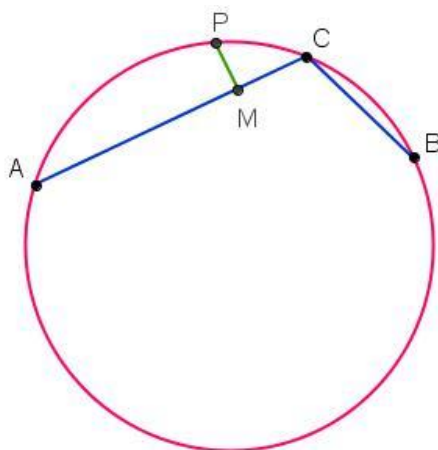


STELLING VAN DE GEBROKEN KOORDE (Archimedes)

De lijnstukken $[AC]$ en $[CB]$ vormen een gebroken koorde in een cirkel (met $|AC| > |CB|$). Als P het midden is van de boog ACB en als M het voetpunt is van de loodlijn uit P op $[AC]$ dan is M ook het midden van de gebroken koorde.



Te bewijzen: $|AM| = |MC| + |CB|$.

Eerste bewijs.

Verleng $[AC]$ tot aan het punt D zodat $|CD| = |CB|$. Driehoek BCD is dan een gelijkbenige driehoek met $\widehat{CDB} = \widehat{DBC} = \alpha$ en met als buitenhoek $\widehat{ACB} = 2\alpha$.

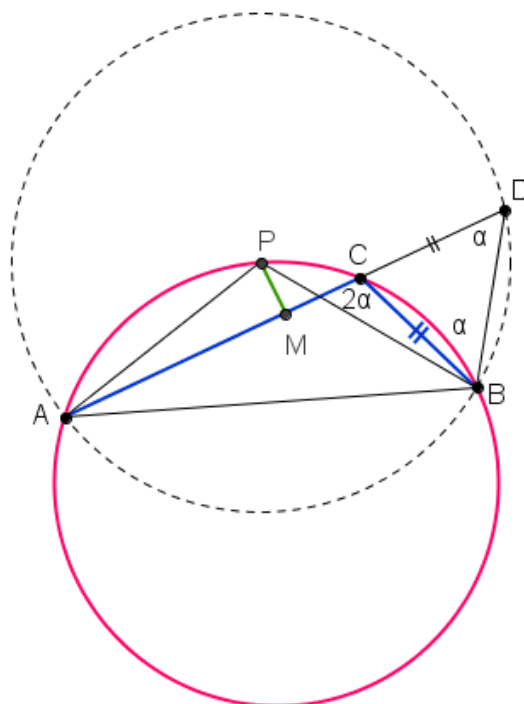
Bijgevolg is ook $\widehat{APB} = 2\alpha$ (omtrekshoeken op dezelfde boog).

Omdat P het midden is van de boog ACB is $|AP| = |PB|$, waaruit volgt dat P op de middelloodlijn ligt van $[AB]$. Bovendien is $\widehat{APB} = 2 \cdot \widehat{ADB}$ zodat P het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van driehoek ADB .

Dan deelt het apothema $[PM]$ de koorde $[AD]$ middendoor en bijgevolg is

$$|AM| = |MD| = |MC| + |CD| = |MC| + |CB|.$$

Q.E.D.



Tweede bewijs.

Bepaal op $[AC]$ het punt N zodat $|AN| = |CB|$.

Dan zijn de driehoeken APN en BPC congruent want

- (1) $|AN| = |CB|$ (door constructie)
- (2) $\widehat{PAN} = \widehat{PBC}$ (omtrekshoeken op dezelfde boog)
- (2) $|AP| = |PB|$ (koorden op gelijke bogen)

zodat $|PN| = |PC|$.

Bijgevolg is PM de middelloodlijn van $[NC]$ en is $|NM| = |MC|$.

Dus is

$$|AM| = |AN| + |NM| = |CB| + |MC|.$$

Q.E.D.

