat in driehoek

OFH geldt: $r_3 = r_4 \cdot \cos 45^\circ = r_4 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$ en dus

$$r_4 = \frac{r_3}{\cos \frac{\pi}{4}}.$$

Algemeen geldt $r_n = \frac{r_{n-1}}{\cos \frac{\pi}{n}}$ ($n \geq 3$) en dus:

$$r_n = \frac{r}{\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{n}}$$

We vinden dan met GeoGebra:

$$r_{10} \approx 5,42675, \quad r_{100} \approx 8,28314, \quad r_{1000} \approx 8,65723$$

We kunnen dus vermoeden dat de limietwaarde R in de buurt van 8,7 moet liggen.

Het mag verbazend genoemd worden dat wiskundigen tot in 1965 hebben aangenomen dat R ongeveer 12 was.

De juiste waarde van R tot 16 cijfers na de komma is 8.7000366252081945.

⁴ 1 googol = 10^{100}

⁵ 1 googolplex = $10^{\text{googol}} = 10^{(10^{100})}$

Hoofdstuk 2: de Griekse oudheid

De drie "onoplosbare" constructieproblemen van de Griekse meetkunde

1

De Griekse meetkunde draaide vooral rond rechten en cirkels. Constructies werden uitgevoerd met liniaal en passer. De Grieken botsten daarbij echter op de grenzen van hun mogelijkheden. Drie belangrijke constructies bleken immers "onoplosbaar" met passer en liniaal. Ze hielden heel wat wiskundigen bezig tot in moderne tijden. De problemen zijn wel gekend: de verdubbeling van de kubus, de driedeling van een hoek en de kwadratuur van de cirkel.

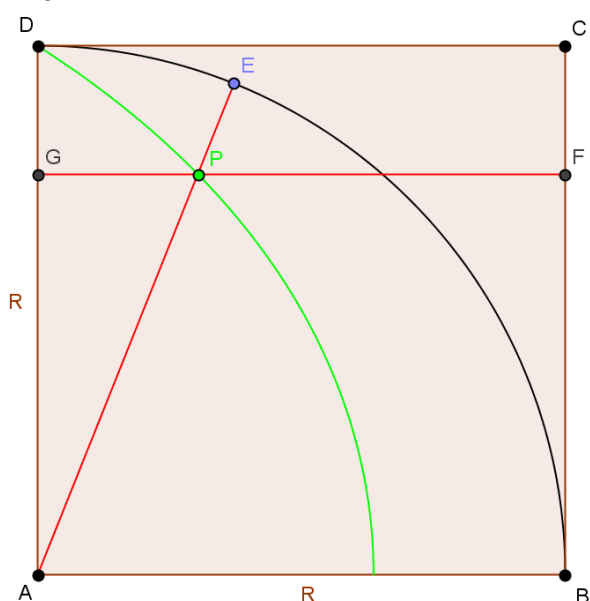
De legende gaat dat de burgers van Athene door een epidemie geteisterd werden, en dat zij in 430 voor Christus raad zochten bij het orakel van Apollo te Delos. Het orakel antwoordde dat het altaar van Apollo (dat de vorm van een kubus had) verdubbeld moest worden om de epidemie op te heffen. Gedachteloos begon men een altaar te bouwen met zijden dubbel zo groot als het oorspronkelijke. Maar de inhoud was helaas nu 8 keer zo groot. De goden waren vertoornd geraakt door deze blunder en de epidemie verergde. Men besloot ten einde raad Plato te raadplegen. Die zei: "De goden gaven ons deze opdracht niet omdat zij een groter altaar wilden, maar als verwijt dat wij de mathematica en geometrie verwaarlozen!" Vanaf die tijd wordt de verdubbeling van de kubus ook wel het "Delische probleem" genoemd.

De oude Grieken hadden voor hun constructies alleen passer en liniaal ter beschikking. Gedurende de 19de eeuw heeft de Franse wiskundige Pierre Wantzel bewezen dat de eerste twee problemen met deze hulpmiddelen alleen onoplosbaar zijn en voor het derde probleem heeft het geduurd tot 1882 alvorens Ferdinand von Lindemann hetzelfde heeft aangetoond.

Als we ons arsenaal van hulpmiddelen kunnen uitbreiden dan kunnen de problemen wel worden opgelost. Met nieuwe hulpmiddelen bedoelen we wiskundige hulpmiddelen, in het bijzonder speciale krommen: spiralen, de conchoïde, de quadratrix,...

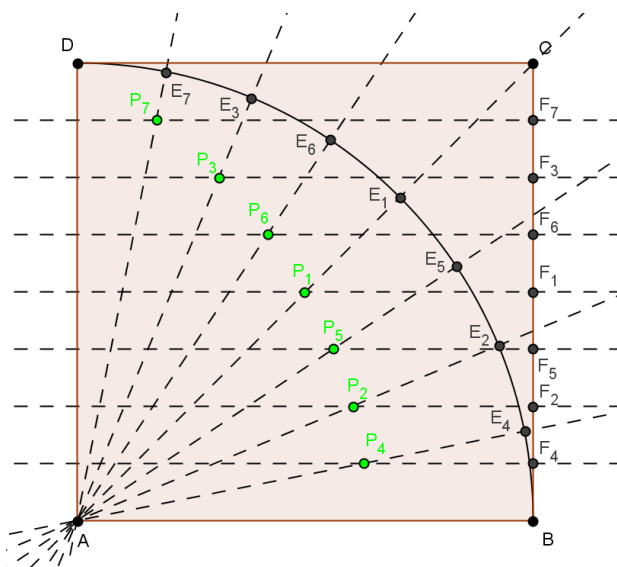
2

De Quadratrix



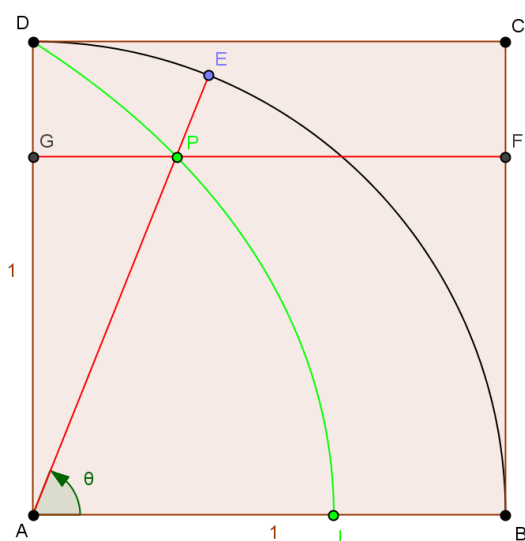
De quadratrix (van Hippias) is één van de krommen die je kan gebruiken om het probleem van de driedeling van een hoek op te lossen en in zekere zin ook de kwadratuur van de cirkel. Deze kromme verschijnt reeds in de oude Griekse meetkunde. Zij is genoemd naar Hippias van Elis en is gebruikt door Dinostratus en Nicomedes. De kromme wordt gedefinieerd op een dynamische manier. Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde R . In dat vierkant beschrijven we een cirkelboog met middelpunt A en straal R . Het punt E beweegt zich gelijkmatig langs de boog van D naar B en het punt F langs de verticale zijde van C naar B , zódanig dat ze beide gelijktijdig in B aankomen.

Als we nu het punt E verbinden met A en we door F een horizontale trekken, dan beschrijft hun snijpunt P de quadratrix.



Om de quadratrix met passer en liniaal te construeren, construeren we eerst het midden E_1 van de boog BD en het midden F_1 van het lijnstuk $[BC]$. Dit levert ons het punt P_1 van de quadratrix.

Door telkens bogen en lijnstukken te halveren, bepalen we de punten $P_2, P_3, P_4, \dots$



We construeren nu de quadratrix met GeoGebra. We kiezen R gelijk aan 1 en vertrekken van een willekeurig punt E op de boog BD . We verbinden dit punt met A en bepalen de hoek $\theta = \angle BAE$ in radialen. Dit is tegelijk de lengte van de boog BE .

$$\text{Nu geldt: } \frac{\text{bg } BE}{\text{bg } BD} = \frac{|BF|}{|BD|}, \text{ waaruit volgt } \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{|BF|}{1}$$

$$\text{en dus } |BF| = \frac{2\theta}{\pi}.$$

Dit laat ons toe het punt F te construeren. We trekken nu door F een horizontale rechte FG .

Het snijpunt P van AE en FG beschrijft de gezochte kromme, m.a.w. de quadratrix is de meetkundige plaats van het punt P als het punt E verandert.

Er is wel een klein probleem: de quadratrix heeft wel een startpunt, maar geen eindpunt! Als E en F hun eindpositie bereiken hebben we te maken met een singulier deel en is er geen snijpunt meer! Er is echter wel een limietstand van het punt P , nl. L en het is precies dat punt L dat we nodig hebben bij de kwadratuur van de cirkel.

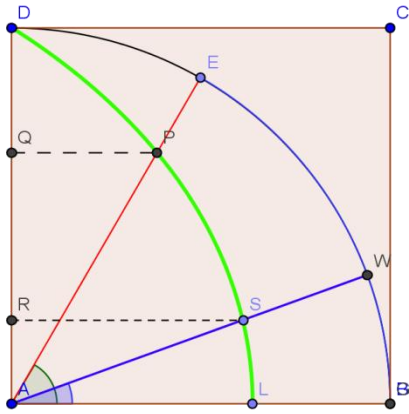
Is op een gegeven moment de hoek tussen AP en AB gelijk aan θ , dan is de afstand van P tot AB gelijk aan $\frac{2\theta}{\pi}$.

Als r gelijk is aan de lengte van $[AP]$ dan is $r \sin \theta = \frac{2\theta}{\pi}$ of $r = \frac{2\theta}{\pi \sin \theta}$

Laat men θ naar 0 gaan dan gaat r naar $\frac{2}{\pi}$ en dat is precies de afstand van A tot L .

Als je een assenstelsel kiest zo dat A in de oorsprong ligt en $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ en $D(0, 1)$ is, dan krijg je volgende vergelijking voor de quadratrix $x = y \cot(y \cdot \frac{\pi}{2})$ en bovendien $\lim_{y \rightarrow 0} x = \frac{2}{\pi}$.

De driedeling van een hoek



Laten we een hoek nemen van 60° (gemakkelijk te construeren met passer en liniaal). We hebben direct de punten P en Q . Het punt R is bepaald door $d(A, Q) = 3 \cdot d(A, R)$. Dit brengt ons tot het punt S op de quadratrix. Daaruit volgt (definitie quadratrix) dat de hoek $BAS = 20^\circ$.

De kwadratuur van de cirkel.

Feitelijk moet je aannemen dat het limietpunt L bestaat. Je kan het namelijk onmogelijk verkrijgen uit het dynamisch proces dat de quadratrix voortbrengt.

Dan kunnen we een vierkant construeren met als lengte van een zijde $\sqrt{\pi}$.

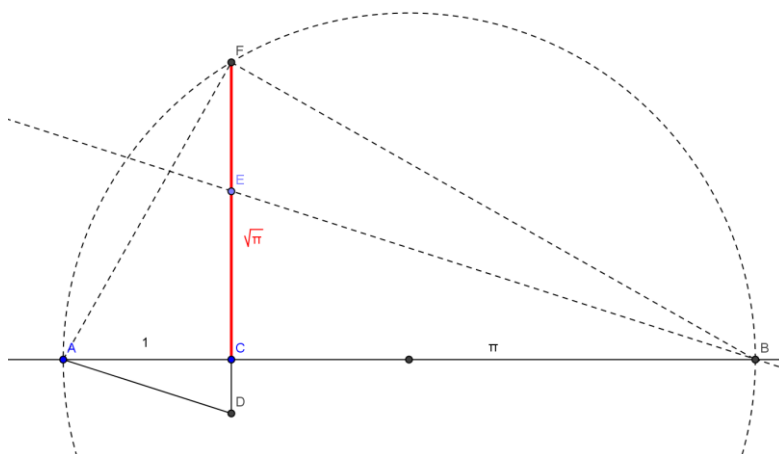
We kiezen de straal R van de gegeven cirkel als lengte-eenheid.

We weten al dat $d(O,L)=\frac{2}{\pi}$. Als $d(O,M)=d(M,L)$, dan hebben we een lijnstuk met lengte $\frac{1}{\pi}$

$d(A,C)=1, d(C,D)=\frac{1}{\pi}, d(C,E)=1$ (zie figuur) en door E tekenen we een evenwijdige aan de

rechte AD . Dit geeft ons het punt B en $d(B,C) = \pi$. Dan gebruiken we een zeer bekende constructie om het lijnstuk CF te tekenen met lengte $\sqrt{\pi}$.

Daarmee is ons probleem opgelost !



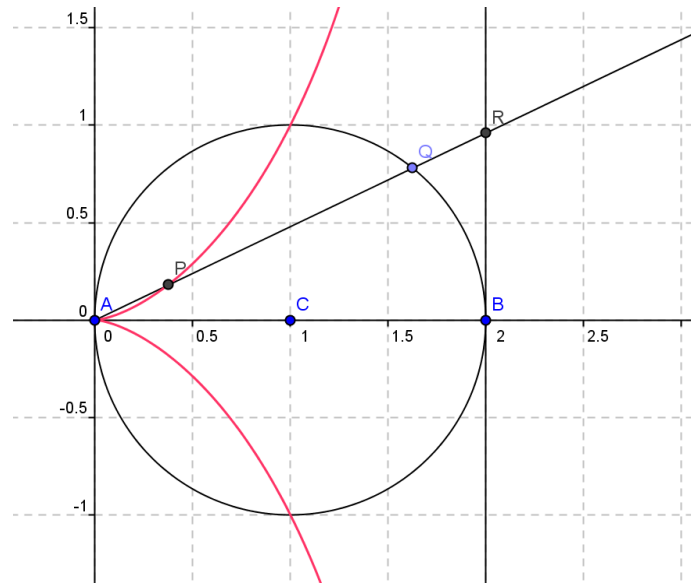
De cissoïde van Diocles.

De cissoïde van Diocles gebruikt een cirkel, een raaklijn eraan en het tegenpunt van het raakpunt. De constructie gaat als volgt:

Gegeven zijn twee vaste punten A en B . Met $[AB]$ als middellijn construeert men de cirkel c . In B trekt men de raaklijn t aan c .

Een veranderlijke rechte door A snijdt c een tweede keer in Q en snijdt t in R .

Construeer het punt P zodat $\vec{AP} = \vec{QR}$. De meetkundige plaats van P is een cissoïde.



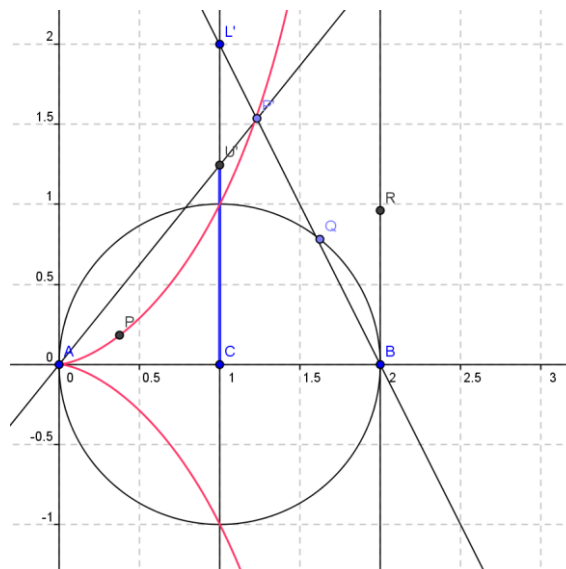
De verdubbeling van de kubus

Trek een rechte door het middelpunt van de cirkel en evenwijdig aan de raaklijn.

Snij de rechte BP met deze rechte: dat geeft het punt L . U is het snijpunt van AR met CL .

Als de straal van de cirkel 1 is, dan is $|CU|^3 = |CL|$. Als $|CL| = 2$, dan is $|CU| = \sqrt[3]{2}$

Om $\sqrt[3]{2}$ te construeren werken we dus andersom: Je neemt $|CL| = 2$, trekt dan BL , P is het snijpunt met de cissoïde, trek AP , en U is het snijpunt met CL .



Hoofdstuk 3: de renaissance (16de - 17de eeuw)

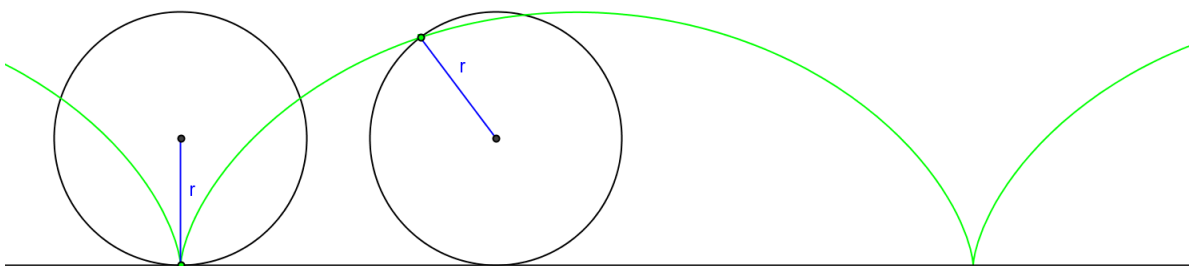
De cycloïde en aanverwante krommen

1

In de 16de en de 17de eeuw gaat men in de wiskunde voor het eerst dynamische processen beschrijven. Logisch dat men zich dan gaat interesseren voor krommen die bewegende punten beschrijven. Eenvoudige bewegingen zijn cirkels die rollen over rechten (de beweging van een wiel) en cirkels die rollen over cirkels: cycloïden, epicycloïden en hypocycloïden.

2

De cycloïde is een wiskundige figuur die gevormd wordt door het pad dat wordt afgelegd door een punt op een cirkel, als deze cirkel over een rechte lijn rolt zonder glijden.



Hoewel de kromme al bestudeerd werd door Nicolaas van Cusa (1401-1464) werd ze voor het eerst cycloïde genoemd door Galileo Galilei (1564-1642). Galilei trachtte, zonder succes, om de oppervlakte onder één boog te bepalen. Omdat zijn wiskundig onderzoek faalde (de differentiaalrekening werd pas later uitgevonden door Isaac Newton en Gottfried Wilhelm Leibniz), sneed hij een stuk metaal in de vorm van een cycloïde en vergeleek het gewicht ervan met het gewicht van de genererende cirkel. Hij stelde vast dat de cycloïde drie maal meer woog dan de cirkel, maar hij verwierp dat resultaat, omdat hij ervan overtuigd was dat de verhouding van de oppervlakten irrationaal was. Later bewezen Gilles Personne de Roberval (1602-1675) en Evangelista Torricelli



Galileo Galilei



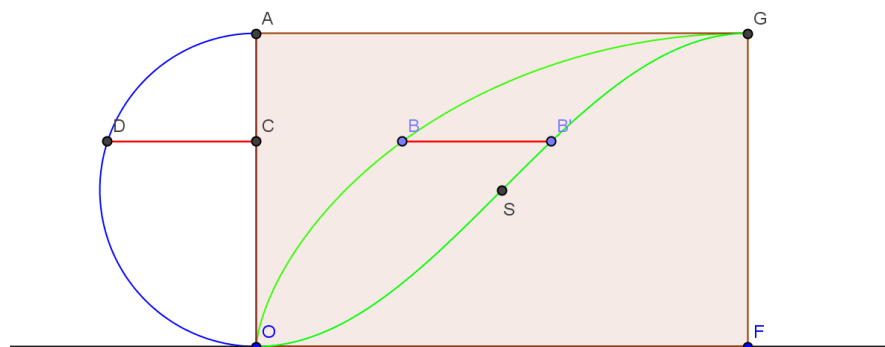
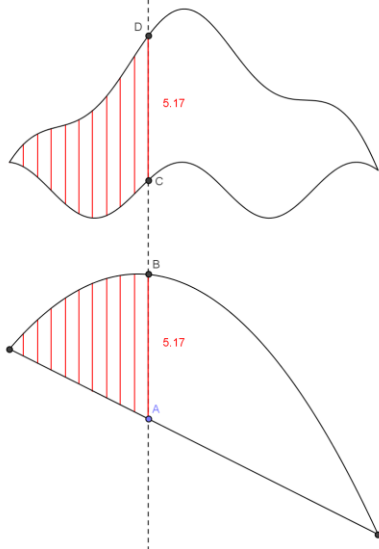
Gilles de Roberval



Evangelista Torricelli

dat het experiment van Galilei de correcte verhouding had opgeleverd. Roberval maakte daarbij gebruik van het principe van Cavalieri. Cavalieri beschouwde daarbij een oppervlakte als iets dat

bestaat uit een onbepaald aantal ondeelbare horizontale lijnstukken. Verschuiven we die lijnstukken, dan blijft de oppervlakte ongewijzigd.



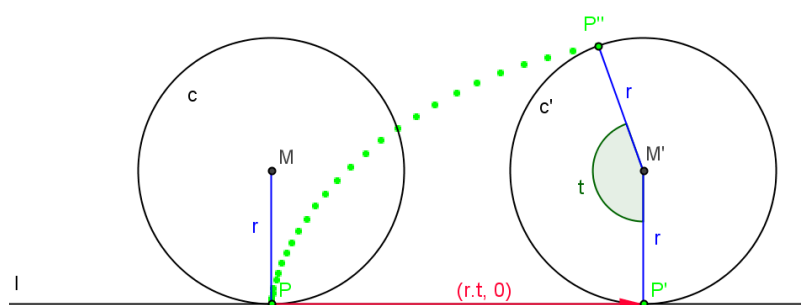
De hctfr van de oppervlakte onder de cycloïde

$$\begin{aligned}
 &= \text{oppervlakte onder de slt nsnide} + \text{oppervlakte tussen de sinusoidt en de cycloïde} \\
 &= 2 \frac{1}{2} \text{ opp. rechthoek OFGA} + \frac{1}{2} \text{ opp. genererende cirkel} \\
 &= \frac{1}{2} \pi r \cdot 2r + \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{3}{2} \pi r^2
 \end{aligned}$$

De briljante wiskundige Blaise Pascal (1623-1662) gaf zijn wiskundige studie al op vroege leeftijd op, om zich volledig aan God toe te wijden. Toch wordt er verteld dat hij op een nacht in 1658, toen hij de slaap niet kon vatten door tandpijn, begon na te denken over een aantal problemen rond de cycloïde. Zijn tandpijn ging over en Pascal zag daarin een teken dat God hem ertoe aanzette om zijn werk over de cycloïde voort te zetten. Pascal berekende o.a. de oppervlakte én het zwaartepunt van een cycloïdesegment.

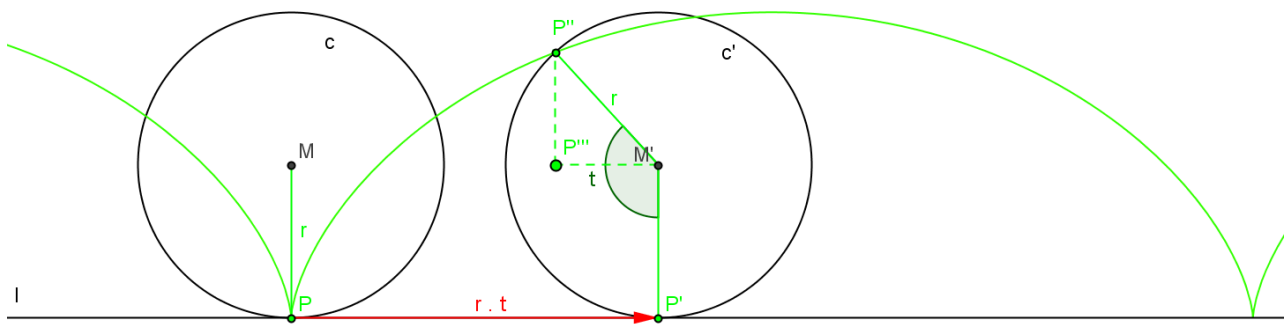
Later vonden Pierre de Fermat en Vincenzo Viviani een methode om een raaklijn te construeren aan de cycloïde en berekende Christopher Wren (de architect van Sint-Paul's cathedral) de lengte van de cycloïdeboog.

Vele andere wiskundigen bestudeerden in de volgende decennia de cycloïde en haar eigenschappen, o.a. Marin Mersenne, René Descartes, Christiaan Huygens en John Wallis. Omdat er zoveel discussie ontstond over de prioriteit van hun ontdekkingen, werd de cycloïde naar Helena van Troje de "Helena van de meetkundigen" genoemd.



Het is vrij eenvoudig om de cycloïde met GeoGebra te tekenen.

Is het punt P t.o.v. de verticale gedraaid over een hoek t , dan is de cirkel over de rechte l gerold over een afstand $l = r \cdot t$. Om het punt P'' van de cycloïde te construeren, dat hoort bij een waarde t , verschuiven we daarom eerst de cirkel c , het middelpunt M en het punt P over de vector $(r \cdot t, 0)$. De resultaten zijn c' , M' en P' . Daarna draaien we het punt P' rond M' over de hoek t in wijzerzin (dus over de hoek $-t$).



Vanuit de constructie kunnen we gemakkelijk de parametervergelijkingen van de cycloïde opstellen. Kiezen we de x -as op de rechte l en de y -as door P loodrecht op l , dan volgt uit

$\vec{PP''} = \vec{PP'} + \vec{P'M'} + \vec{M'P''}$ dat:

$$x = r \cdot t + r \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = r \cdot t - r \cdot \sin(t) = r(t - \sin(t))$$

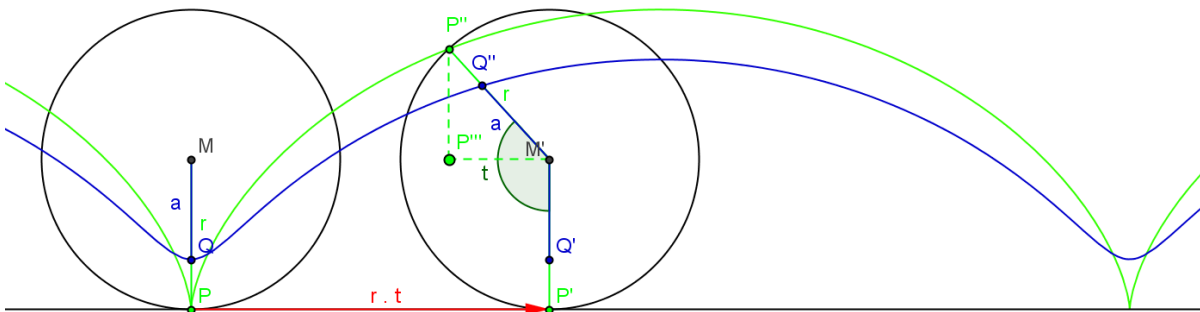
$$y = r + r \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = r - r \cdot \cos(t) = r(1 - \cos(t))$$

Ook voor punten die binnen of buiten de cirkel liggen kunnen we gemakkelijk parametervergelijkingen opstellen. Stel dat het punt Q op een afstand a ligt van het middelpunt M van de cirkel, dan krijgen we als parametervergelijkingen:

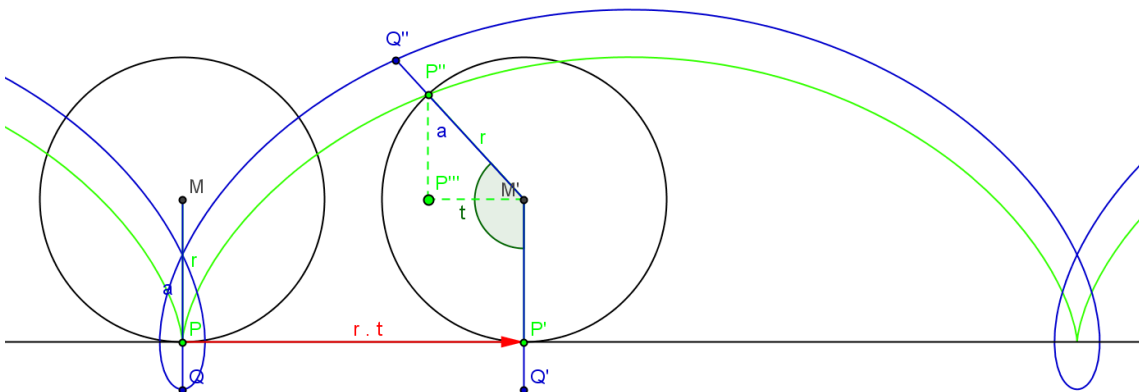
$$x = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$$

$$y = r - a \cdot \cos(t)$$

Hieronder zien we een voorbeeld voor de baan van een punt Q dat op een afstand a ligt van het middelpunt M van de cirkel met $a < r$.



En hieronder een voorbeeld voor de baan van een punt Q dat op een afstand a ligt van het middelpunt M van de cirkel met $a > r$.

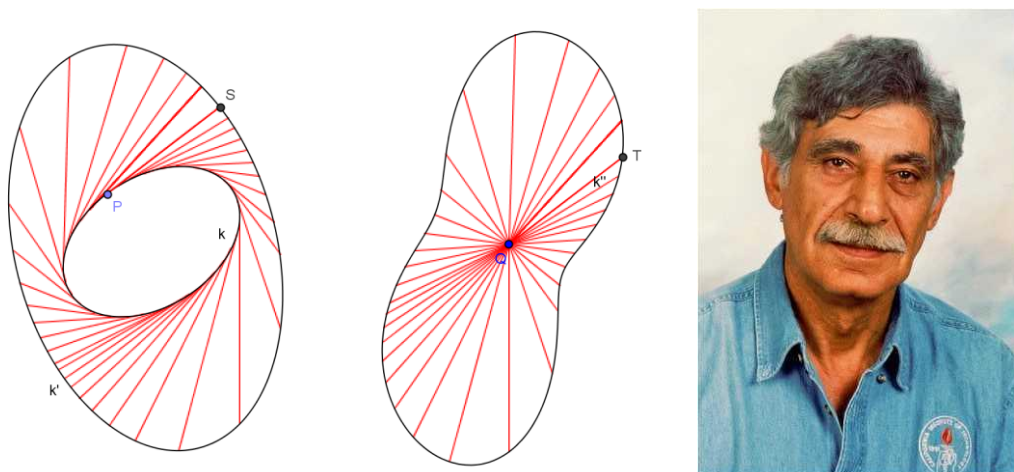


We kunnen de oppervlakte van een cycloïdeboog uiteraard met integraalrekening berekenen.

$$A = \int_{t=0}^{t=2\pi} y \, dx = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 \, dt = \left[r^2 \left(\frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2$$

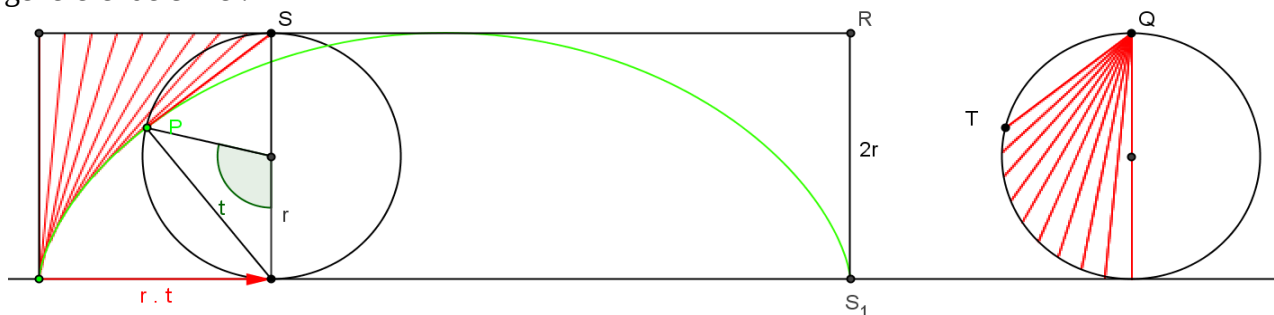
De oppervlakte is dus gelijk aan 3 maal de oppervlakte van de genererende cirkel.

De Armeense wiskundige Mamikon Mnatsakanian bedacht echter in 1959 een elegante methode om de oppervlakte te berekenen zonder integralen. Daartoe ontwikkelde hij het zgn. "principe van Mamikon", dat enige verwantschap toont met principe van Cavalieri. Mamikon gaf een exact bewijs van zijn principe in 1981.



Om de oppervlakte tussen 2 krommen k en k' te bepalen, nemen we een willekeurig punt P op de kromme k . We tekenen in P de raaklijn die de kromme k' snijdt in S . We nemen nu een vast punt Q en verschuiven het lijnstuk $[PS]$ naar $[QT]$. Als P de kromme k doorloopt zal T een kromme k'' doorlopen. Mamikon stelde vast dat de oppervlakte tussen k en k' gelijk is aan de oppervlakte binnen de kromme k'' .⁶

Passen we dit toe op de cycloïde, dan zien we dat T een cirkel doorloopt die congruent is met de genererende cirkel.



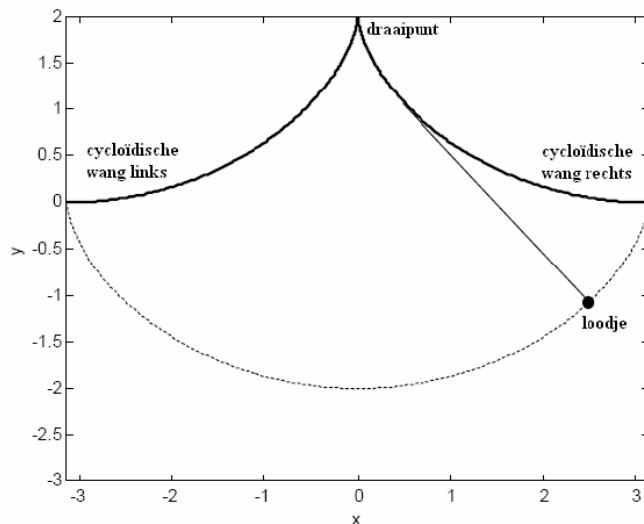
$$\text{Oppervlakte boven de cycloïdeboog} = \text{Oppervlakte cirkel} = \pi r^2$$

$$\text{Oppervlakte onder de cycloïdeboog} = (2\pi r) \cdot (2r) - \pi r^2 = 3\pi r^2$$

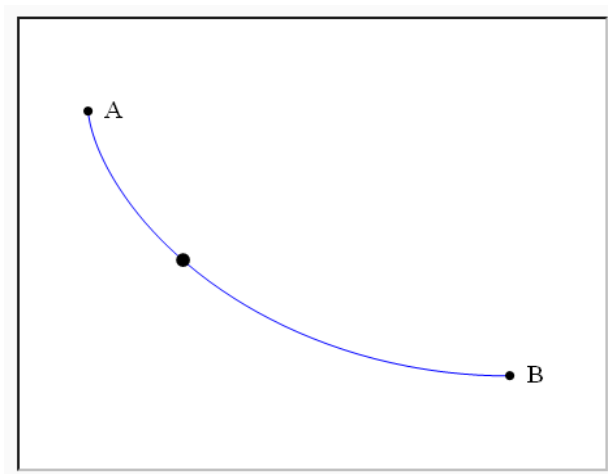
De cycloïde wordt ook soms de tautochroon genoemd, van "tautos = gelijk" en "chronos = tijd". In 1659 had Christiaan Huygens onderzocht hoe je een slingeruurwerk regelmatig kon doen lopen. In tegenstelling tot wat vaak gedacht wordt is bij een gewone slinger (een gewicht aan een touwtje dat aan een vast punt hangt) de slingertijd afhankelijk van de uitwijking. Bij grotere uitwijking

⁶ Meer over het principe van Mamikon leest u in Uitwiskeling, jaargang 27, nr. 4, pag. 49-54. Daar wordt ook verwezen naar de website www.mamikon.com.

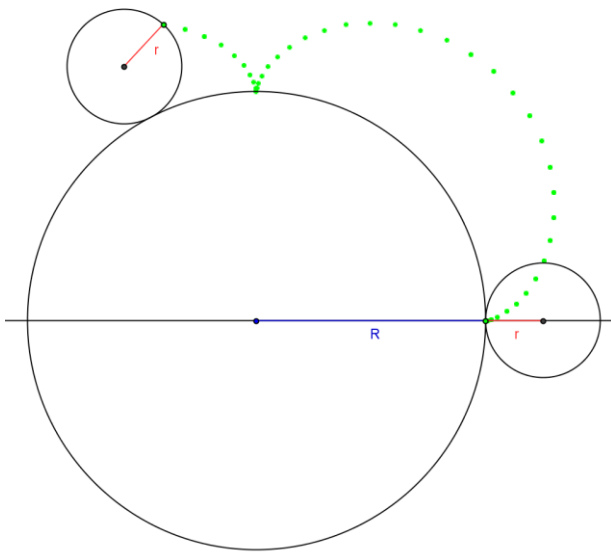
wordt de slingertijd groter en dat is niet handig. Huygens ontdekte dat als je het gewicht van een slinger langs cycloïden kon leiden, de slingertijd onafhankelijk van de uitwijking werd. Neem twee even grote cycloïden, hang ze naast elkaar en hang in hun ontmoetingspunt een gewicht aan een touw dat half zo lang is als de cycloïden zelf. Omdat het touw door de cycloïden in zijn beweging wordt beperkt gaat het gewicht een derde (weer even grote) cycloïde beschrijven.



Enkele jaren later daagde Johan Bernouilli de wiskundigen uit om het volgende probleem op te lossen. Gegeven twee punten A en B . Zoek een kromme door A en B die zodanig is dat een (wrijvingsloos) object zo snel mogelijk van A naar B zou rollen.



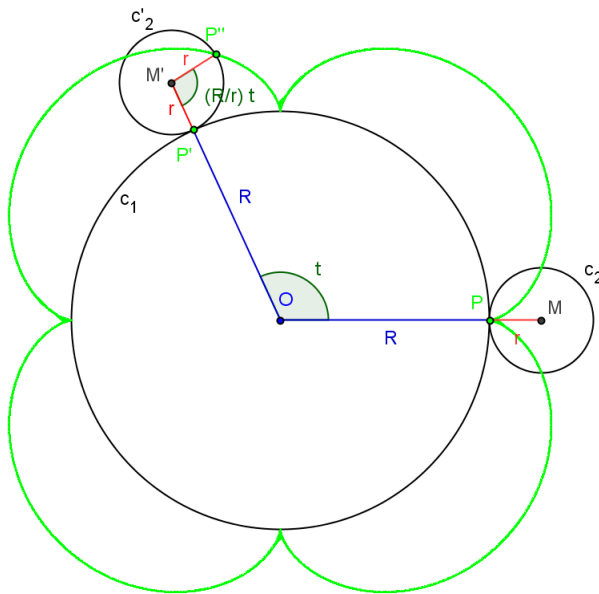
Bernoulli publiceerde een tijdje later zelf de oplossing: "Geachte lezer, U zult stomverbaasd zijn dat deze kromme niets anders is dan de tautochroon van Huygens". Om die reden wordt de cycloïde ook de brachistochroon genoemd van "brachos = kort" en "chronos = tijd".



Een aanverwante kromme aan de cycloïde is de epicycloïde.

Het is een wiskundige figuur die gevormd wordt door het pad dat wordt afgelegd door een punt op een cirkel met straal r , als deze cirkel langs de buitenzijde rolt over een cirkel met straal R .

De epicycloïde werd voor het eerst zo genoemd door Ole Römer in 1674. Maar vele andere wiskundigen werkten rond de epicycloïde, o.a. Albrecht Dürer, Girard Desargues, Christiaan Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz, Guillaume de l'Hospital, Jakob Bernoulli, Leonhard Euler, Edmund Halley en Isaac Newton.



Ook de epicycloïde is vrij eenvoudig te construeren met GeoGebra. Laten we de kleine cirkel rollen van de stand c_2 met middelpunt M naar de stand c_2' met middelpunt M' zó dat de hoek MOM' gelijk is aan t , dan ondergaat het punt P een dubbele rotatie, nl. een rotatie rond O over de hoek t én een rotatie rond M' over de hoek $\frac{R}{r}t$.

Om het punt P'' van de cycloïde te construeren, dat hoort bij een waarde t , draaien we daarom eerst de cirkel c_2 , het middelpunt M en het punt P in tegenwijzerzin rond het punt O over de hoek t . De resultaten zijn c_2' , M' en P' .

Daarna draaien we het punt P' rond M' over de hoek $\frac{R}{r}t$, eveneens in tegenwijzerzin.

Ook hier kunnen we uit de constructie de parametervergelijkingen bepalen.

Kiezen we de x -as op de rechte OM en de y -as door het punt O loodrecht op OM , dan volgt uit

$\vec{OP''} = \vec{OM'} + \vec{M'P''}$ dat:

$$x = (R+r) \cdot \cos(t) + r \cdot \cos\left(t + \frac{R}{r}t - \pi\right) = (R+r) \cdot \cos(t) - r \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$

$$y = (R+r) \cdot \sin(t) + r \cdot \sin\left(t + \frac{R}{r}t - \pi\right) = (R+r) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$

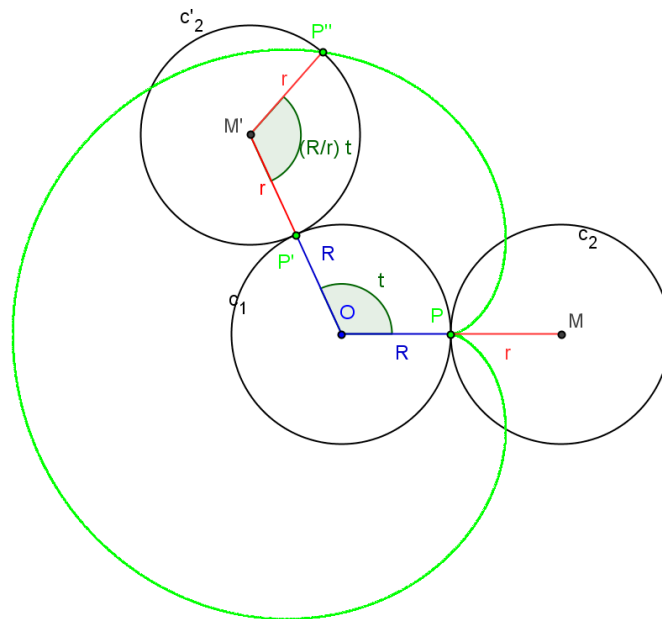
Is $\frac{R}{r}$ een natuurlijk getal n , dan is de kromme gesloten, en bestaat ze uit n bogen.

Immers, na 1 boog is t toegenomen met $\frac{2\pi r}{R} = \frac{2\pi}{n}$; na n bogen is t dan toegenomen met 2π .

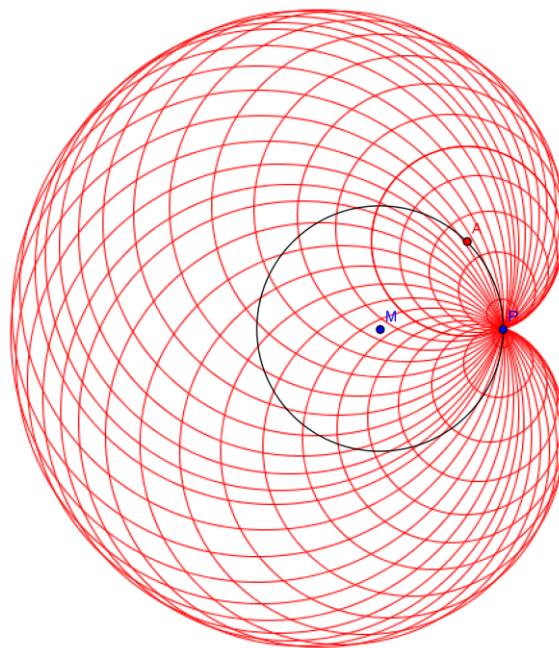
Is $\frac{R}{r}$ een rationaal getal $\frac{p}{q}$, dan is de kromme eveneens gesloten, en bestaat ze uit p bogen.

Immers, na 1 boog is t toegenomen met $\frac{2\pi r}{R} = \frac{2\pi q}{p}$; na p bogen is t dan toegenomen met $2\pi q$.

In het bijzonder geval dat $R = r$, krijgen we een kromme die slechts bestaat uit één boog.

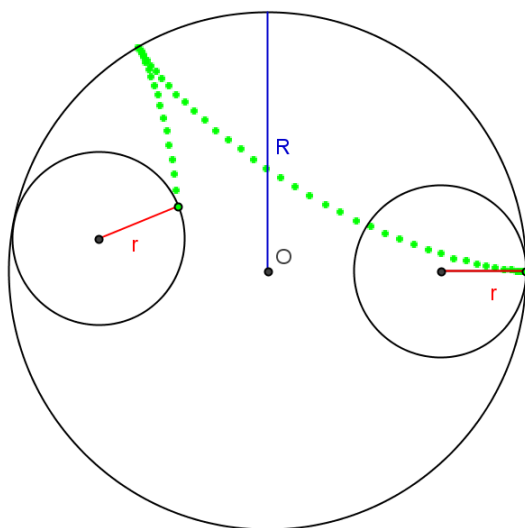


De kromme heet dan een cardioïde (hartkromme).

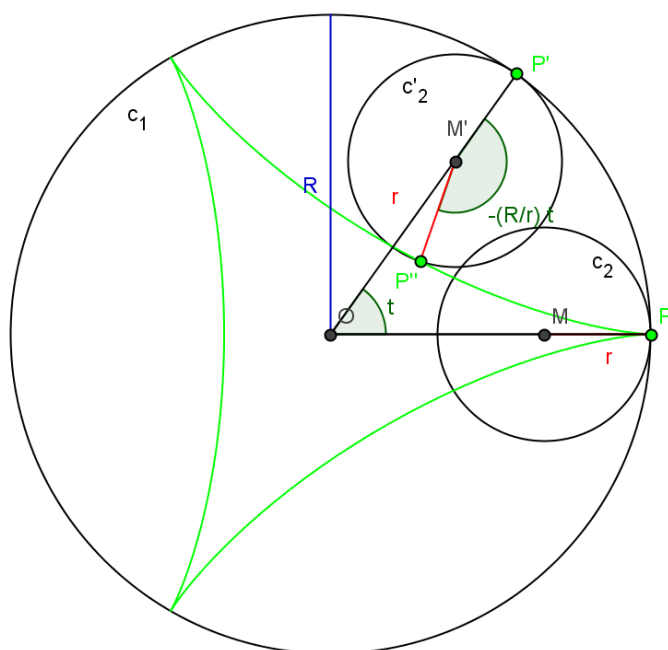


De cardioïde kan ook verkregen worden door een cirkel c te tekenen met daarop een vast punt P . We tekenen nu cirkels die het middelpunt op de omtrek van c hebben én door P gaan. De omhullende van deze cirkels is de cardioïde.

Laten we de kleine cirkel met straal r langs de binnenzijde rollen over de grote cirkel met straal R , dan krijgen we een hypocycloïde.



De hypocycloïde werd ontdekt in 1599 door Galileo Galilei en Marin Mersenne. Ze werd voor het eerst zo genoemd door Ole Römer in 1674. Maar ook Johan en Daniel Bernouilli en Leonhard Euler hebben de kromme bestudeerd.



De constructie van de hypocycloïde lijkt sterk op die van de epicycloïde. Laten we de kleine cirkel rollen van de stand van de stand c_2 met middelpunt M naar de stand c'_2 met middelpunt M' zó dat de hoek MOM' gelijk is aan t , dan ondergaat het punt P een dubbele rotatie, nl. een rotatie rond O over de hoek t én een rotatie rond M' over de hoek $-\frac{R}{r}t$.

Om het punt P'' van de cycloïde te construeren, dat hoort bij een waarde t , draaien we daarom eerst de cirkel c_2 , het middelpunt M en het punt P in tegenwijzerzin rond het punt O over de hoek t . De resultaten zijn c'_2 , M' en P' . Daarna draaien we het punt P' rond M' over de hoek $-\frac{R}{r}t$, dus in wijzerzin.

Ook hier kunnen we uit de constructie de parametervergelijkingen bepalen.

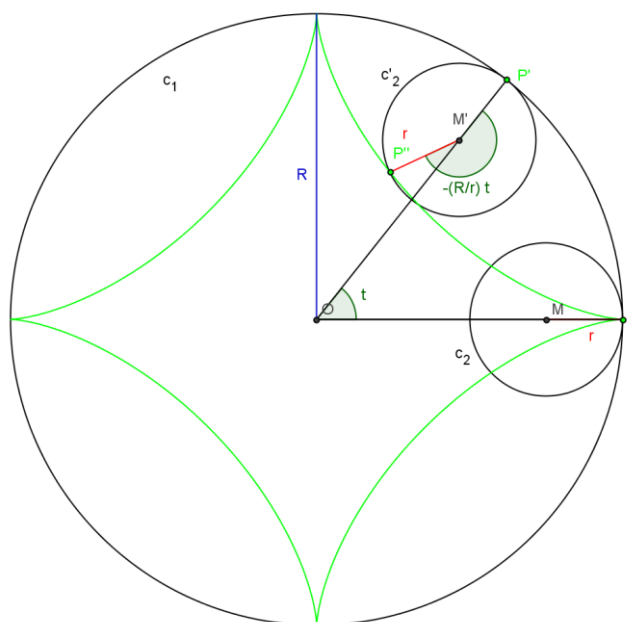
Kiezen we de x -as op de rechte OM en de y -as door het punt O loodrecht op OM , dan volgt uit

$\vec{OP''} = \vec{OM'} + \vec{M'P''}$ dat:

$$x = (R-r) \cdot \cos(t) + r \cdot \cos\left(-\frac{R}{r}t + t\right) = (R-r) \cdot \cos(t) + r \cdot \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$

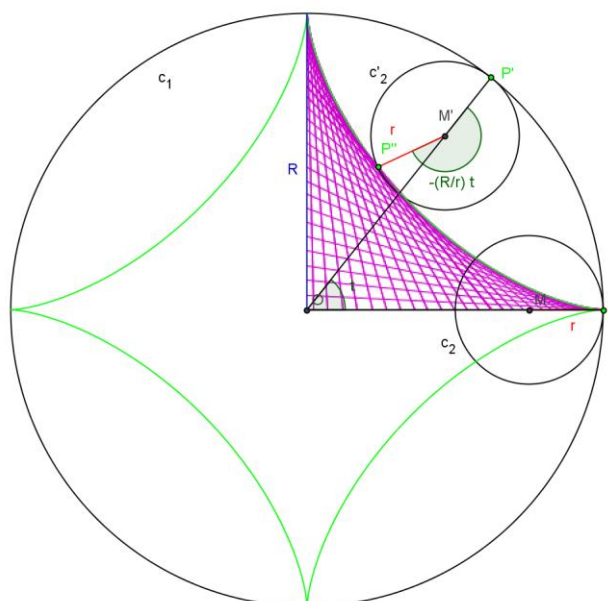
$$y = (R-r) \cdot \sin(t) + r \cdot \sin\left(-\frac{R}{r}t + t\right) = (R-r) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$

In het bijzonder geval dat $R = 4r$, krijgen we een kromme die bestaat uit 4 bogen.



Deze kromme noemen we een asteroïde.

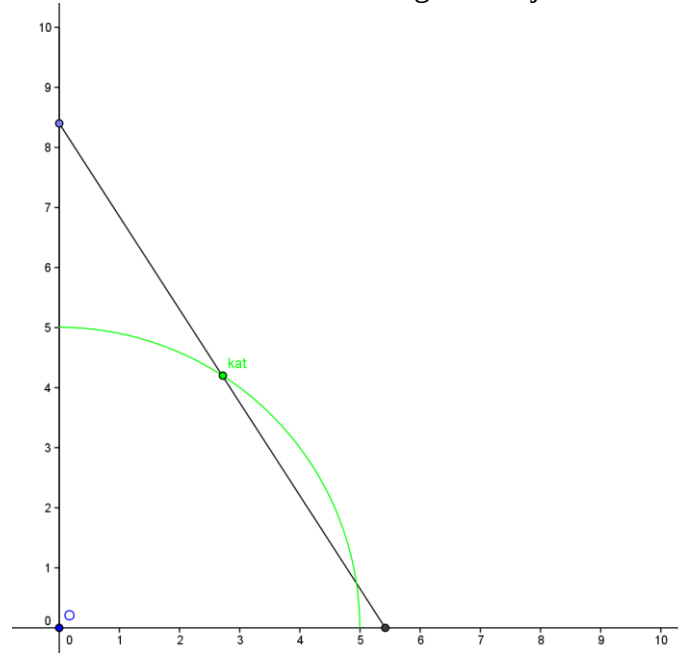
De asteroïde heeft een merkwaardige eigenschap: “de raaklijnen aan de asteroïde, als ze verlengd worden tot aan de x -as en de y -as, hebben allemaal dezelfde lengte” (de lengte van de lijnstukken wordt natuurlijk bedoeld).



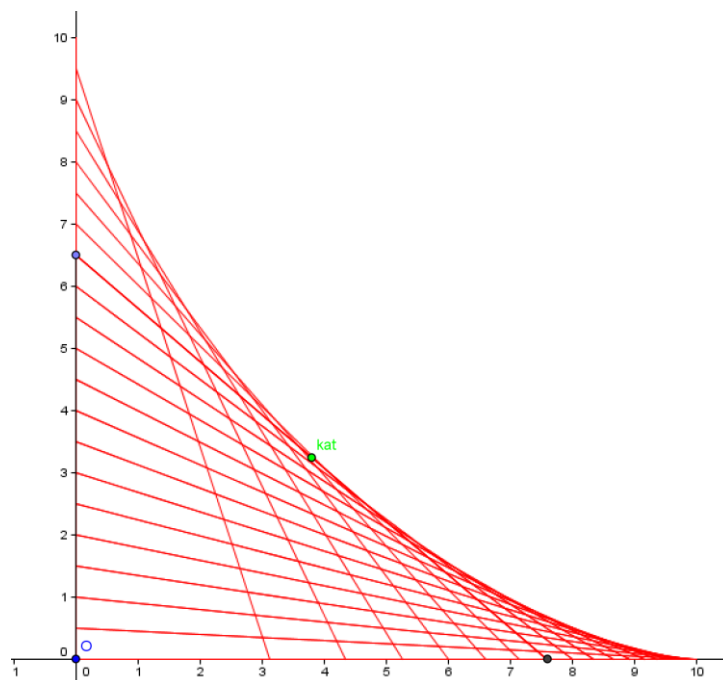
Het volgende leuke vraagstukje illustreert dat perfect:

Een ladder leunt op de grond en tegen een muur. Een kat zit in het midden van de ladder en de

ladder schuift naar beneden. Welke baan beschrijft de kat ? Dit voorbeeld is contra-intuïtief want de baan van de kat is een kwartcirkel. Dit is heel eenvoudig te bewijzen !



Maar in plaats van de meetkundige plaats van het midden kunnen we de meetkundige plaats van de ladder eens zoeken en dan...



Dit alles heeft te maken met het begrip omhullende⁷.
De asteroïde kan zelfs bekomen worden als omhullende van een stelsel ovalen.

⁷ Meer daarover vind je in Wiskunde en Onderwijs nr.137 p. 12 e.v. in het artikel van Jan van de Craats “wiskunde het mooiste vak”.

Hoofdstuk 4: de 20ste eeuw

"Vergeten" stellingen in de vlakke meetkunde

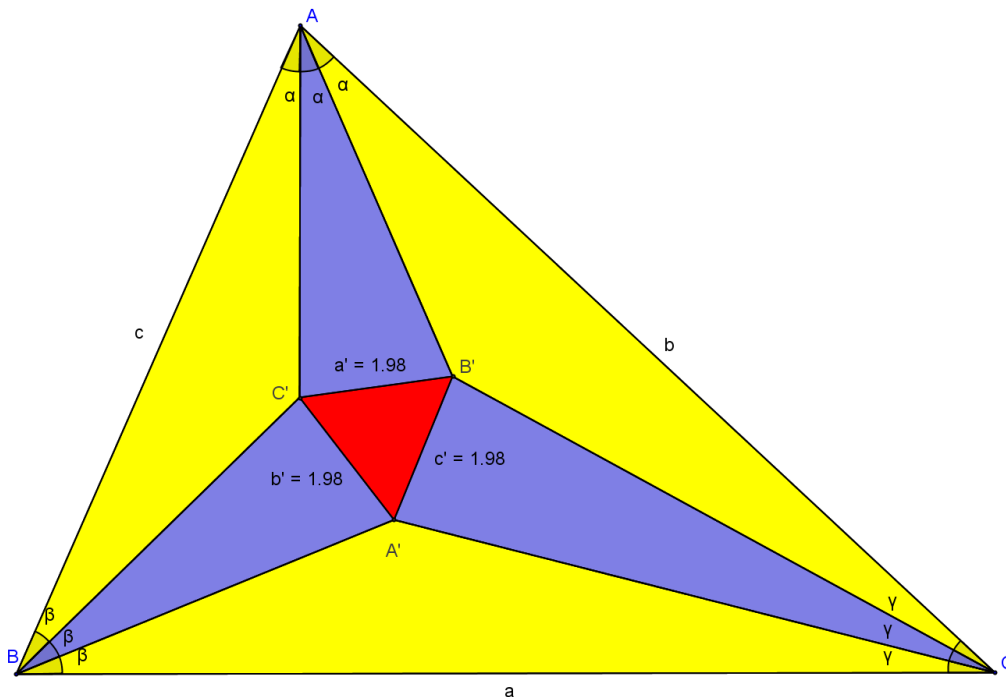
1

Het is verrassend dat een aantal redelijk eenvoudige eigenschappen uit de vlakke meetkunde over het hoofd gezien zijn door de klassieke meetkundigen. We geven hiervan drie voorbeelden, die heel mooi met GeoGebra kunnen geïllustreerd worden.

2

Trisectiestelling van Morley

In 1899 presenteerde de Engels-Amerikaanse wiskundige en sterke schaker Frank Morley (1860-1937), in die tijd verbonden aan het Quaker College in Haverford (Pennsylvania, USA) de volgende eigenschap.

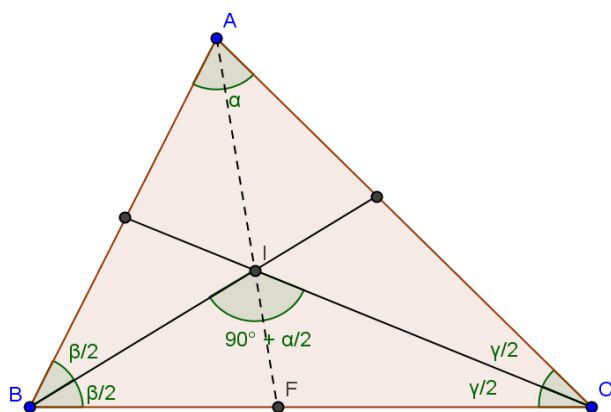


De snijpunten van de aanliggende trisectrices van de hoeken van een driehoek vormen een gelijkzijdige driehoek.

Morley's collega's vonden het resultaat zo fraai en verrassend, dat de eigenschap bekend werd als "Morley's mirakel". Richard Francis schreef: "Blijkbaar over het hoofd gezien door de klassieke meetkundigen of haastig opzij geschoven wegens onzekerheid over trisectie en construeerbaarheid, kwam het probleem pas een goede eeuw geleden aan het licht". Omdat een elementair bewijs van deze stelling nog een hele tijd op zich heeft laten wachten, behoort de stelling eigenlijk toe aan de 20ste eeuw. De stelling van Morley houdt de wiskundigen trouwens nog altijd bezig. In 1998 heeft de Fransman Alain Connes, winnaar van de Fields-medaille, er nog een nieuw bewijs voor geleverd dat steunt op transformaties.

Een direct bewijs van de stelling van Morley is niet vanzelfsprekend. Daarom eerst een indirect meetkundig bewijs.

We bewijzen eerst de volgende hulpstelling



Is I het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC , dan geldt:

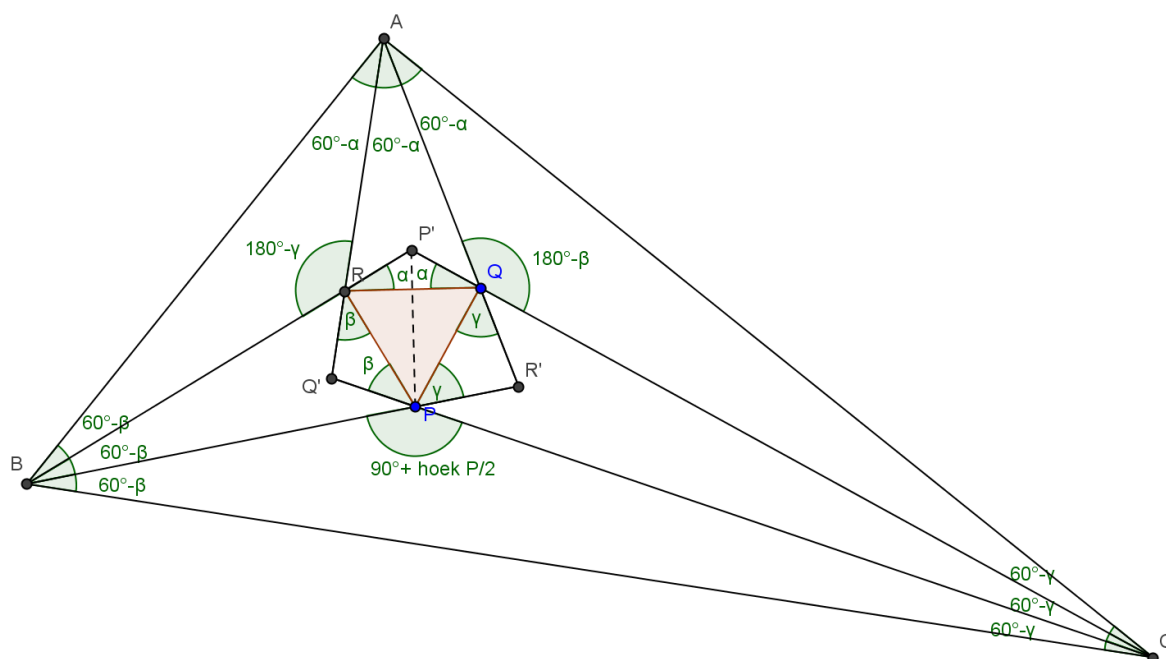
$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

Omgekeerd geldt: ligt I op de deellijn van

$$\angle BAC \text{ en geldt } \angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

dan is I het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC .

En dan nu het bewijs van de stelling



We vertrekken van een gelijkzijdige driehoek PQR en bouwen op de zijden $[QR]$, $[RP]$ en $[PQ]$ drie gelijkbenige driehoeken $P'RQ$, $Q'PR$ en $R'QP$ zodanig dat hun respectievelijke basishoeken α , β en γ voldoen aan $\alpha < 60^\circ$, $\beta < 60^\circ$, $\gamma < 60^\circ$ en $\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ$.

Daarna verlengen we de benen van deze driehoeken tot ze elkaar snijden in de punten A , B en C .

In driehoek ARQ geldt: $\angle QRA = 180^\circ - \beta - 60^\circ = 120^\circ - \beta = \alpha + \gamma$ en

$$\angle AQR = 180^\circ - \gamma - 60^\circ = 120^\circ - \gamma = \alpha + \beta,$$

$$\text{en dus: } \angle RAQ = 180^\circ - \alpha - \gamma - \alpha - \beta = 180^\circ - \alpha - 120^\circ = 60^\circ - \alpha$$

Analoog geldt in driehoek BPR : $\angle PBR = 60^\circ - \beta$,

en in driehoek CQP : $\angle QCP = 60^\circ - \gamma$.

Nu is PP' een symmetrieas van de vlieger $PQP'R$, en dus is PP' de deellijn van $\angle BP'C$ (1).

Verder geldt in driehoek $P'BC$ dat $\hat{BP'C} = 180^\circ - 2\alpha$ en

$$\hat{BPC} = \beta + \gamma + 60^\circ = 180^\circ - \alpha = 90^\circ + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{BP'C}}{2} \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dat P het middelpunt is van de ingeschreven cirkel in driehoek $P'BC$.

Daaruit volgt: $\hat{CBP} = \hat{PBR} = 60^\circ - \beta$ en $\hat{PCB} = \hat{QCP} = 60^\circ - \gamma$

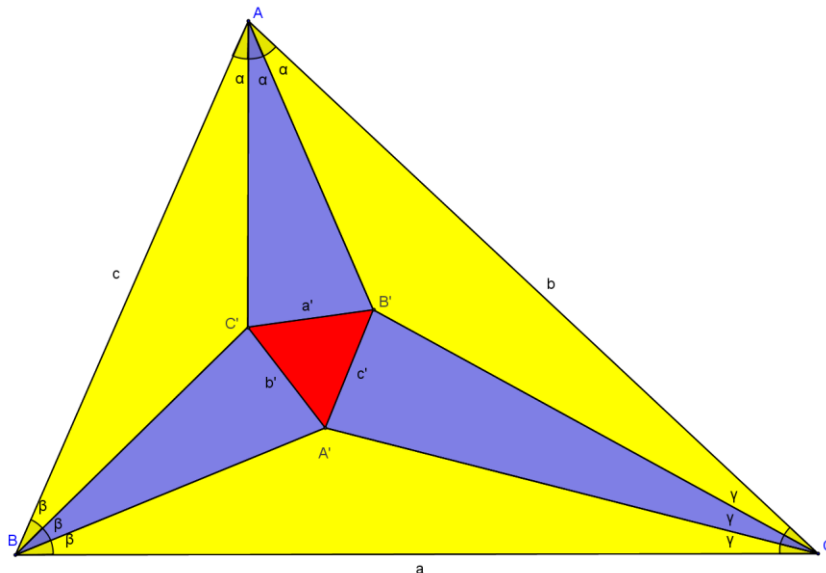
Analoog geldt: $\hat{ACQ} = \hat{QCP} = 60^\circ - \gamma$ en $\hat{QAC} = \hat{RAQ} = 60^\circ - \alpha$

en: $\hat{BAR} = \hat{RAQ} = 60^\circ - \alpha$ en $\hat{RBA} = \hat{PBR} = 60^\circ - \beta$.

Vertrekken we nu van een willekeurige driehoek ABC en kiezen we: $\alpha = 60^\circ - \frac{1}{3}\hat{A}$, $\beta = 60^\circ - \frac{1}{3}\hat{B}$ en

$\gamma = 60^\circ - \frac{1}{3}\hat{C}$ als basishoeken van de drie gelijkbenige driehoeken, dan ontstaat er via de beschreven procedure een driehoek $A'B'C'$ die gelijkvormig is met ABC .

Er is ook een rechtstreeks bewijs mogelijk met goniometrie. Het is een ideale oefening als afsluiting van de goniometrie.



We stellen de hoeken van de driehoek ABC resp. gelijk aan 3α , 3β en 3γ .

1 Toon aan dat $c = 2R \sin 3\gamma$, waarbij R de straal van de omschreven cirkel is.

2 Pas de sinusregel toe in driehoek ABC' en toon aan dat $|AC'| = \frac{2R \sin \beta \sin 3\gamma}{\sin(60^\circ - \gamma)}$.

3 Toon aan dat $\sin 3\gamma = 4 \sin \gamma \sin(60^\circ + \gamma) \sin(60^\circ - \gamma)$.

4 Toon aan dat $|AC'| = 8R \sin \beta \sin \gamma \sin(60^\circ + \gamma)$ en leid hieruit een analoge uitdrukking af voor $|AB'|$.

5 Pas de cosinusregel toe in driehoek $AB'C'$ en toon aan dat

$$|B'C'|^2 = 64R^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \left[\sin^2(60^\circ + \beta) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2 \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ + \gamma) \cos \alpha \right].$$

6 Toon aan dat er driehoeken zijn met hoeken α , $60^\circ + \beta$ en $60^\circ + \gamma$.

7 Neem een willekeurige driehoek met hoeken α , $60^\circ + \beta$ en $60^\circ + \gamma$ en met R' als straal van de omschreven cirkel, pas in deze driehoek de cosinusregel toe en leid daaruit af dat

$$\sin^2(60^\circ + \beta) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2 \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ + \gamma) \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

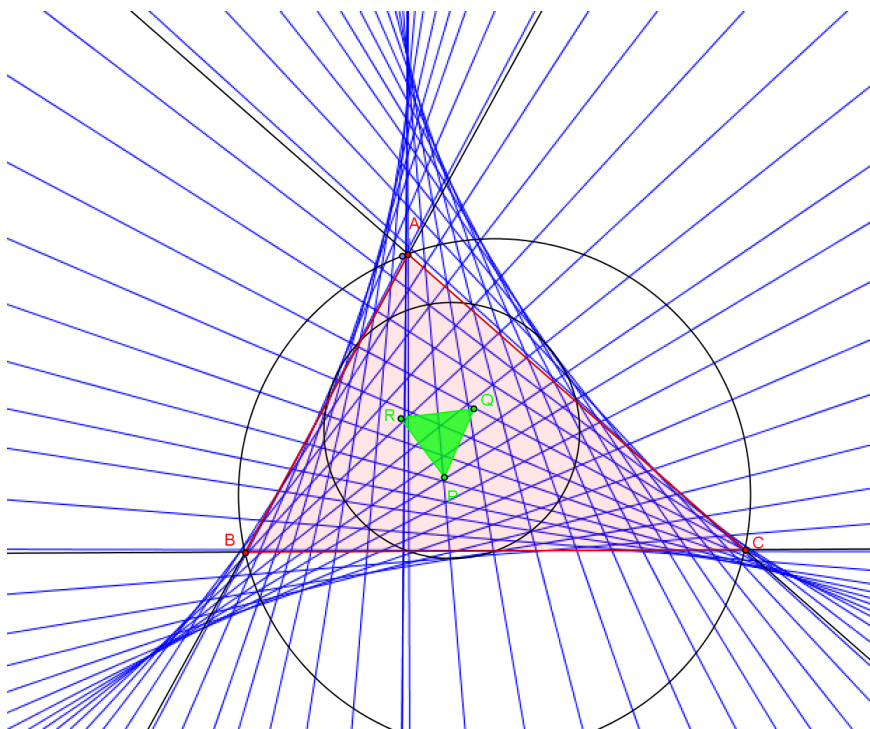
8 Toon aan dat $|B'C'| = 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ en leid hieruit gelijkaardige uitdrukkingen af voor $|A'C'|$ en $|A'B'|$.

Er is een verband tussen de stelling van Morley en de hypocycloïde.

Nemen we een willekeurig punt I van de omschreven cirkel van de driehoek ABC en trekken we de loodlijnen op de drie zijlijnen BC , AC en AB . De voetpunten van deze loodlijnen liggen op één rechte, de rechte van Simson-Wallace.

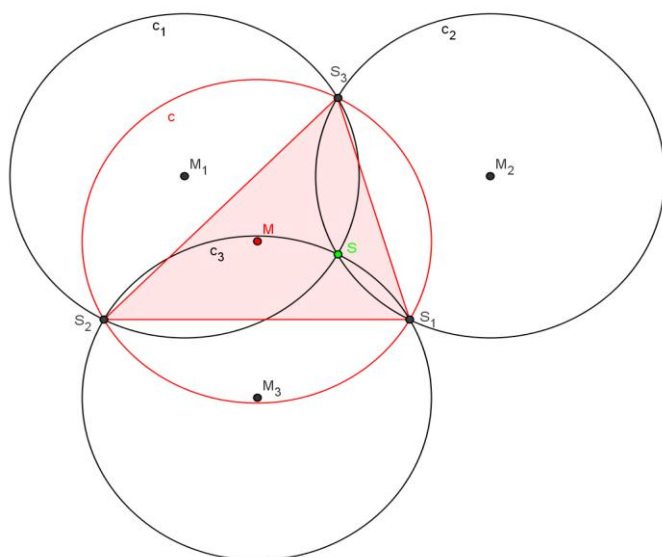
Laten we nu I over de omschreven cirkel lopen, dan omhullen de rechten van Simson-Wallace een hypocycloïde met 3 toppen, die ook de deltoïde van Steiner genoemd wordt. De drie toppen zijn dan de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek, waarvan de zijden evenwijdig zijn met die van de driehoek van Morley.

Verder raakt de hypocycloïde de negenpuntscirkel van driehoek ABC in drie punten, die eveneens een gelijkzijdige driehoek vormen, waarvan de zijden evenwijdig zijn met die van de driehoek van Morley.



3

Stelling van Johnson



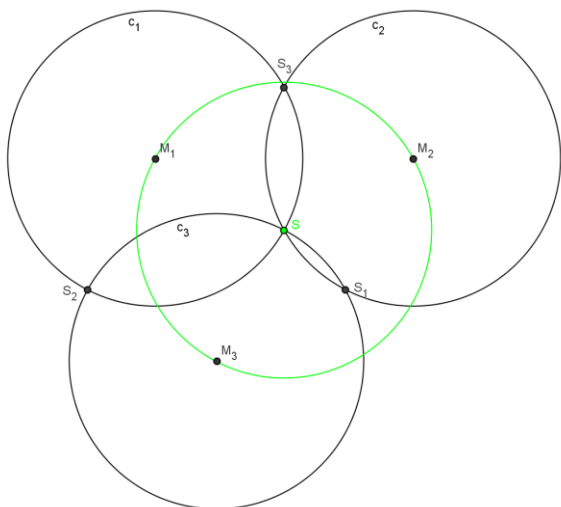
De Amerikaanse meetkundige Roger Johnson (1890-1954) is de schrijver van "Johnson's Modern Geometry: an elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle". Hij studeerde in 1913 af aan Harvard en was van 1947 tot 1952 voorzitter van de wiskundeafdeling van de Brooklyntak van Hunter College, het latere Brooklyn College.

In 1916 ontdekte Johnson de volgende merkwaardige eigenschap.

Als drie congruente cirkels c_1 , c_2 en c_3 door één punt S gaan, dan liggen hun drie andere snijpunten S_1 , S_2 en S_3 op een vierde cirkel c die even groot is als de oorspronkelijke drie cirkels. Net als de stelling van Morley is deze eigenschap zo eenvoudig dat het opmerkelijk is dat ze niet veel vroeger is ontdekt.

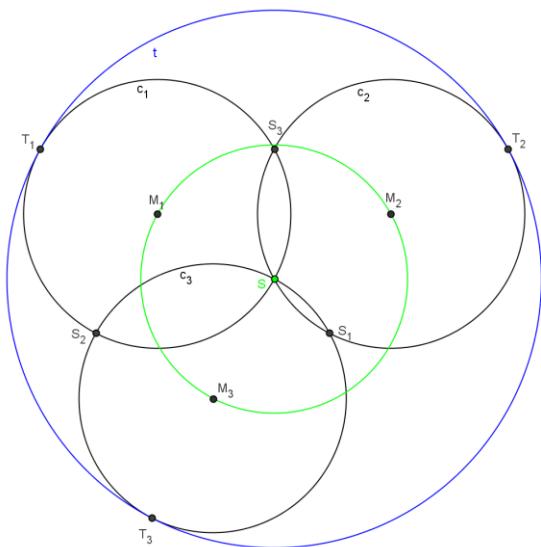
Ook het bewijs is redelijk eenvoudig. Het verloopt in 4 fasen, die we met GeoGebra mooi kunnen tonen.

Fase 1



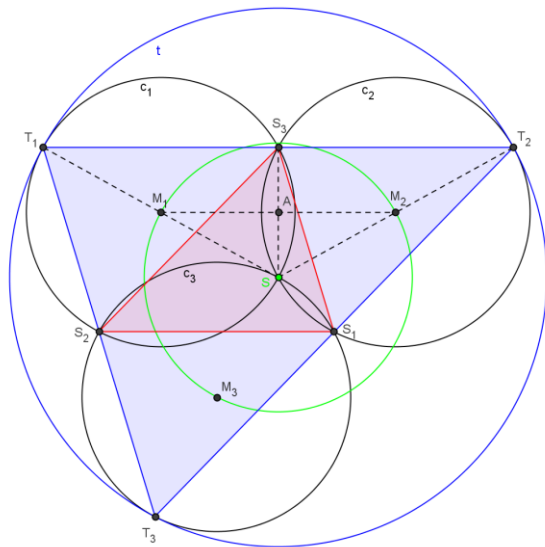
De drie middelpunten M_1 , M_2 en M_3 liggen op een cirkel met dezelfde straal als de cirkels van Johnson en met als middelpunt S .

Fase 2



De omgeschreven cirkel t aan de drie cirkels van Johnson heeft als straal de diameter van de cirkels van Johnson en als middelpunt weer het gemeenschappelijk snijpunt S . De punten T_1 , T_2 en T_3 zijn de raakpunten van die omgeschreven cirkel aan de cirkels van Johnson.

Fase 3



We vergelijken nu de driehoek $T_1T_2T_3$ met de driehoek van Johnson $S_1S_2S_3$.

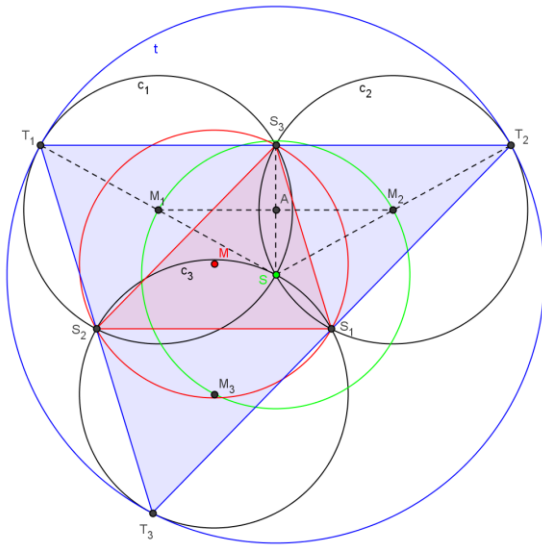
De homothetie h met S als centrum en 2 als factor beeldt M_1M_2 af op T_1T_2 en A op S_3 .

Daaruit volgt dat S_3 op T_1T_2 ligt.

Verder is SS_3 een spiegelas in de driehoek ST_1T_2 . Daaruit volgt dat S_3 het midden is van $[T_1T_2]$. Analoog zijn S_1 en S_2 de middens van resp. $[T_2T_3]$ en $[T_1T_3]$.

Daaruit volgt dat de driehoeken $T_1T_2T_3$ en $S_1S_2S_3$ gelijkvormig zijn en dat er dus een homothetie h' bestaat met factor $\frac{1}{2}$ die de driehoek $T_1T_2T_3$ afbeeldt op de driehoek $S_1S_2S_3$.

Fase 4

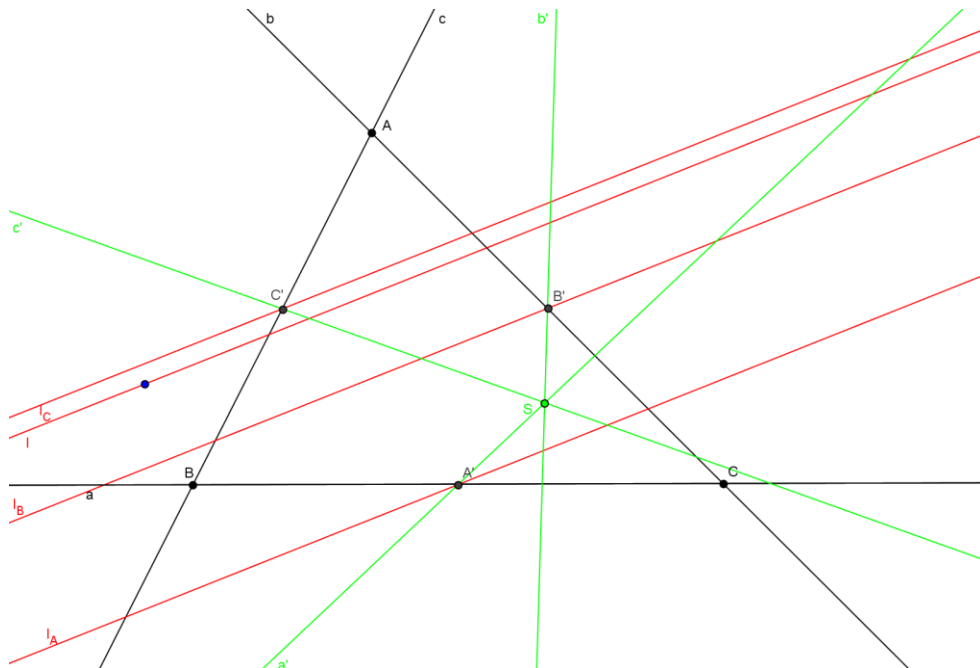


Diezelfde homothetie h' beeldt de omgeschreven cirkel van driehoek $T_1T_2T_3$ af op de omgeschreven cirkel van driehoek $S_1S_2S_3$. De straal van deze laatste cirkel is dus gelijk aan de straal van de oorspronkelijke drie cirkels.

4

Stelling van Bliss

We kunnen vermoeden dat er nog steeds een schat aan meetkundige eigenschappen verborgen is en wacht op ontdekking. Dit werd in mei 1999 nog aangetoond toen een Amerikaanse student, Adam Bliss, de volgende eigenschap ontdekte.



ABC is een willekeurige driehoek en l een willekeurige rechte.

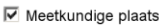
A' , B' en C' zijn resp. de middens van de zijden $[B'C']$, $[A'C']$ en $[A'B']$.

We trekken nu de rechten l_A , l_B en l_C , resp. door A' , B' en C' en evenwijdig aan l .

Daarna spiegelen we de zijlijnen a , b en c van driehoek ABC , resp. rond l_A , l_B en l_C .

De spiegelbeelden a' , b' en c' gaan dan door één punt S .⁸

⁸ Een bewijs vind je o.a. in <http://home.wxs.nl/~lamoen/wiskunde/concur.html> en in <http://clem.mscedu/~talmanl>.



27