

PROBLEEM 39

Bekijk de onderstaande sommen:

$$5^3 + 6^3 + 7^3 = 684$$

$$10^3 + 11^3 + 12^3 = 4\,059$$

$$31^3 + 32^3 + 33^3 = 98\,496$$

...

Blijkbaar is de som van de derdemachten van 3 opeenvolgende gehele getallen steeds deelbaar door 9 (want de som van de cijfers van de uitkomst is deelbaar door 9). Toon aan dat dit in het algemeen waar is!

OPLOSSING

Eerste methode.

$$\begin{aligned}(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\ &= 3n^3 + 6n \\ &= 3n^3 + 9n - 3n \\ &= 9n + 3n(n^2 - 1) \\ &= 9n + 3(n-1)n(n+1).\end{aligned}$$

Uiteraard is $9n$ een 9-voud.

Bij drie opeenvolgende gehele getallen $n-1$, n en $n+1$ zit er altijd een drievoud en bijgevolg is ook $3(n-1)n(n+1)$ een 9-voud.

Tweede methode.

Elk geheel getal is een 3-voud, een 3-voud+1 of een 3-voud-1.

Merk op dat $S = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2)$.

We beschouwen nu de drie mogelijke gevallen:

- 1) $n = 3k$, dan is $S = 9k(9k^2 + 2)$ en dat is een 9-voud.
 - 2) $n = 3k + 1$ dan is $S = 3(3k+1)(9k^2 + 6k + 3)$
 $= 9(3k+1)(3k^2 + 2k + 1)$ en dat is een 9-voud.
 - 3) $n = 3k - 1$ dan is $S = 3(3k-1)(9k^2 - 6k + 3)$
 $= 9(3k-1)(3k^2 - 2k + 1)$ en dat is een 9-voud.
-

Derde methode (ingestuurd door Odette Demeulemeester).

Bij 3 opeenvolgende getallen zit er altijd een drievoud.

1) Het kleinste is een drievoud.

$$\begin{aligned}(3n)^3 + (3n+1)^3 + (3n+2)^3 &= 27n^3 + 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1 + 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8 \\ &= 81n^3 + 81n^2 + 45n + 9 \\ &= 9(9n^3 + 9n^2 + 5n + 1) \text{ is een 9-voud.}\end{aligned}$$

2) Het middelste is een drievoud.

$$\begin{aligned}(3n-1)^3 + (3n)^3 + (3n+1)^3 &= 27n^3 - 27n^2 + 9n - 1 + 27n^3 + 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1 \\ &= 81n^3 + 18n \\ &= 9(9n^3 + 2n) \text{ is een 9-voud.}\end{aligned}$$

3) Het grootste is een drievoud.

$$\begin{aligned}(3n-2)^3 + (3n-1)^3 + (3n)^3 &= 27n^3 - 54n^2 + 36n - 8 + 27n^3 - 27n^2 + 9n - 1 + 27n^3 \\ &= 81n^3 - 81n^2 + 45n - 9 \\ &= 9(9n^3 - 9n^2 + 5n - 1) \text{ is een 9-voud.}\end{aligned}$$
