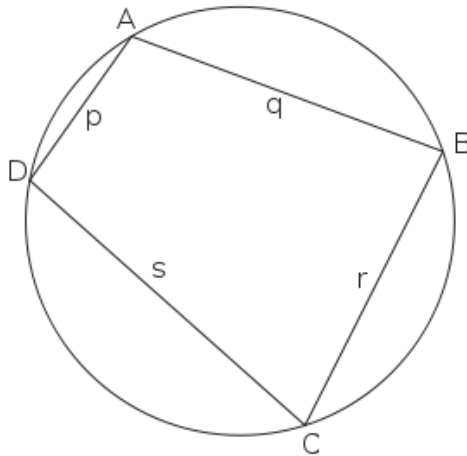


Formule van Brahmagupta voor de oppervlakte K van een koordenvierhoek:

$$K = \sqrt{(S-p)(S-q)(S-r)(S-s)}.$$

waarbij p, q, r en s de lengtes van de vier zijden zijn en waarbij S de halve omtrek is,

$$\text{d.w.z. } S = \frac{p+q+r+s}{2}.$$



Goniometrisch bewijs

De oppervlakte K van de koordenvierhoek = Opp. $\triangle ADB$ + Opp. $\triangle BDC$

$$= \frac{1}{2}pq \sin A + \frac{1}{2}rs \sin C.$$

Omdat $ABCD$ een koordenvierhoek is, is $\angle DAB = 180^\circ - \angle DCB$.

Bijgevolg is $\sin \hat{A} = \sin \hat{C}$.

Merk op: in het vervolg van het bewijs gebruiken we de Engelstalige notatie waarbij in feite $\sin A = \sin \hat{A}$.

Dan is

$$K = \frac{1}{2}pq \sin A + \frac{1}{2}rs \sin A$$

$$K^2 = \frac{1}{4}(pq + rs)^2 \sin^2 A$$

$$4K^2 = (pq + rs)^2(1 - \cos^2 A) = (pq + rs)^2 - (pq + rs)^2 \cos^2 A.$$

We passen in $\triangle ADB$ en $\triangle BDC$ de cosinusregel toe voor de zijde [BC]:

$$p^2 + q^2 - 2pq \cos A = r^2 + s^2 - 2rs \cos C.$$

Hierbij is $\cos \hat{C} = -\cos \hat{A}$ (de hoeken $\hat{A}$ en $\hat{C}$ zijn supplementaire hoeken) zodat uit de bovenstaande gelijkheid volgt dat

$$2(pq + rs) \cos A = p^2 + q^2 - r^2 - s^2.$$

Substitueer dit in de formule voor $4K^2$:

$$\begin{aligned} 4K^2 &= (pq + rs)^2 - \frac{1}{4}(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)^2 \\ 16K^2 &= 4(pq + rs)^2 - (p^2 + q^2 - r^2 - s^2)^2. \end{aligned}$$

In het rechterlid herkennen we de formule

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

zodat we dit kunnen schrijven als

$$[2(pq + rs) - p^2 - q^2 + r^2 + s^2][2(pq + rs) + p^2 + q^2 - r^2 - s^2]$$

en na het herschikken van de termen is dit gelijk aan

$$\begin{aligned} &= [(r + s)^2 - (p - q)^2][(p + q)^2 - (r - s)^2] \\ &= (q + r + s - p)(p + r + s - q)(p + q + s - r)(p + q + r - s). \end{aligned}$$

We gebruiken nu de uitdrukking S voor de halve omtrek van de koordenvierhoek

$$S = \frac{p + q + r + s}{2},$$

en vinden zo dat

$$16K^2 = 16(S - p)(S - q)(S - r)(S - s).$$

Trek hieruit tenslotte de vierkantswortel:

$$K = \sqrt{(S - p)(S - q)(S - r)(S - s)}.$$