

PROBLEEM 40

Bekijk het onderstaande schema

1
5 9 13
17 21 25 29 33
37 41 45 49 53 57 61
...

Toon aan dat de som van de getallen op elke horizontale rij de derde macht is van een oneven getal.

OPLOSSING.

Eerste methode.

Op de tweede rij staan 3 termen: $1 + 1 \cdot 4$ $1 + 2 \cdot 4$ en $1 + 3 \cdot 4$.

Op de derde rij staan 5 termen: $1 + 4 \cdot 4$ $1 + 5 \cdot 4$ $1 + 6 \cdot 4$ $1 + 7 \cdot 4$ en $1 + 8 \cdot 4$.

Op de n -de rij staan de volgende $2n - 1$ getallen:

$1 + (n - 1)^2 \cdot 4$ $1 + n^2 \cdot 4$ en $1 + (n^2 - 1) \cdot 4$ (hoezo?).

Pas hierop de formule toe voor de n -de partieelsom van een rekenkundige rij:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{[(1 + (n - 1)^2 \cdot 4) + (1 + (n^2 - 1) \cdot 4)](2n - 1)}{2} \\ &= \frac{(8n^2 - 8n + 2)(2n - 1)}{2} \\ &= (4n^2 - 4n + 1)(2n - 1) \\ &= (2n - 1)^3. \end{aligned}$$

Tweede methode.

Op de n -de rij staan er $2n - 1$ termen.

We tonen eerst aan dat de middelste term van de n -de rij is gelijk aan een kwadraatgetal nl. $(2n - 1)^2$.

Dit kan via volledige inductie.

- De bewering klopt voor de eerste rij (evident).
- Stel dat het middelste getal van de k -de rij gelijk is aan $(2k - 1)^2$.
Dan is het middelste getal van de volgende rij gelijk aan

$$(2k - 1)^2 + (k - 1)4 + (k + 1)4 = 4k^2 - 4k + 1 + 8k = (2k + 1)^2 = [2(k + 1) - 1]^2.$$

Dan is de som van elke twee termen op de n -de rij die even ver van de middelste term verwijderd staan gelijk aan $2(2n - 1)^2$. Zo zijn er $n - 1$ paren.

Hieruit volgt dat de som van alle termen op de n -de rij gelijk is aan

$$(n - 1)2(2n - 1)^2 + (2n - 1)^2 = (2n - 1)^2 (2n - 2 + 1) = (2n - 1)^3.$$
